УДК 513.88

И.-П. П. Сыроид

Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра оператора Дирака

Исследование автора [1] для несамосопряженного оператора Дирака с диагональным потенциалом на всей оси распространим на оператор Дирака с потенциалом общего вида.

Пусть $\mathfrak{H} = L_2(\mathbf{R}) \times L_2(\mathbf{R})$, $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

Определение 1. *За невозмущенный оператор примем самосопряженный оператор Дирака L_1, порождаемый в $\mathfrak{H}$ дифференциальным выражением*

$$\mathfrak{B}\frac{d}{dx}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

на множестве $D(L_1) = W_2^1(\mathbf{R}) \times W_2^1(\mathbf{R})$.

Пусть $v_1(x)$, $v_2(x)$ комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbf{R}} (|v_1(x)| + |v_2(x)|)\, dx < \infty. \tag{1}$$

Пусть V — оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathfrak{H}$

$$Vf = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad D(V) = \{f \in \mathfrak{H} \mid Vf \in \mathfrak{H}\}.$$

Представим оператор V в виде суммы $V = V_1 + V_2$,

$$V_1 f = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & -v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 f = \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \; D(V_i) = \{f \in \mathfrak{H} \mid V_i f \in \mathfrak{H}\}, \quad i = 1, 2.$$

Операторы V_i, $i = 1, 2$, представим в виде $V_i = B_i^* A_i$

$$A_i = a_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \qquad B_1 = b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a_i = |v_i|^{\frac{1}{2}}, \quad b_i = \overline{\operatorname{sgn} v_i}\, |v_i|^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{sgn} v = \frac{v}{|v|}. \tag{2}$$

С помощью операторов A_i, B_i осуществляется представление Т. Като оператора V в виде $V = B^*A$. Пусть $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Определим операторы $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$, действующие из $\mathfrak{H}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ следующим образом:

$$D(A) = D(A_1) \cap D(A_2), \quad Af = (A_1 f, A_2 f), \quad f \in D(A),$$

$$D(B) = D(B_1) \cap D(B_2), \quad Bf = (B_1 f, B_2 f), \quad f \in D(B).$$

Получается $V = B^*A$ с естественным сужением множества определения оператора V.

Определение 2. *За возмущенный оператор принимаем несамосопряженный оператор* $L_1 + cB^*A$ (c — комплексный параметр).

Теорема 1. *При условии* (1) *обозначим* $\widehat{a}=((a_1, a_1), (a_2, a_2))$, $\widehat{b}=((b_1, -b_1), (b_2, b_2))$, $(a_i, b_i, i=1, 2$, *см.* (2)) *и пусть* $R_1(\zeta)$ — *резольвента оператора* L_1. *Тогда:*

1) $$\left(\int_{\mathrm{R}} (\| AR_1(\lambda+i\varepsilon) u \|^2_{\mathfrak{H}} + \| AR_1(\lambda-i\varepsilon) u \|^2_{\mathfrak{H}})\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{\pi}\, \| \widehat{a} \|_{\widehat{\mathfrak{H}}} \| u \|_{\mathfrak{H}}; \tag{3}$$

$$\left(\int_{\mathrm{R}} (\| BR_1(\lambda+i\varepsilon) u \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \| BR_1(\lambda-i\varepsilon) u \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}})\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{\pi}\, \| \widehat{b} \|_{\widehat{\mathfrak{H}}} \| u \|_{\mathfrak{H}}$$

$$u \in \mathfrak{H}, \quad \varepsilon > 0 \text{ и } \| \widehat{a} \|_{\widehat{\mathfrak{H}}} = \| \widehat{b} \|_{\widehat{\mathfrak{H}}}. \tag{4}$$

Из (3) *и* (4) *следует, что функции* $AR_1(\zeta)$ *и и* $BR_1(\zeta)$ *и принадлежат классам Харди* $H^2(\Omega_\pm, \widehat{\mathfrak{H}})$ *в полуплоскостях* $\Omega_+ = \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ $(\Omega_- = \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta < 0\})$ *комплексной плоскости и, следовательно, операторы* A *и* B *являются* L_1*-гладкими в смысле Като* [2].

2) *Имеет место неравенство*

$$\| AR_1(\zeta) B^*\widehat{u} \|_{\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \left(\int_{\mathrm{R}} \sum_{i=1}^{2} | v_i(x) |\, dx\right) \| \widehat{u} \|_{\widehat{\mathfrak{H}}}, \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0, \ \widehat{u} \in D(B^*). \tag{5}$$

3) *Если*

$$| c | < 1 / \int_{\mathrm{R}} \sum_{i=1}^{2} | v_i(x) |\, dx, \tag{6}$$

то оператор $L_1 + cB^*A$ *допускает расширение* $L(c) \supset L_1 + cB^*A$, *обладающее свойствами: а) оператор* A *является* $L(c)$*-гладким, а оператор* B — $L(c)^*$*-гладким; б) оператор* $L(c)$ *подобен самосопряженному оператору* L_1

$$L(c) = W_\pm(c) L_1 W_\pm(c)^{-1}. \tag{7}$$

Подобие (7) *осуществляют волновые операторы Като* [2], *допускающие представление*

$$W_\pm(c) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itL(c)} e^{-itL_1}$$

($e^{itL(c)}, e^{-itL_1}$ — *сильно непрерывные группы с образующими* $iL(c)$, iL_1).

Следствие 2. *При условии* (6) *оператор* $L(c)$ *имеет двукратный чисто непрерывный спектр на вещественной оси и является спектральным в смысле Данфорда—Бэйда оператором.*

Доказательство теоремы 1. В силу того, что iL_1 является бесконечномалой образующей сильно непрерывной группы типа (с), имеет место (см. [2]) формула

$$\int_{\mathrm{R}} (\| AR_1(\lambda+i\varepsilon) u \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \| AR_1(\lambda-i\varepsilon) u \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}})\, d\lambda = \int_{\mathrm{R}} \| A(R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)) u \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}} d\lambda.$$

Подставляя в формулу выражение для $R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)$ $(R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)) u(x) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} e^{-\varepsilon|x-t|} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t)\, dt + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-t)} \times e^{-\varepsilon|x-t|} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t)\, dt$, получаем оценки (3), (4).

Используя представление оператора $R_1(\zeta)$

$$R_1(\zeta) f(x) =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{i}{2}\left\{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x} e^{i\zeta(x-t)}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}(t)\,dt+\int\limits_{x}^{\infty} e^{-i\zeta(x-t)}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}(t)\,dt\right\}, & \operatorname{Im}\zeta>0,\\ -\dfrac{i}{2}\left\{\displaystyle\int\limits_{x}^{\infty} e^{i\zeta(x-t)}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}(t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-i\zeta(x-t)}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}(t)\,dt\right\}, & \operatorname{Im}\zeta<0\end{cases}$$

и определения операторов A и B, получаем (5).

Теорема 1 получается как следствие доказанных оценок и результатов [2].

В дальнейшем не налагаются условия малости на потенциал оператора Дирака. Оператор $L \supset L_1 + B^*A$ может иметь невещественный спектр и спектральные особенности на непрерывном спектре [3]. Подобия операторов L и L_1 может не быть.

Исследуется задача подобия частей $L_1P_1(\Delta)$ и $LP(\Delta)$ операторов L_1 и L на измеримом подмножестве Δ непрерывных спектров этих операторов, если расстояние $d(\Delta, \sigma)$ между множеством Δ и множеством спектральных особенностей σ оператора L больше нуля $d(\Delta, \sigma) = d < 0$.

Оператор $L \supset L_1 + B^*A$ строится согласно схеме Като [2].

Пусть Σ состоит из тех ζ, $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$, в которых оператор $K(\zeta) = 1 + A[R_1(\zeta)B^*]\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ необратим (Σ не более чем счетно, $[R_1(\zeta)B^*]$ — замыкание оператора $R_1(\zeta)B^*$).

Определение 2. *Пусть $\zeta \in \Omega \setminus \Sigma$, $\Omega = \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta \neq 0\}$. Определим оператор $R(\zeta)$ так:*

$$R(\zeta) = R_1(\zeta) - [R_1(\zeta)B^*]K(\zeta)^{-1}AR_1(\zeta)$$

($R(\zeta)$ ограничен в $\mathfrak{H}$ при $\zeta \in \Omega \setminus \Sigma$).

Лемма 3. *Пусть $\zeta \in \Omega \setminus \Sigma$. Тогда* 1) $\operatorname{Ker} R(\zeta) = \{0\}$, *а множество значений $R(\zeta)$ плотно в $\mathfrak{H}$, 2) $R(\zeta)$ удовлетворяет тождеству Гильберта $R(\zeta_1) - R(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2) R(\zeta_1) R(\zeta_2)$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_+ \setminus \Sigma$ ($\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_- \setminus \Sigma$).*

Следствие 4. *Существует единственный, замкнутый, плотно-заданный в $\mathfrak{H}$ оператор L, определенный на множестве $D(L)$, имеющий оператор $R(\zeta)$ резольвентой. Множество принадлежит резольвентному множеству оператора L.*

Лемма 5. *Оператор L является расширением оператора $L_1 + B^*A - L \supset L_1 + B^*A$* (см. [2]).

Теорема 6. *1) Дискретный спектр оператора L размещен вне вещественной оси; 2) комплексное число λ принадлежит дискретному спектру оператора L тогда и только тогда, когда λ — полюс функции $K(\zeta)^{-1}$; 3) множество Σ является дискретным спектром оператора L и состоит из изолированных собственных значений собственной кратности 1 и конечной алгебраической кратности; 4) все вещественные числа принадлежат непрерывному спектру оператора L.*

Следствие 7. *$\Omega \setminus \Sigma$ — резольвентное множество оператора L.*

Обозначим через $K_+(\zeta)$ ($K_-(\zeta)$) продолжение функции $K(\zeta)$ с полуплоскости $\Omega_+(\Omega_-)$ на вещественную ось.

Определение 3. *Вещественное число λ назовем спектральной особенностью оператора L, если хотя бы один из операторов $K(\lambda)_\pm$ необратим.*

Множество спектральных особенностей оператора L обозначим через σ и пусть σ счетно.

Диагональное представление невозмущенного оператора L_1 осуществляется унитарным оператором

$$U = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\mathscr{F}^{-1} + \begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\mathscr{F}\right), \quad UL_1 = SU$$

$\mathfrak{F}$ — преобразование Фурье—Планшереля в $L_2(\mathbf{R}) \times L_2(\mathbf{R})$, S — оператор умножения на независимую переменную в $\mathfrak{H}$.

Почти для всех вещественных λ определим предельные значения функций $AR(\zeta)$ и $BR(\zeta)$ на вещественной оси

$$AR(\lambda \pm i0) f = K(\lambda)_{\pm}^{-1} AR_1(\lambda \pm i0) f, \quad BR(\lambda \mp i0)^* f = K^*(\lambda)_{\pm}^{-1} BR_1 \times$$

$$\times (\lambda \mp i0)^* f, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad K^*(\zeta) = K(\overline{\zeta})^*$$

Определение 4. *Пусть почти для всех вещественных*

$$\Phi_{\pm} f(\lambda) = Uf(\lambda) - ((BR(\lambda \mp i0)^* f,\ Ae_0^1(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}},\quad (BR(\lambda \mp i0)^* f,\ Ae_0^2(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}}); \tag{8}$$

$$\Psi_{\pm} f(\lambda) = Uf(\lambda) - ((AR(\lambda \pm i0) f,\ Be_0^1(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}},\quad (AR(\lambda \pm i0) f,\ Be_0^2(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}}), \tag{9}$$

где операторы A, B определены на собственных функционалах непрерывного спектра карлемановского оператора L_1, представимых функциями $e_0^1(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ *и* $e_0^2(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Используется гильбертово оснащение пространства $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$, вследствие которого операторы A, B продолжимы до операторов из $\mathfrak{H}_-$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$.

Назовем операторы $\Phi_{\pm}$ и $\Psi_{\pm}$ L^*-и L-преобразованием Фурье непрерывного спектра.

Лемма 8. *Пусть ζ принадлежит резольвентному множеству оператора L. Тогда почти для всех $\lambda \in \mathbf{R}$ и $f \in \mathfrak{H}$*

$$\Psi_{\pm} R(\zeta) f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \zeta} \Psi_{\pm} f(\lambda), \quad \Phi_{\pm} R^*(\zeta) f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \zeta} \Phi_{\pm} f(\lambda), \ R^*(\zeta) = R(\overline{\xi})^*.$$

Обозначим

$$\mathfrak{H}(\Delta) = \chi_{\Delta}(S)\, \mathfrak{H}, \tag{10}$$

где $\varkappa_{\Delta}(S)$ — оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества Δ вещественной оси в пространстве $\mathfrak{H}$.

Исследуем свойства L- и L^*-преобразования Фурье.

Теорема 9. *Пусть расстояние $d(\Delta, \sigma)$ между измеримым множеством Δ вещественной оси и множеством σ спектральных особенностей оператора L равно $d(\Delta, \sigma) = d > 0$. Тогда*

$$\| \chi_{\Delta}(S) \Phi_{\pm} f \|_{\mathfrak{H}(\Delta)} \leqslant C_{\Delta}^{\Phi} \| f \|_{\mathfrak{H}}, \quad \| \chi_{\Delta}(S) \Psi_{\pm} f \|_{\mathfrak{H}(\Delta)} \leqslant C_{\Delta}^{\Psi} \| f \|_{\mathfrak{H}}, \quad f \in \mathfrak{H},$$

$C_{\Delta}^{\Phi} < \infty$, $C_{\Delta}^{\Psi} < \infty$. *При этом* C_{Δ}^{Φ}, $C_{\Delta}^{\Psi} \to \infty$, *если* $d(\Delta, \sigma) \to 0$.

Доказательство теоремы получается с использованием оценок (3), (4) и определений операторов $\Phi_{\pm}$ и $\Psi_{\pm}$ (см. определение 4).

Сформулируем равенство Парсеваля на измеримом подмножестве Δ вещественной оси.

Теорема 10. *Пусть Δ — измеримое множество из $\mathbf{R}$ и расстояние $d(\Delta, \sigma) = d > 0$. Тогда для всякого $g \in \mathfrak{H}(\Delta)$* (см. определение (10)) *существует $h \in \mathfrak{H}$, что $\chi_{\Delta}(s) \Psi_{\pm} h = g$. При этом $h = (\chi_{\Delta}(s) \Phi_{\pm})^* g$, то есть,* $\chi_{\Delta}(S) \Psi_{\pm} (\chi_{\Delta}(S) \Phi_{\pm})^* = \chi_{\Delta}(S)$.

Следствие 11. *Пусть Δ — измеримое множество из $\mathbf{R}$ и $d(\Delta, \sigma) = d > 0$. Тогда 1) оператор $P(\Delta) = (\chi_{\Delta}(S) \Phi_{\pm})^* \chi_{\Delta}(S) \Psi_{\pm}$ идемпотентен $P(\Delta)^2 = P(\Delta)$; 2) $LP(\Delta) = P(\Delta) L$.*

Определим операторы $W_{\pm}(\Delta)$ и $Z_{\pm}(\Delta)$

$$W_{\pm}(\Delta) = (\chi_{\Delta}(S) \Phi_{\pm})^* \chi_{\Delta}(S) U, \qquad Z_{\pm}(\Delta) = U^* \chi_{\Delta}(S) \Psi_{\pm}. \tag{11}$$

Теорема 12. *Пусть Δ — измеримое множество из $\mathbf{R}$ и $d(\Delta, \sigma) = d > 0$. Тогда 1) операторы $W_{\pm}(\Delta)$ и $Z_{\pm}(\Delta)$ осуществляют подобие операторов $LP(\Delta)$ и $L_1 P_1(\Delta)$ ($P_1(\Delta)$ — спектральная мера оператора*

$$L_1 - P_1(\Delta) = U^* \chi_{\Delta}(S) U)\ LP(\Delta) = W_{\pm}(\Delta) L_1 P_1(\Delta) Z_{\pm}(\Delta), \ Z_{\pm}(\Delta) W_{\pm}(\Delta) = P_1(\Delta),$$

$$W_{\pm}(\Delta) Z_{\pm}(\Delta) = P(\Delta); \ 2)\ (W_{\pm}(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} = (P_1(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} (AR_1(\lambda + i0) -$$

$$- AR_1(\lambda - i0))f,\ BR(\lambda \mp i0)^* g)_{\widehat{\mathfrak{H}}} d\lambda,\ (Z_\pm(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} = (P_1(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Delta (AR(\lambda \pm i0) f, \quad (BR_1(\lambda + i0)^* - BR_1(\lambda - i0)^*) g)_{\widehat{\mathfrak{H}}} d\lambda \ f, \quad g \in \mathfrak{H}.$$

Доказательство получается из результатов работы [4].

Следствие 13.

$$W_\pm(\Delta) = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itLP(\Delta)} P(\Delta)\, e^{-itL_1P_1(\Delta)}$$

$e^{-itL_1P_1(\Delta)}$ и $e^{itLP(\Delta)}$—сильно непрерывные группы, для которых $iL_1P_1(\Delta)$ и $iLP(\Delta)$ являются производящими операторами. Следовательно, $W_\pm(\Delta)$ — волновые операторы.

Теорема 14. *Если у оператора $L \supset L_1 + B^*A$ отсутствуют спектральные особенности на непрерывном спектре и дискретный спектр оператора конечен, то оператор L при условии* (1) *спектрален в смысле Данфорда—Бэйда.*

1. *Сыроид И. П.* Задача о несамосопряженном возмущении непрерывного спектра для оператора Дирака.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, 2, с. 122—126.
2. *Като Т.* Волновые операторы и подобие для некоторых несамосопряженных операторов.— Математика, 1974, 18, 3, с. 60—80.
3. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1954, 3, с. 181—270.
4. *Сыроид И. П.* Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра с условиями гладкости и почти — гладкости.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 115—116.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
25.03.80