УДК 517.5

А. А. Лигун, В. Ф. Сторчай

Об асимнтотически наилучших квадратурных формулах на классах дифференцируемых функций

Введем в рассмотрение квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 x(t)\,z(t)\,dt \approx \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\rho} p_k x^{(\nu)}(t_k) \stackrel{\Delta}{=} L(x), \tag{1}$$

где точки $t_k \in [0,\ 1]$, $t_0 = 0$, $t_n = 1$, $k = \overline{0,\ n}$ — узлы квадратурной формулы, а числа p_k — коэффициенты. Функция $z(t)$ предполагается фиксированной и называется весом. Для каждой функции $x(t)$ погрешность формулы определяется так:

$$R_\rho(x,\ \Delta_n,\ z) = \left| \int_0^1 x(t)\, z(t)\, dt - L(x) \right|,$$

где Δ_n — разбиение отрезка $[0,\ 1]$ точками t_k, $k = \overline{0,\ n}$. Величина $R_\rho(\mathfrak{M},\ \Delta_n,\ z) = \sup\{R_\rho(x,\ \Delta_n,\ z) \mid x \in \mathfrak{M}\}$, называется погрешностью формулы (1) на классе функций $\mathfrak{M}$. Выражение вида

$$S(x,\ t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\rho} x^{(\nu)}(t_k)\, l_{k,\nu}(t), \tag{2}$$

где $l_{k,\nu}(t)$ — некоторые фиксированные функции, называют сумматорной формулой. Каждая сумматорная формула вида (2) порождает квадратурную формулу

$$\int_0^1 x(t)\, z(t)\, dt \approx \int_0^1 S(x,\ t)\, z(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\rho} x^{(\nu)}(t_k) \int_0^1 l_{k,\nu}\, z(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\rho} p_k x^{(\nu)}(t_k),$$

где $p_k = \int_0^1 l_{k,\nu}(t)\, z(t)\, dt$.

Пусть $\Delta_n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0,\ 1]$, $h_{i,n} = t_{i,n} - t_{i-1,n}$, $\delta_\mu = \{0 = \tau_0 < \tau_1 \ldots < \tau_\mu = 1\}$ — фиксированное разбиение отрезка $[0,\ 1]$ такое, что $\tau_j = 1 - \tau_{\mu-j}$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mu$. Обозначим через $\Delta_{n,\mu}$ разбиение отрезка $[0,\ 1]$ точками $t_{i,j,n} = t_{i,n} + (t_{i,n} - t_{i-1,n})\tau_j$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mu$, и положим для $r = 1,\ 2,\ \ldots$ и $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$, $\mu = |r + 1 - 2k| + 1$.

При $k \leqslant (r+1)/2$ для функции $x \in C^{r-k}$ интерполяционным эрмитовым локальным сплайном порядка r дефекта k будем называть функцию $s_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu},\ t)$, которая определяется однозначно следующими условиями:

1) на каждом из интервалов $(t_{i,j-1,n},\ t_{i,j,n})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots\ n$; $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu$, он является алгебраическим многочленом степени не выше r;

2) на каждом из интервалов $(t_{i-1,n},\ t_{i,n})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, сплайн $S_{r,k} \times (x;\ \Delta_{n,\mu},\ t)$ имеет $r - 1$ непрерывную производную;

3) $s_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu},\ t_{i,n}) = x^{(\nu)}(t_{i,n})$, $\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ r - k$.

При $k \geqslant (r+1)/2$ для функции $x \in C^{r-k}$ интерполяционным эрмитовым локальным сплайном порядка r дефекта k назовем функцию $s_{rk}(x;\ \Delta_{n,\mu},\ t)$, однозначно определяющуюся условиями:

1) на каждом из интервалов $(t_{i-1,n},\ t_{i,n})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, она является алгебраическим многочленом степени не выше r;

2) $s_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu},\ t_{i,j,n}) = x(t_{i,j,n})$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \mu$;

3) $s_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu},\ t_{i,n}) = x^{(\nu)}(t_{i,n})$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ r - k$.

Вопросы существования и единственности сплайнов рассмотрены в работах [1—3]. Кроме того, в [3] показано, что если $k \leqslant (r+1)/2$, то для $t \in (t_{i-1,n},\ t_{i,n})$

$$s_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu},\ t) = \sum_{\nu=0}^{r-k} h_{i,n}^{\nu} x^{(\nu)}(t_{i-1,n})\, H_{k,\nu}\left(\frac{t - t_{i-1,n}}{h_{i,n}}\right) + \sum_{\nu=0}^{r-k} (-h_{i,n})^{\nu} x^{(\nu)}(t_{i,n})\, H_{k,\nu}\left(\frac{t_{i,n} - t}{h_{i,n}}\right), \tag{3}$$

где $H_{k,\nu}(t)$ — сплайн-функция порядка r дефекта 1 по разбиению δ_μ, однозначно определяющаяся условиями $H_{k,\nu}^{(l)}(0) = \delta_{l,\nu}$, $l,\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-k$, $H_{k,\nu}^{(l)}(1) = 0$, $l,\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-k$ ($\delta_{l,\nu}$ — символ Кронекера).

Из представления (3) следует, что при $k \leqslant (r+1)/2$ сплайн $s_{r,k}(x;\, \Delta_{n,\mu},\, t)$ порождает квадратурную формулу вида (1), у которой $t_k = t_{k,n}$, $k = \overline{0, n}$, $p_k = g_{k,\nu} + \bar{g}_{k,\nu}$, где

$$\bar{g}_{0,\nu} = 0, \quad g_{n+1,\nu} = 0,$$

$$g_{k,\nu} = h_{k,n}^{\nu} \int\limits_{t_{k-1,n}}^{t_{k,n}} H_{k,\nu}\left(\frac{t - t_{k-1,n}}{h_{k,n}}\right) z(t)\, dt,$$

$$\bar{g}_{k,\nu} = (-h_{k,n})^{\nu} \int\limits_{t_{k-1,n}}^{t_{k,n}} H_{k,\nu}\left(\frac{t_{k,n} - t}{h_{k,n}}\right) z(t)\, dt.$$

При $r = 2m - 1$, $k = m$, квадратурные формулы такого вида рассматривались в работах [4, 5].

Пусть L_p^r, $r = 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty]$, — множество всех функций x, у которых $x^{(r-1)}$ $(x^0 = x)$ — абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $x^{(r)} \in L_p$, и $W_p^r = \{x : x \in L_p^r,\ \| x^r \|_p \leqslant 1\}$.

В работе [1] доказано, что при $n, r = 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots, r$ для любых функций $x, y \in L_1^{r+1}$ справедливы равенства

$$\int\limits_0^1 (x(t) - s_{r,k}(x;\, \Delta_{n,\mu},\, t))\, y^{(r+1)}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{r+1} \int\limits_0^1 (y(t) - s_{r,r-k+1}(y;\, \Delta_{n,\mu},\, t))\, x^{(r+1)}(t)\, dt. \tag{4}$$

Полагая в этом равенстве $y(t) = t^{r+1}/(r+1)!$, получаем

$$R(x;\, \Delta_n,\, 1) = \int\limits_0^1 (x(t) - s_{r,k}(x;\, \Delta_{n,\mu},\, t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{(r+1)!} \int\limits_0^1 (t^{r+1} - s_{r,r-k+1}((\cdot)^{r+1};\, \Delta_{n,\mu} t)\, x^{r+1}(t))\, dt.$$

Поэтому

$$R(W_p^{r+1} \Delta_{n,\mu} 1) = \frac{1}{(r+1)!} \| (\cdot)^{r+1} - s_{r,r-k+1}((\cdot)^{r+1},\, \Delta_{n,\mu}) \|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Учитывая теперь, что для $k \leqslant (r+1)/2$ и $t \in [t_{i-1,n},\, t_{i,n}]$

$$\frac{1}{(r+1)!} (t^{r+1} - s_{r,r-k+1}((\cdot)^{r+1},\, \Delta_{n,\mu},\, t) = h_{i,n}^{r+1} \omega_{r,k}\left(\delta_\mu,\, \frac{t - t_{i-1,n}}{h_{i,n}}\right),$$

где

$$\omega_{r,k}(\delta_\mu,\, t) = \frac{1}{(r+1)!} (t(1-t))^{r+1-k} \prod_{j=1}^{\mu-1} (t - \tau_j),$$

получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $n, r = 1, 2, \ldots, k \leqslant (r+1)/2$, $p \in [1, \infty]$. *Тогда* $R(W_p^{r+1},\, \Delta_n,\, 1) = \| \omega_{r,k}(\delta_\mu) \| q \| h_{i,n} \|_{r,q}$, *где*

$$\| h_{i,n} \|_{r,q} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} h_{i,n}^{(r+1)q+1}\right)^{1/q}, & q \in [1, \infty),\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_{i,n}^{r+1}, & q = \infty, \end{cases}$$

и, следовательно, $\inf R(W_p^{r+1},\, \Delta_n,\, 1) = \| \omega_{r,k}(\delta_\mu) \|_q n^{-(r+1)}$.

При $r=2m-1$, $k=m$ этот результат ранее был получен в [4]. Для произвольного веса точно решить задачу об оптимальном выборе узлов квадратурной формулы, как это сделано в теореме 1, невозможно. Поэтому мы рассмотрим задачу об асимптотически оптимальном выборе узлов.

Последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть асимптотически наилучшей для класса $\mathfrak{M}$ и веса z, если при $n\to\infty$

$$\inf_{\Delta_n} R(\mathfrak{M}, \Delta_n, z) = R(\mathfrak{M}, \Delta_n^* z)(1+o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть $r=1, 2, \ldots, k\leqslant (r+1)/2$, $p\in[1, \infty]$. Тогда для любого непрерывного и положительного на $[0, 1]$ веса $z(t)$ и для класса W_p^{r+1} асимптотически оптимальный набор узлов квадратурной формулы (1), соответствующей сплайнам $s_{r,k}(x, \Delta_{n,\mu}, t)$, определяется из равенств*

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (z(t))^{\frac{1}{r+1+q^{-1}}}\, dt = \frac{i}{n}\int_0^1 (z(t))^{\frac{1}{r+1+q^{-1}}} dt, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{5}$$

При этом погрешность асимптотически оптимальной квадратурной формулы на классе W_p^{r+1} равна

$$\|\omega_{r,k}(\delta_\mu)\|_q n^{-(r+1)}\left(\int_0^1 z(t)^{\frac{1}{r+1+q^{-1}}} dt\right)^{r+1+q^{-1}} + O(n^{-(r+1)}).$$

Доказательство. Обозначим через $z_{r+1}(t)$ $(r+1)$-й интеграл (любой) от функции $z(t)$. Тогда в силу равенства (4)

$$R(x;\ \Delta_n, z) = \int_0^1 (x(t) - s_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu}, t))\, z(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{r+1}\int_0^1 (z_{r+1}(t) - s_{r+1-k}(z_{r+1};\ \Delta_{n,\mu}, t))\, x^{(r+1)}(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$R(W_p^{r+1}, \Delta_n, z) = \| z_{r+1} - s_{r,r+1-k}(z_{r+1}, \Delta_{n,\mu} \|_q. \tag{6}$$

В работе [3] доказано, что если функция $z(t)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$, то при $n\to\infty$

$$\inf_{\Delta_n} \| z_{r+1} - s_{r,r+1-k}(z_{r+1}, \Delta_{n,\mu} \|_q = \frac{\|\omega_{r,k}(\delta_\mu)\|_q}{n^{r+1}} \times$$
$$\times \left(\int_0^1 (z(t))^{\frac{1}{r+1+q^{-1}}} dt\right)^{r+1+q^{-1}} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

причем асимптотически оптимальный набор узлов определяется из равенств (5). Отсюда и из (6) немедленно следует справедливость теоремы 2.

1. *Лигун А. А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций.— Укр. мат. журн., 32, № 4, с. 507—514.
2. *Пахнутов И. А.* Сходимость сплайнов с дополнительными узлами.— Методы сплайн-функций.— Вычисл. системы, 1975, вып. 72, с. 96—129.
3. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 6, с. 814—820.
4. *Великин В. Л.* Эрмитовы сплайны и связанные с ними квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функций.— Изв. вузов СССР. Математика, 1976, № 5, с. 15—18.
5. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и их приложения.— М. : Мир, 1972.— 316 с.

Днепродзержинский индустриальный институт
Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию 06.01.81; после переработки — 26.04.82