УДК 517.54:513.83

О. В. Иванов

Об одной теореме И. М. Гельфанда

В [1] установлено (теорема о «короне»), что пространство максимальных идеалов M_{H^∞} алгебры H^∞ ограниченных аналитических в круге $Q = \{z : |z| < 1\}$ функций является бикомпактным расширением $b_{H^\infty}Q$ круга Q. В этой статье доказывается, что $b_{H^\infty}Q$ — конформно-инвариантное бикомпактное расширение [2].

Для этого нам потребуется одно добавление к известной теореме И. М. Гельфанда [3] о соотношении между бикомпактификациями вполне регулярного топологического пространства X и замкнутыми подалгебрами алгебры ограниченных непрерывных функций на X.

Введем необходимые обозначения. Пусть X — вполне регулярное локально-бикомпактное топологическое пространство. Обозначим через $CB(X)$ алгебру ограниченных непрерывных комплексных функций на X. $CB(X)$ — коммутативная банахова алгебра относительно нормы $\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Сформулируем следующие условия.

I) Семейство F комплексных функций на X называется самосопряженным, если из $f \in F$ следует $\bar{f} \in F$.

II) Семейство F называется разделяющим точки, если для любых точек $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, найдется такая функция $f \in F$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

III) Семейство F называется разделяющим точки и замкнутые множества, если для любого замкнутого множества $E \subseteq X$ и любой точки $x_0 \in X \setminus E$ найдется функция $f \in X$ такая, что $f(x_0) \notin \overline{f(E)}$.

Теорема Гельфанда. *Существует биекция между множеством всех бикомпактных расширений пространства X и множеством $R(X)$ всех замкнутых подалгебр алгебры $CB(X)$, содержащих константы и удовлетворяющих условиям* I) — III). *Кроме того, если алгебры $B_1, B_2 \in R(x)$ и*

$B_i \leftrightarrow B_{B_i}(X)$, $i=1,2$, то $B_1 \subseteq B_2$ тогда и только тогда, когда $b_{B_1}X \leqslant \leqslant b_{B_2}X$.

Заметим, что соответствие $B \to b_B X$ строится здесь с помощью гомеоморфизма $\tau(x) = \varphi_x$, где φ_x — гомеоморфизм алгебры B вида $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in B$, пространства X на всюду плотное подмножество пространства максимальных идеалов M_B алгебры B.

Теорему Гельфанда нельзя применить в том случае, когда алгебра B не удовлетворяет условию I). Проблема «короны» [1] как раз и состояла в доказательстве того, что для алгебры H^∞, не удовлетворяющей условию I), образ X при гомеоморфизме τ будет всюду плотным подмножеством M_{H^∞}.

Легко показать (см., напр., [4, с. 158]), что для произвольных замкнутых подалгебр $CB(X)$, удовлетворяющих условиям II) и III), τ будет гомеоморфизмом X на некоторое подмножество из M_B (не обязательно всюду полное в M_B!). Для дальнейшего рассмотрения необходимо ознакомиться с понятием равномерного пространства [5] (см. также [2]).

Теорема 1. *Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $CB(X)$, содержащая константы и удовлетворяющая условиям II), III), а гомеоморфизм $\tau(X) = \varphi_x$, где $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in A$, отображает X на всюду плотное подмножество пространства максимальных идеалов M_A алгебры A. Тогда бикомпактное расширение $b_A X$, определяемое вложением $\tau : X \to M_A$, является пополнением $(\widehat{X, U_A})$ равномерного пространства (X, U_A) по равномерной структуре U_A, порождаемой семейством псевдометрик $\{\rho_f\}_{f\in A}$, где $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$.*

Доказательство. С помощью гомеоморфизма $\tau \times \tau : X \times \times X \to \tau(X) \times \tau(X)$ перенесем равномерную структуру пространства $\tau(X) \subseteq M_A$, порождаемую равномерной структурой бикомпакта M_A, на X и обозначим ее через U_A. Так как $\tau(X)$ всюду плотно в бикомпакте M_A, то U_A — предкомпактная равномерная структура. Значит, пополнение $(\widehat{X, U_A})$ — бикомпактное расширение X. Остается показать, что U_A порождается семейством псевдометрик $\{\rho_f\}$, $f \in A$, где $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

Элементы фундаментальной системы окружений равномерной структуры $U(\tau(X)) \stackrel{\text{def}}{=} U(M_A)_{\tau(X)}$ имеют вид $\{(\varphi_x, \varphi_y) : |\varphi_x(f_j) - \varphi_y(f_j)| < \varepsilon\}_{f_j \in S}$, где S — произвольное конечное подмножество алгебры A. Действительно, окружениями равномерной структуры $U(M_A)$ (M_A — бикомпакт!) являются всевозможные окрестности диагонали из $M_A \times M_A$ и только они, а $\tau(X) \subseteq M_A$ по определению состоит из гомеоморфизмов вида $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in A$; $x \in X$. Следовательно, так как $\tau : X \to \tau(X)$ — гомеоморфизм, то элементы фундаментальной системы окружений равномерной структуры U_A имеют вид $\{(x, y) : |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon\}_{f_j \in S}$, где S — произвольное конечное подмножество алгебры A, т. е. U_A порождается семейством псевдометрик $\{\rho_f\}_{f\in A}$, где $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

В силу теоремы Карлесона [1] вложение $\tau : Q \to M_{H^\infty}$ определяет бикомпактное расширение $b_{H^\infty} Q$ круга Q. Напомним, что бикомпактное расширение bD плоской односвязной области D называется конформно-инвариантным бикомпактным расширением [2], если любой конформный автоморфизм $\varphi : D \to D$ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{\varphi} : bD \to bD$.

Теорема 2. *Бикомпактное расширение $b_{H^\infty} Q$ является конформно-инвариантным бикомпактным расширением.*

Доказательство. По теореме 1 $B_{H^\infty} Q = (\widehat{Q, U_{H^\infty}})$. Поэтому для доказательства теоремы, очевидно (см. [2]), достаточно показать, что если $\varphi : Q \to Q$ — произвольное конформное отображение, то $\varphi : (Q, U_{H^\infty}) \to (Q, U_{H^\infty})$ — равномерно-непрерывно как отображение равномерных пространств. Указанная равномерная непрерывность следует из совпадения равномерных структур U_{H^∞} и $U_{H^\infty \circ \varphi^{-1}}$, где $H^\infty \circ \varphi^{-1} = \{f \circ \varphi^{-1}\}$, $f \in H^\infty$ так как $H^\infty \circ \varphi^{-1} \equiv H^\infty$.

1. *Carleson L.* Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem.— Ann. Math., 1962, **76**, N 3, p. 547—559.
2. *Иванов О. В., Суворов Г. Д.* Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области.— Киев : Наук. думка, 1982.— 200 с.
3. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.— М. : Физматгиз, 1960.— 287 с.
4. *Келли Дж. Л.* Общая топология.— М. : Наука, 1968.— 384 с.
5. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии.— М. : Наука, 1975.— 408 с.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редакцию
03.11.81