УДК 512

Ю. Г. Леонов (Одес. нац. акад. связи)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУПП, АППРОКСИМИРУЕМЫХ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ

Faithful triangular representations of finite Kaloujnine p-groups are presented. This allows us to obtain a triangular representation of the projective limit P_p of groups $P_{p,n}$. The obtained representation is studied by using a language of matrix templates specially developed for this purpose. As an example, we present a triangular representation of the well-known self-similar Gupta – Sidki 3-group.

Наведено точні трикутні зображення скінченних p-груп Калужніна $P_{p,n}$ над полем із p елементів. Це дозволяє отримати трикутне зображення проективної границі P_p груп $P_{p,n}$. Отримане зображення вивчається за допомогою розробленої для цього мови шаблонів матриць. Як приклад наведено трикутне зображення відомої самоподібної 3-групи Гупта – Сідкі.

1. Введение. Конечнократные сплетения циклической группы простого порядка p на себя и группы унитреугольных матриц $UT_n(p)$ над полем $\mathbb{Z}_p$ из p элементов являются универсальными по вложению объектами в классе конечных p-групп, т. е. каждая конечная p-группа допускает точное представление как элементами такого сплетения, так и унитреугольными матрицами определенной размерности. В зависимости от задачи естественным может быть какое-то одно из этих представлений. Поэтому важно уметь представлять указанные сплетения унитреугольными матрицами, а группы $UT_n(p)$ погружать в такие сплетения. Вложения группы $UT_n(p)$ в сплетение

$$\wr_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p^{(i)} = P_{p,n}$$

легко просматривается и хорошо известно [1]. Будем называть группы $P_{p,n}$ группами Калужнина.

В работе [2] получено точное треугольное представление группы Калужнина $P_{2,n}$ над полем из двух элементов. Данное представление $f_n\colon P_{2,n} \to UT_m(2)$ устанавливалось при $m = 2^n + 1$, и это m является наименьшим с таким свойством. Последовательность представлений $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ согласованы между собой, и это позволило в той же работе получить представление проективного предела P_2 групп $P_{2,n}$ в группу бесконечномерных унитреугольных матриц $UT(2)$.

Целью данной работы является построение точного треугольного представления групп Калужнина $P_{p,n}$ для всех простых p. Следуя работе [2], мы также получим представление проективного предела P_p групп $P_{p,n}$ в группу бесконечномерных унитреугольных матриц $UT(p)$. Отметим, что впервые о подобных представлениях шла речь еще в работе [3]. В качестве примера полученных отображений мы демонстрируем вложение известной группы автоморфизмов регулярного корневого 3-дерева — 3-группы Гупта – Сидки в группу $UT(3)$.

2. Точные треугольные представления групп $P_{p,n}$ и их свойства. Рассмотрим n-кратное сплетение групп порядка p — группу $P_{p,n}$, согласно [1]. Каждый элемент $y \in P_{p,n}$ представим как таблицу вида

$$y = \big[y_0, y_1(t_1), \ldots, y_k(t_1, \ldots, t_k), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_n)\big].$$

Здесь на k-м, $k = 0, 1, \ldots, n$, месте в таблице стоят многочлены $y_k(t_1, \ldots, t_k)$, которые являются представителями минимальной степени классов смежности кольца многочленов $\mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k]$ по модулю идеала, порожденного многочленами вида $t_1^p - t_1, \ldots, t_n^p - t_n$. Такие многочлены назовем редуцированными. Каждый одночлен кольца редуцированных многочленов $\mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k]$ имеет вид $\alpha \cdot t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$, где $\alpha, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}_p$. Высотой такого одночлена назовем число

$$h(\alpha \cdot t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}) = 1 + \sum_{s=1}^{n} b_s \cdot p^{s-1}.$$

Одночлен высоты j с коэффициентом $\alpha = 1$ обозначим через $t(j)$. Любой многочлен кольца редуцированных многочленов $\mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_k]$ может быть однозначно представлен в виде суммы одночленов попарно разных высот следующим образом:

$$y_k(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{j=1}^{p^k} y_{k,j} t(j), \tag{1}$$

где $t(j)$ — одночлен высоты j, $t(1) = 1$. Высотой многочлена называется наибольшая из высот одночленов в сумме (1) с ненулевым коэффициентом.

Для построения точного треугольного представления группы $P_{p,n}$ над полем из p элементов укажем мономорфизм группы $P_{p,n}$ в группу нижних треугольных матриц $UT_{p^n+1}(p)$ по аналогии с работой [2] (в несколько иных обозначениях). Определим действие таблицы $y \in P_{p,n}$ на многочлен g высоты j. Для данных n и g составим таблицу элемента $\bar{g}$ в сплетении следующим образом. Первые n координат таблицы выберем нулевыми, а последнюю координату возьмем равной g. Легко видеть, что определение корректно и $\bar{g} \in P_{2,n}$. Рассмотрим элемент $\bar{g}^y = y^{-1} \cdot \bar{g} \cdot y$. Все координаты его таблицы нулевые, кроме, быть может, последней. Многочлен, являющийся последней координатой, обозначим g^y. Из определения видно, что высота многочлена $h(g)$ совпадает с высотой $h(g^y)$. Будем говорить, что многочлен g^y получен действием элемента y на многочлен g.

Определим отображение $f_{p,n}\colon P_{p,n} \to UT_{p^n+1}(p)$. А именно, высота многочлена в последней координате таблицы $y \in P_{p,n}$ ограничена числом p^n. Рассмотрим одночлены $t(k)$ высоты $k = 1, 2, \ldots, p^n + 1$ и многочлены

$$t(k)^y = \sum_{j=1}^{k} u_{k,j} \cdot t(j).$$

Возьмем квадратную матрицу $U = U(y)$ размерности $p^n + 1$ с условием

$$U(y)_{k,j} = \begin{cases} 0, & k < j, \\ u_{k,j}, & k \geq j. \end{cases} \tag{2}$$

Из определения видно, что $U(y)_{i,i} = u_{i,i} = 1$ для любой таблицы y. Отображение $f_{p,n}$ определим равенством $f_{p,n}(y) = U(y)$. Из определения видно, что отображение $f_{p,n}$ задано корректно. Отображение $f_{p,n}$ впервые встречается в несколько иной форме в [3].

Теорема 1. *При любом $n \geq 1$ определенное выше отображение*

$$f_{p,n}\colon\ P_{p,n} \to UT_{p^n+1}(p)$$

является мономорфизмом. Не существует изоморфных вложений группы $P_{p,n}$ в группу унитреугольных матриц над $\mathbb{Z}_p$ меньших размерностей.

Доказательство. Покажем, что

$$f_{p,n}(y \cdot z) = f_{p,n}(y) \cdot f_{p,n}(z)$$

для любых $y, z \in P_{p,n}$. Рассмотрим $t(k)^{(y \cdot z)} = \left(t(k)^y\right)^z$. Расписывая левую часть по определению, имеем

$$\sum_{s=1}^{p^n+1} f_{p,n}(y \cdot z)_{k,s} \cdot t(s)$$

(ясно, что $f_{p,n}(y \cdot z)_{k,s} = 0$ при $k < s$). Рассмотрим теперь правую часть:

$$\left(\sum_{j=1}^{p^n+1} f_{p,n}(y)_{k,j} \cdot t(j)\right)^z = \sum_{j=1}^{p^n+1} \left(f_{p,n}(y)_{k,j} \cdot t(j)\right)^z =$$

$$= \sum_{j=1}^{p^n+1} \left(f_{p,n}(y)_{k,j} \cdot \sum_{s=1}^{p^n+1} f_{p,n}(z)_{j,s} \cdot t(s)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{p^n+1} \left(\sum_{j=1}^{p^n+1} f_{p,n}(y)_{k,j} \cdot f_{p,n}(z)_{j,s}\right) \cdot t(s).$$

Мы показали, что

$$f_{p,n}(y \cdot z)_{k,s} = \sum_{j=1}^{p^n+1} f_{p,n}(y)_{k,j} \cdot f_{p,n}(z)_{j,s} \quad \text{для всех} \quad k, s.$$

Следовательно, матрицы $f_{p,n}(y \cdot z)$ и $f_{p,n}(y) \cdot f_{p,n}(z)$ совпадают.

Для доказательства инъективности возьмем одночлены вида $t(1 + p^l) = t_{l+1}$, $l \geq 0$. Рассмотрим многочлен t_{l+1}^y и заметим, что справедливо равенство $f_{p,n}(y)_{i,1+p^l} = y_{l,i}$ для всех $i = 1, \ldots, p^l$. Отсюда следует инъективность отображения f_n.

Последнее утверждение теоремы следует из того, что класс нильпотентности группы $P_{p,n}$ равен p^n (см., например, [4]), а класс нильпотентности группы $UT_m(p)$ равен $m - 1$.

Теорема 1 доказана.

Из определения произведения таблиц сплетений ясно, что многочлен $t(j)^y$ не зависит от фиксированного числа n. Пусть $\tau_{n,m}(p)\colon P_{p,n} \to P_{p,m}$ — гомоморфизм, который убирает лишние координаты в таблицах при $n > m$ и дописывает необходимые нулевые координаты в случае $n < m$. Действие y на $t(j)$ можно определить в сплетении $P_{p,m}$, $m = [\log_p(j + 1)]$, положив $t(j)^y = t(j)^{\tau_{n,m}(p)(y)}$.

Система мономорфизмов $\tau_{n+1,n}(p)$, $n = 0, 1, \ldots$, позволяет рассмотреть естественный проективный (обратный) предел P_p групп $P_{p,n}$. Элементы группы P_p можно рассматривать в виде (неограниченной) последовательности редуцированных многочленов $y = \left[y_0, y_1(t_1), y_2(t_1, t_2), \ldots\right]$ по аналогии с таблицами конечных групп Калужнина.

На основании изложенного можно утверждать, что система мономорфизмов

$$f_{p,n}\colon\ P_{p,n} \to UT_{p^n+1}(p), \quad n \in \mathbb{N},$$

определяет мономорфизм

$$f_p\colon\ P_p \to UT(p),$$

где $UT(p)$ — группа бесконечномерных унитреугольных матриц над полем из p элементов. Строки и столбцы матриц этой группы будем индексировать натуральными числами. При этом для произвольной таблицы $y \in P_p$ матрица $U = f_p(y)$ определяется по той же формуле (2).

3. Шаблоны матриц. В предыдущем пункте мы указали представление группы P_p бесконечными унитреугольными матрицами из $UT(p)$. В этом пункте мы укажем удобный язык для работы с матрицами из $UT(p)$, который назовем языком шаблонов матриц. Мы увидим, что вложения $f_p(y)$ для $y \in P_p$ имеют естественный вид в терминах шаблонов матриц. Впервые шаблоны рассматривались в работе [2] при $p = 2$.

Пусть $M(p)$ — множество матриц над кольцом $\mathbb{Z}_p$, строки и столбцы которых индексируются натуральными числами, с элементами над главной диагональю, равными 0. Очевидно, что $UT(p) \subset M(p)$. Рассмотрим также подмножество $M^0(p)$ множества $M(p)$, состоящее из матриц с нулями на главной диагонали. На множестве $M(p)$ естественным образом задается операция произведения матриц.

Для некоторого натурального n рассмотрим множество $SH_n(p)$ квадратных матриц размерности n, элементы которых являются в свою очередь матрицами. А именно, будем требовать для любого $U \in SH_n(p)$, чтобы

$$U_{i,j} \in \begin{cases} UT(p), & i = j, \\ M^0(p), & i < j, \\ M(p), & i > j. \end{cases} \tag{3}$$

Введем на множестве $SH_n(p)$ стандартную операцию произведения матриц размерности n. Для удобства дальнейших рассуждений будем вести нумерацию строк и столбцов матриц во множестве $SH_n(p)$, начиная с 0.

Утверждение 1. *Множество $SH_n(p)$ относительно стандартной операции произведения матриц размерности n является группой, изоморфной группе $UT(p)$.*

Доказательство. Между множествами $UT(p)$ и $SH_n(p)$ можно установить биекцию sh_n, которая продолжается до изоморфизма. Действительно, для матрицы $u \in UT(p)$ с элементами $u_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$ рассмотрим отображение $sh_n\colon u \mapsto U$, при котором матрица $U_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$U_{i-1,j-1} = \begin{pmatrix} u_{i,j} & u_{i,j+n} & u_{i,j+2n} & \cdots \\ u_{i+n,j} & u_{i+n,j+n} & u_{i+n,j+2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Другими словами, $(U_{i-1,j-1})_{k,l} = u_{i+(k-1)n,j+(l-1)n}$. Легко видеть, что так определенная матрица U лежит во множестве $M(p)$ и отображение sh_n является биекцией. Согласованность матричных произведений проверяется непосредственно.

Утверждение 1 доказано.

Матрицу $U = sh_n(u)$ будем называть шаблоном матрицы u размерности n. Язык шаблонов оказывается удобным при изучении представлений финитно-аппроксимируемых подгрупп группы P_p. Далее в работе будем рассматривать шаблоны размерности $n = p$.

Обозначим $a = [1, 0, 0, \ldots] \in P_p$. Пусть E — нейтральный элемент мультипликативной группы $UT(p)$, $\binom{j}{i}$ — бином Ньютона по модулю p. Будем полагать $\binom{j}{i} = 0$ при $j < i$. Для $M \in M(p)$ и $x \in \mathbb{Z}_p$ под матрицей $x \cdot M$ подразумеваем матрицу со свойством $(x \cdot M)_{i,j} = x \cdot M_{i,j}$ для $i, j \in \mathbb{Z}_p$. Для натурального c и $k \leq 2^c - 1$ рассмотрим p-адическую последовательность длины c: $k\,\big|_p^c = k_c \ldots k_1$, удовлетворяющую равенству

$$k = \sum_{s=1}^{c} k_s \cdot p^{s-1}$$

(индексация последовательности ведется справа налево и начинается с единицы). Обозначим через $\overline{sh}_p \colon P_p \to SH_p(p)$ композицию отображений $sh_p \circ f_p$.

Лемма 1. *Пусть* $A(j) = \overline{sh}_p(a^j)$. *Тогда* $A(j)_{b,s} = \binom{b}{s} j^{b-s} \cdot E$ *для всех* $0 \leq b$, $s \leq p - 1$.

Доказательство. Установим утверждение по определению представления f_p элемента a. Заметим, что для любого $y_n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}_p[t_1, \ldots, t_n]$ выполняется $y_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)^{a^j} = y_n(t_1 + j, t_2, \ldots, t_n)$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Как следует из определения, для одночлена $t(k) = t_1^{k_1} \ldots t_c^{k_c}$ выполняется соотношение $(k-1)\,\big|_p^c = k_c \ldots k_1$, $k_1, \ldots, k_c \in \mathbb{Z}_p$ для некоторого подходящего c.

Таким образом, при $k \equiv 1 \pmod p$ одночлен $t(k)$ не содержит множитель t_1 и, следовательно, $t(k)^{a^j} = t(k)$ для всех $0 \leq j \leq p - 1$. Пусть теперь $k \not\equiv 1 \pmod p$. Тогда $1 \leq k_1 \leq p - 1$, $t(k)^{a^j} = (t_1 + j)^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_c^{k_c}$ и

$$(t_1 + j)^{k_1} = \sum_{s=0}^{k_1} \binom{k_1}{s} j^{k_1 - s} t_1^s$$

(здесь мы полагаем $0^0 = 1$). Отсюда следует, что матрица $f_p(a^j)$ имеет следующее строение: в строках с номерами $k \equiv 1 \pmod p$ единственный ненулевой элемент — это $f_p(a^j)_{k,k} = 1$. Для строки с номером $k \not\equiv 1 \pmod p$ в столбце с номером $l \leq k$ с условием $(l-1)\,\big|_p^c = k_c \ldots k_2 s$ будет находиться элемент поля $\mathbb{Z}_p$, равный коэффициенту при одночлене $t_1^s t_2^{k_2} \ldots t_c^{k_c}$ в многочлене $t(k)^{a^j}$. Следовательно, $f_p(a^j)_{k,l} = \binom{k_1}{s} j^{k_1 - s}$. Как видно из определения представления, для остальных l выполняется $f_p(a^j)_{k,l} = 0$. Принимая во внимание определение шаблона матрицы $f_p(a^j)$ и учитывая нумерацию строк и столбцов в матрице $\overline{sh}_p(y)$, получаем утверждение леммы.

Данный результат показывает удобство использования языка шаблонов при описании образов вложения f_p. В частности, $\overline{sh}_p(a)_{b,s} = \binom{b}{s} \cdot E$.

Далее, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $k \equiv 1 \pmod p$, $t(k) = t_2^{k_2} \ldots t_c^{k_c}$ *и* $k = 1 + (i-1)p$, $i \geq 1$. *Тогда* $t(i) = t_1^{k_2} \ldots t_{c-1}^{k_c}$.

Доказательство. Утверждение следует из формулы для расчета высоты одночлена и того факта, что каждому натуральному числу соответствует единственный одночлен данной высоты.

Пусть $y \in P_p$, $y = [y_0, y_1(t_1), y_2(t_1, t_2), \dots]$. Определим ограничение $y|_x$ таблицы y вдоль пути $x \in \mathbb{Z}_p$, как таблицу

$$\left[y_0', y_1'(t_1), y_2'(t_1, t_2), \dots\right],$$

где $y_i'(t_1, \dots, t_i)$ получается из $y_{i+1}(t_1, \dots, t_{i+1})$ с помощью отображения φ_x, заданного на множестве переменных по правилу $t_1 \to x$, $t_i \to t_{i-1}$ при $i > 1$, и продолжающегося до гомоморфизма в кольце всех многочленов.

Известна интерпретация элемента сплетения y в виде автоморфизма корневого однородного (p)-дерева T_p. В такой интерпретации ограничение $y|_x$ является аналогом сужения действия автоморфизма дерева на поддерево с корневой вершиной с p-адическим кодом x. Покажем, что язык шаблонов позволяет рассматривать образ $f_p(y)$ элемента сплетения y с помощью образов сужений этого элемента $f_p(y\,|_x)$, $0 \le x \le p-1$. Похожая техника впервые использовалась в работе [2] при $p = 2$. Это свойство можно считать основным свойством шаблонов.

Теорема 2. *Существует набор элементов $R_{i,j,x} \in \mathbb{Z}_p$, $0 \le i, j, x \le p-1$, удовлетворяющий равенствам*

$$\overline{sh}_p(y)_{i,j} = \sum_{x=0}^{p-1} R_{i,j,x} \cdot f_p(y|_x)$$

для любых $y \in P_p$.

Доказательство. Данная теорема позволяет получить матрицу $f_p(y)$ по индукции, если известны представления $f_p(y|_x)$ сужений сплетения y.

Зафиксируем $y = [y_0, y_1(t_1), \dots] \in P_p$.

1. Пусть $y_0 = 0$. Докажем теорему для этого случая.

Рассмотрим шаблон

$$\overline{sh}_p(y) = \begin{pmatrix} Y_{0,0} & \dots & Y_{0,p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{p-1,0} & \dots & Y_{p-1,p-1} \end{pmatrix}.$$

1.1. Для натурального $k \not\equiv 1 \pmod p$ рассмотрим $t(k) = t_1^{k_1} \dots t_c^{k_c}$. Поскольку $k_1 \ne 0$ и $y_0 = 0$, многочлен $t(k)^y$ имеет вид

$$t(k)^y = t_1^{k_1} \cdot \prod_{u=2}^{c} \left(t_u + y_{u-1}(\bar{t}_{u-1})\right)^{k_u}.$$

Все слагаемые одночлены этого многочлена имеют множитель t_1 ненулевой степени в силу того, что $t_1^p = t_1$ в кольце редуцированных многочленов. Отсюда следует, что в этом многочлене нет слагаемых $t(k')$, $k' \equiv 1 \pmod p$ и столбец матрицы $f_p(y)$ с номером k' является нулевым. Следовательно, $Y_{i,0} = 0$ (здесь 0 — нулевая матрица), $1 \le i \le p-1$.

1.2. Получим описание матрицы $Y_{0,0}$. Рассмотрим $k \equiv 1 \pmod p$, $k = 1 + (i - 1)p$, $i \geq 1$, $(k-1)\big|_p^c = k_c \dots k_1$. Тогда $k_1 = 0$ и

$$t(k)^y = \prod_{u=2}^{c} \big(t_u + y_{u-1}(t_1, \dots, t_{u-1})\big)^{k_u} = \prod_{u=1}^{c-1} \big(t_{u+1} + y_u(t_1, \dots, t_u)\big)^{k_{u+1}}. \qquad (4)$$

Пусть $l \leq k$, $l \equiv 1 \pmod p$, $l = 1 + (j-1)p$ для некоторого $j \geq 1$, $t(l) = t_2^{l_2} \dots t_c^{l_c}$. Из утверждения 2 следует, что $t(i) = t_1^{k_2} \dots t_{c-1}^{k_c}$, $t(j) = t_1^{l_2} \dots t_{c-1}^{l_c}$. Допустим, что $z_{k,l} = f_3(y)_{k,l}$ — коэффициент при одночлене $t(l)$ в многочлене (4). Для данного y рассмотрим сужение вдоль 0: $y|_0 = [y_1(0), y_2(0, t_1), \dots]$. Тогда

$$t(i)^{y|_0} = \prod_{u=1}^{c-1} \big(t_u + y_u(0, t_1, \dots, t_{u-1})\big)^{k_{u+1}}. \qquad (5)$$

Из структуры произведений (4) и (5) видно, что коэффициент при одночлене $t(j)$ в многочлене (5) совпадает с коэффициентом $z_{k,l}$. Следовательно,

$$f_p(y)_{1+(i-1)p, 1+(j-1)p} = f_p(y|_0)_{i,j} \quad \text{для всех} \quad i, j \in \mathbb{N}$$

и

$$Y_{0,0} = \overline{sh}_p(y)_{0,0} = f_p(y|_0).$$

1.3. Мы нашли значения матриц первого столбца шаблона $\overline{sh}_p(y)$. Другими словами, мы получили p уравнений с неизвестными $Y_{i,0}$, $0 \leq i \leq p-1$. Рассмотрим множество матриц вида $B_{i,j} = \overline{sh}_p(y^{a^j})_{i,0} \in M(p)$. Очевидно, что $B_{i,0} = Y_{i,0}$. В силу равенства сужений $y^{a^j}\big|_0 = y|_j$ и рассуждений из предыдущего пункта имеем также равенства $B_{i,j} = 0$ при $i > 0$ и $B_{0,j} = f_p(y|_j)$ для всех j, $0 \leq j \leq p-1$. Лемма 1 дает описание матриц вида $\overline{sh}_p(y^{a^j}) = \overline{sh}_p(a^{-j}) \cdot \overline{sh}_p(y) \cdot \overline{sh}_p(a^j)$, откуда следует, что матрицы $B_{i,j}$ являются некоторыми линейными комбинациями матриц $\overline{sh}_p(y)_{k,l} = Y_{k,l}$. Получили систему p^2 уравнений (для каждой пары (i,j), $0 \leq \leq i, j \leq p-1$) из не более чем p^2 неизвестных вида $Y_{k,l}$. Покажем, что такая система имеет единственное решение. Для этого упорядочим матрицу коэффициентов при неизвестных $Y_{k,l}$ определенным образом. Пусть

$$\overline{sh}_p(a^j)_{i,0} = \sum_{u=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{p-1} D_{j+ip, s+up} \cdot Y_{u,s}, \qquad (6)$$

где $D_{k,l} \in \mathbb{Z}_p$ — соответствующие коэффициенты при неизвестных $Y_{u,s}$ в линейном разложении выражения $\overline{sh}_p(a^j)_{i,0}$, $k = j + ip$, $l = s + up$, $0 \leq i, j \leq p-1$. Образованная таким образом матрица коэффициентов $D = (D_{k,l})_{0 \leq k,l \leq p-1}$ и является предметом нашего исследования.

Покажем, что матрица D является невырожденной. В таком случае мы сможем получить единственное решение системы (6), а значит, найдем каждое $Y_{u,s}$ в виде линейного выражения ранее известных матриц $f_p(y|_j) = B_{0,j}$.

1.4. Из леммы 1 следует, что $\overline{sh}_p(a^{-j})_{b,s} = (-1)^{b+s}\dbinom{b}{s} j^{b-s}$. Отсюда найдем $\overline{sh}_p(y^{a^j})$, как произведение трех матриц размерности p. Имеем

$$\overline{sh}_p(y^{a^j})_{i,l} = \sum_{u=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{p-1}(-1)^{i+u}\binom{i}{u}\binom{s}{l}j^{i-u}j^{s-l}\cdot Y_{u,s}.$$

Полагая $l = 0$, получаем

$$D_{j+ip,s+up} = (-1)^{i+u}\binom{i}{u}j^{i-u+s}.$$

В силу $\binom{i}{u} = 0$ для $i < u$ имеем элементы $D_{j+ip,v} = 0$ для всех $v \geq (i + 1)p$. Отсюда видна блочная структура матрицы D. Рассмотрим блоки, лежащие на диагонали матрицы D размерности p. Пусть $D(i)$ — матрица размерности p, состоящая из элементов матрицы D, лежащих в i-м блоке, $0 \leq i \leq p-1$: $D(i)_{j,s} = D_{j+ip,s+ip}$. Используя формулу для элемента $D_{j+ip,s+up}$, получаем $D(i)_{j,s} = j^s$. Мы видим, что матрицы $D(i)$ совпадают между собой, и таким образом, матрица D будет невырожденной, если будет невырожденной матрица $D(0)$. Исходя из вида элементов матрицы $D(0)_{j,s} = j^s$ ($0^0 = 1$) хороша видна (можно воспользоваться малой теоремой Ферма) линейная независимость ее строк и столбцов.

Теорема для $y_0 = 0$ доказана.

2. Пусть теперь $y_0 \neq 0$. Тогда элемент $\check{y} = a^{-y_0} \cdot y$ имеет таблицу с первой координатой $\check{y}_0 = 0$. В этом случае шаблон матрицы можно вычислить с помощью равенства $\overline{sh}_p(y) = \overline{sh}_p(a^{y_0}) \cdot \overline{sh}_p(\check{y})$ с уже описанными выше шаблонами для сомножителей. Данное равенство не нарушает утверждение теоремы, так как по определению ограничений $\check{y}|_x = y|_x$, $0 \leq x \leq p-1$.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что чем выше размерность шаблона, тем больше информации можно собрать и о самой матрице. Действительно, пусть $M \in UT(p)$ и $sh_n(M)$ — шаблон матрицы M размерности n. Обозначим $M_{i,j}(n) = sh_n(M)_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n-1$. Для матрицы $M_{i,j}(n) \in M(p)$ рассмотрим элемент $M_{i,j}(n)_{1,1} \in \mathbb{Z}_p$. Тогда становится очевидным следующее утверждение.

Утверждение 3. *Отображение $\rho\colon UT(p) \to UT_n(p)$, заданное по правилу*

$$M \mapsto \begin{pmatrix} M_{0,0}(n)_{1,1} & \ldots & M_{0,n-1}(n)_{1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,0}(n)_{1,1} & \ldots & M_{n-1,n-1}(n)_{1,1} \end{pmatrix},$$

является эпиморфизмом.

Отметим, что теорема 2 не только показывает возможность рекуррентного построения шаблона матрицы представления элементов группы P_p, но и указывает алгоритм получения этого шаблона. В следующем пункте мы реализуем данный алгоритм на примере случая $p = 3$.

4. Пример шаблонов при $p = 3$. С помощью предыдущей теоремы покажем устройство шаблонов $\overline{sh}_3(y)$ для произвольного $y \in P_3$.

Согласно лемме 1

$$A = A(1) = \overline{sh}_3(a) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ E & E & 0 \\ E & -E & E \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = A^2 = A(2) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ -E & E & 0 \\ E & E & E \end{pmatrix},$$

где $a = [1, 0, \ldots] \in P_3$.

Обозначим

$$\overline{sh}_3(y) = \begin{pmatrix} Y_{0,0} & Y_{0,1} & Y_{0,2} \\ Y_{1,0} & Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,0} & Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix}$$

и найдем каждую из матриц $Y_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 2$, в виде линейной комбинации матриц вида $f_3(y|_x)$, для $x = 0, 1, 2$.

Допустим, что $y_0 = 0$. Из рассуждений в пункте 1.1 теоремы 2 ясно, что $Y_{1,0} = Y_{2,0} = 0$ — нулевые матрицы множества $M(p)$. Из пункта 1.2 этой теоремы следует, что $Y_{0,0} = f_3(y|_0)$.

Получим оставшиеся 6 матриц. По определению, данному в пункте 1.3 теоремы 2, имеем

$$B_{0,1} = \overline{sh}_3(y^a)_{0,0} = (A(2) \cdot \overline{sh}_3(y) \cdot A(1))_{0,0} = Y_{0,0} + Y_{0,1} + Y_{0,2}.$$

Аналогично

$$B_{1,1} = \overline{sh}_3(y^a)_{1,0} = -Y_{0,0} - Y_{0,1} - Y_{0,2} + Y_{1,0} + Y_{1,1} + Y_{1,2},$$

$$B_{2,1} = \overline{sh}_3(y^a)_{2,0} = \sum_{0 \leq i,j \leq 2} Y_{i,j},$$

$$B_{0,2} = \overline{sh}_3(y^{a^2})_{0,0} = (A(1) \cdot \overline{sh}_3(y) \cdot A(2))_{0,0} = Y_{0,0} - Y_{0,1} + Y_{0,2},$$

$$B_{1,2} = \overline{sh}_3(y^{a^2})_{1,0} = Y_{0,0} - Y_{0,1} + Y_{0,2} + Y_{1,0} - Y_{1,1} + Y_{1,2},$$

$$B_{2,2} = \overline{sh}_3(y^{a^2})_{2,0} = Y_{0,0} - Y_{0,1} + Y_{0,2} - Y_{1,0} + Y_{1,1} - Y_{1,2} + Y_{2,0} - Y_{2,1} + Y_{2,2}.$$

Поскольку $B_{0,j} = f_3(y|_j)$ и $B_{i,j} = 0$ для $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$, мы имеем систему из 6 уравнений с 6 неизвестными $Y_{i,j}$ и с известными свободными членами.

Решая эту систему, получаем значения неизвестных:

$$Y_{0,1} = Y_{1,2} = Y_{2,1} = -f_3(y|_1) + f_3(y|_2),$$

$$Y_{1,1} = Y_{2,2} = -f_3(y|_1) - f_3(y|_2), \qquad Y_{0,2} = -f_3(y|_0) - f_3(y|_1) - f_3(y|_2).$$

Обозначим $Y_x = f_3(y|_x)$. Суммируя изложенное, при $y_0 = 0$ имеем

$$\overline{sh}_3(y) = \begin{pmatrix} Y_0 & -Y_1 + Y_2 & -Y_0 - Y_1 - Y_2 \\ 0 & -Y_1 - Y_2 & -Y_1 + Y_2 \\ 0 & -Y_1 + Y_2 & -Y_1 - Y_2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения шаблона при $y_0 \neq 0$ необходимо заметить, что

$$[y_0, y_1(t_1), \ldots] = [y_0, 0, \ldots] \cdot [0, y_1(t_1), \ldots].$$

Кроме того, сужение элемента $y \in P_3$ вдоль x не зависит от значения y_0. Таким образом, для получения искомого шаблона достаточно получить произведение матриц $\overline{sh}_3(a^{y_0}) \cdot \overline{sh}_3(y)$. Результат запишем в общем виде для значений $y_0 = 1$ и $y_0 = 2$:

$$\overline{sh}_3(y) = \begin{pmatrix} Y_0 & -Y_1 + Y_2 & -Y_0 - Y_1 - Y_2 \\ (-1)^{y_0+1} Y_0 & Y_{y_0} & (-1)^{y_0} Y_0 + (-1)^{y_0+1} Y_{y_0} \\ Y_0 & (-1)^{y_0} Y_{y_0} & -Y_0 - Y_{y_0} \end{pmatrix}.$$

5. Треугольное представление самоподобной 3-группы Гупта – Сидки. Группа Гупта – Сидки, впервые построенная в работе [5], является примером периодической конечнопорожденной бесконечной группы. Поэтому представляется интересным рассмотреть ее матричное представление. Эта группа определяется, как подгруппа группы автоморфизмов корневого тернарного дерева (из каждой вершины вниз выходят ровно три ребра) $G_3 = \langle \alpha, \beta \rangle \leq \operatorname{Aut} T_3$. При этом ее порождающие строятся рекуррентным образом. Элемент α переставляет по циклу длины 3 поддеревья с корневыми вершинами первого уровня. Элемент β можно определить через сужения автоморфизмов дерева на поддеревья следующим образом:

$$\beta|_0 = \beta, \qquad \beta|_1 = \alpha, \qquad \beta|_2 = \alpha^{-1}.$$

Такое определение позволяет рассмотреть изоморфное вложение ι группы Гупта – Сидки в группу P_3 по правилу, заданному на порождающих: $\alpha \mapsto a = [1, 0, \ldots]$, $\beta \mapsto b = [0, b_1(t_1), \ldots] \in P_3$. При этом элемент b задается однозначно через свои сужения: $b|_0 = b$, $b|_1 = a$, $b|_2 = a^{-1}$.

Используя представление f_3, получаем, что группа Гупта – Сидки G_3 изоморфна матричной группе $f_3(\iota(G_3)) = \langle A, B \rangle$, где $A = f_3(a)$, $B = f_3(b)$. Матрица A и ее обратная A^{-1} были описаны в предыдущем пункте работы. Матрицу B опишем с помощью шаблонов и теоремы 2:

$$sh_3(B) = \begin{pmatrix} B & -A + A^{-1} & -B - A - A^{-1} \\ 0 & -A - A^{-1} & -A + A^{-1} \\ 0 & -A + A^{-1} & -A - A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для уточнения деталей рекуррентного строения матрицы мы можем переходить к шаблонам больших размерностей. Например, используя заданные выше шаблоны для матриц A, A^{-1} и B, можно получить более явный вид матрицы $B = f_3(b)$ с помощью шаблона $sh_9(B)$. Имеем

$$sh_9(B) =$$

$$= \begin{pmatrix} B & 0 & -B+E & -A+A^{-1} & 0 & A-A^{-1} & -B-A-A^{-1} & 0 & B+A+A^{-1} \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & -A-A^{-1} & 0 & A+A^{-1}+E & -A+A^{-1} & 0 & A-A^{-1} \\ 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & -A+A^{-1} & -E & A-A^{-1} & -A-A^{-1} & 0 & A+A^{-1}+E \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Продолжая переходить к шаблонам матрицы больших размерностей, мы можем воспользоваться утверждением 3 для получения большей информации о самой матрице, представленной в терминах шаблонов.

Заметим, что впервые о существовании точного неприводимого треугольного представления группы G_3 было отмечено в работе [6].

1. *Калужнин Л. А.* Избранные главы теории групп. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1979. – 52 с.
2. *Леонов Ю. Г.* Представление финитно-аппроксимируемых 2-групп бесконечномерными унитреугольными матрицами над полем из двух элементов // Мат. студ. – 2004. – **22**, № 2. – С. 134 – 140.
3. *Леонов Ю. Г., Некрашевич В. В., Сущанський В. І.* Зображення вінцевих добутків унітрикутними матрицями // Доп. АН України. – 2005. – № 4. – С. 29 – 33.
4. *Kaluzhnin L. A.* La structure des p-groupes de sylow des groupes symetriques finis // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1948. – **3(65)**. – P. 239 – 276.
5. *Gupta N., Sidki S.* Some infinite p-groups // Алгебра и логика. – 1983. – **22**. – № 5. – С. 584 – 589.
6. *Sidki S.* A primitive ring associated to a Burnside 3-group // J. London Math. Soc. – 1997. – **55**, № 2.– P. 55 – 64.

Получено 01.11.10