УДК 517.982.22

И. С. Фещенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЗАМКНУТОСТИ СУММЫ n ПОДПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

We give necessary and sufficient conditions for the sum of subspaces $H_1, \ldots, H_n$, $n \geq 2$, of a Hilbert space H to be a subspace and present various properties of n-tuples of subspaces with closed sum.

Наведено необхідні та достатні умови для того, щоб сума підпросторів $H_1, \ldots, H_n$, $n \geq 2$, гільбертового простору H була підпростором, а також різні властивості n-ок підпросторів із замкненою сумою.

1. Введение. Изучение систем $L = (V; V_1, \ldots, V_n)$ n подпространств $V_1, \ldots, V_n$ линейного пространства V, в частности, описание неразложимых четверок подпространств V (с точностью до эквивалентности), описание неразложимых представлений в пространстве V конечных частично упорядоченных множеств и т.д. являются классическими задачами алгебры (см., например, библиографию в [28]).

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, а H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — набор его подпространств. Изучение системы подпространств $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ гильбертова пространства H (или, что то же самое, наборов соответствующих ортопроекторов $P_1, \ldots, P_n$) является важной задачей функционального анализа, которой посвящены многочисленные публикации (см., например, [28] и приведенную там библиографию).

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $H_1, \ldots, H_n$ — набор его подпространств. Если $\dim H < \infty$, то сумма $H_1 + \ldots + H_n$ замкнута в H. В бесконечномерном гильбертовом пространстве это утверждение, вообще говоря, неверно (даже при $n = 2$ сумма $H_1 + H_2$ может не быть замкнутой). Поэтому естественной является задача нахождения необходимых и достаточных условий (или только достаточных), при которых $H_1 + \ldots + H_n$ есть подпространством H (см., например, [3, 6 – 8, 11, 12, 17, 18, 21, 22, 24, 29]).

Системы подпространств с замкнутой суммой имеют многочисленные приложения: к построению статистических оценок [2], к задачам квадратичного программирования [21], томографии [18, 24], параллельным вычислениям [3], алгоритмам для решения выпуклых задач существования (см. [1] и приведенную там библиографию), изучению сходимости произведений ортопроекторов (итерационного процесса) (см. [5, 15] и библиографию в них), методам Шварца (численные методы, которые применяются, например, для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных (методы разбиения области)) (см. [15] и приведенную там библиографию). В подпункте 4.2 показана связь задачи о замкнутости суммы подпространств со свойством обратного наилучшего приближения системы подпространств (IBAP), которое имеет приложения к периодическим проекционным алгоритмам, гармоническому анализу, интегральным уравнениям, вейвлетам (см. [7]).

В пунктах 2 – 5 приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы сумма подпространств $H_1, \ldots, H_n$ гильбертова пространства H была подпространством, а также различные свойства n-ок подпространств с замкнутой суммой. Особое внимание уделено линейно независимым системам подпространств (см. пункт 4).

В пункте 2 изучается задача о замкнутости суммы пары подпространств. Основным рабочим инструментом является спектральная теорема для пары ортопроекторов („представление” П. Халмоша для пары подпространств).

В пункте 3 показано, как задача о замкнутости суммы n подпространств сводится к задаче о замкнутости суммы пары подпространств. С помощью критериев замкнутости суммы пары подпространств получены критерии замкнутости суммы n подпространств.

В пункте 4 изучаются линейно независимые системы подпространств. В частности, доказано, что произвольная система n подпространств может быть „уменьшена” до линейно независимой системы подпространств с сохранением суммы подпространств (см. теоремы 4.2, 4.3).

В пункте 5 изучается более общий объект, чем система подпространств — система образов линейных непрерывных операторов. Такой подход позволяет получить новые критерии замкнутости суммы n подпространств, изучить некоторые свойства сумм n-ок подпространств H.

Обозначения. В данной работе мы рассматриваем комплексные гильбертовые пространства, которые, как правило, обозначаем буквами H, M, K. Отметим, что мы не накладываем дополнительных условий на размерность гильбертова пространства. Для гильбертова пространства H I_H — единичный оператор в H (или просто I, если понятно, о каком гильбертовом пространстве идет речь); если $A\colon H \to H$ — линейный непрерывный оператор, то $\sigma(A)$ — спектр A. Некоторые ортогональные разложения гильбертовых пространств, рассмотренные в работе, могут содержать нулевые компоненты. Спектр оператора, определенного на такой компоненте, считаем равным пустому множеству.

2. Замкнутость суммы пары подпространств. Задаче о замкнутости суммы пары подпространств посвящены многочисленные публикации (см., например, [6, 8, 11, 12, 17, 21, 22]), некоторые критерии замкнутости суммы пары подпространств уже стали математическим фольклором.

Для получения критериев замкнутости суммы пары подпространств будем использовать спектральную теорему для пары ортопроекторов („представление” П. Халмоша для пары подпространств). Многочисленные применения спектральной теоремы для пары ортопроекторов содержатся в [4, 14]. Критерии замкнутости суммы пары подпространств, сформулированные в терминах обобщенных обратных операторов Мура – Пенроуза, содержатся в [6].

Отметим, что задача о замкнутости суммы пары подпространств в некотором смысле является базовой — в пункте 3 мы покажем, как задача о замкнутости суммы n подпространств сводится к задаче о замкнутости суммы пары подпространств.

2.1. Спектральная теорема для пары ортопроекторов. Пусть H — комплексное гильбертово пространство, H_1 и H_2 — подпространства H. Будем говорить, что они находятся в общем положении (по Халмошу) (см. [14]), если

$$H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_2^\perp = H_1^\perp \cap H_2 = H_1^\perp \cap H_2^\perp = 0.$$

Теорема 2.1 [14]. *Пусть H_1 и H_2 — подпространства H, которые находятся в общем положении, P_1, P_2 — соответствующие ортопроекторы. Тогда найдутся гильбертово пространство K и ограниченный самосопряженный оператор $a\colon K \to K$, $0 \le a = a^* \le I_K$, $\ker(a) = \ker(I_K - a) = 0$ такие, что $H = K \oplus K$,* *а блочные разложения P_1 и P_2 имеют вид*

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(I_K - a)} \\ \sqrt{a(I_K - a)} & I_K - a \end{pmatrix}.$$

Наоборот, каждому такому оператору a соответствуют определенные выше ортопроекторы P_1 и P_2 на подпространства H_1 и H_2 гильбертова пространства $H = K \oplus K$, которые находятся в общем положении.

Пусть теперь H_1 и H_2 — произвольные подпространства H. Тогда можем записать

$$H = (H_1 \cap H_2) \oplus (H_1 \cap H_2^{\perp}) \oplus (H_1^{\perp} \cap H_2) \oplus (H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}) \oplus \widetilde{H}, \tag{2.1}$$

$$H_1 = (H_1 \cap H_2) \oplus (H_1 \cap H_2^{\perp}) \oplus 0 \oplus 0 \oplus \widetilde{H}_1, \tag{2.2}$$

$$H_2 = (H_1 \cap H_2) \oplus 0 \oplus (H_1^{\perp} \cap H_2) \oplus 0 \oplus \widetilde{H}_2, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$ — подпространства $\widetilde{H}$, которые находятся в общем положении. Непосредственно из теоремы 2.1 получаем следующую теорему.

Теорема 2.2 (спектральная теорема для пары ортопроекторов). *Пусть H_1 и H_2 — подпространства H, P_1 и P_2 — соответствующие ортопроекторы. Тогда найдутся гильбертово пространство K и ограниченный самосопряженный оператор $a\colon K \to K$, $0 \le a = a^* \le I_K$, $\ker(a) = \ker(I_K - a) = 0$, такие, что*

$$H = (H_1 \cap H_2) \oplus (H_1 \cap H_2^{\perp}) \oplus (H_1^{\perp} \cap H_2) \oplus (H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}) \oplus (K \oplus K), \tag{2.4}$$

а блочные разложения P_1 и P_2 имеют вид

$$P_1 = I_{H_1 \cap H_2} \oplus I_{H_1 \cap H_2^{\perp}} \oplus 0_{H_1^{\perp} \cap H_2} \oplus 0_{H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}} \oplus \begin{pmatrix} I_K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$P_2 = I_{H_1 \cap H_2} \oplus 0_{H_1 \cap H_2^{\perp}} \oplus I_{H_1^{\perp} \cap H_2} \oplus 0_{H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}} \oplus \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(I_K - a)} \\ \sqrt{a(I_K - a)} & I_K - a \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Используя спектральное представление самосопряженного оператора a в виде спектрального интеграла по разложению единицы $E_a(\cdot)$ в K на $(0,1)$, имеем

$$P_1 = I_{H_1 \cap H_2} \oplus I_{H_1 \cap H_2^{\perp}} \oplus 0_{H_1^{\perp} \cap H_2} \oplus 0_{H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_K,$$

$$P_2 = I_{H_1 \cap H_2} \oplus 0_{H_1 \cap H_2^{\perp}} \oplus I_{H_1^{\perp} \cap H_2} \oplus 0_{H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}} \oplus$$

$$\oplus \int\limits_{(0,1)} \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1 - x \end{pmatrix} \otimes dE_a(x),$$

где интеграл сходится равномерно.

Это представление для пары подпространств позволяет провести аналогию с двумерным случаем $(\dim K = 1)$. *Действительно, существует и единственный самосопряженный оператор* $\Theta\colon K \to K$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2} I_K$, $\ker(\Theta) = \ker\left(\frac{\pi}{2} I_K - \Theta\right) = 0$ (*угловой оператор пары подпространств*), *такой, что* $a = \cos^2\Theta$, $I_K - a = \sin^2\Theta$. *Тогда ортопроекторы имеют вид*

$$P_1 = I_{H_1\cap H_2} \oplus I_{H_1\cap H_2^\perp} \oplus 0_{H_1^\perp\cap H_2} \oplus 0_{H_1^\perp\cap H_2^\perp} \oplus \begin{pmatrix} I_K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = I_{H_1\cap H_2} \oplus 0_{H_1\cap H_2^\perp} \oplus I_{H_1^\perp\cap H_2} \oplus 0_{H_1^\perp\cap H_2^\perp} \oplus \begin{pmatrix} \cos^2\Theta & \cos\Theta\sin\Theta \\ \cos\Theta\sin\Theta & \sin^2\Theta \end{pmatrix}.$$

Далее в этом пункте будем использовать обозначения теоремы 2.2, а также (2.1) – (2.3).

2.2. Классические критерии замкнутости суммы пары подпространств как следствия спектральной теоремы для пары ортопроекторов. В этом подпункте приведены критерии замкнутости суммы пары подпространств, которые были получены многими авторами и относятся к математическому фольклору. Наша цель — показать, что с помощью спектральной теоремы для пары ортопроекторов эти критерии доказываются несложно и единообразно.

Утверждение 2.1. *Следующие условия равносильны*:

(1) $H_1 + H_2$ *замкнуто*,

(2) $1 \notin \sigma(a)$,

(3) $\sigma(P_1P_2) \cap (1-\varepsilon, 1) = \varnothing$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$,

(4) $\|P_1P_2 - P_{H_1\cap H_2}\| < 1$,

(5) $H_1^\perp + H_2^\perp$ *замкнуто*,

(6) $\operatorname{Im}((I-P_1)P_2)$ *замкнуто*,

(7) $\operatorname{Im}(I - P_1P_2)$ *замкнуто*.

Доказательство. 1. Сумма $H_1 + H_2$ замкнута тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$ замкнуто в $\widetilde{H} = K \oplus K$. Поскольку $\widetilde{H}_1 = \{(x, 0),\ x \in K\}$, $\widetilde{H}_2 = \{(\sqrt{a}x, \sqrt{I-a}x),\ x \in K\}$, то $\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2 = \{(x, \sqrt{I-a}y),\ x, y \in K\}$. Так как $\ker(I-a) = 0$, то $\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$ плотно в $K \oplus K$ и замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\sqrt{I-a} = K$. Это условие равносильно обратимости оператора $I - a$. Таким образом, $H_1 + H_2$ замкнуто тогда и только тогда, когда $1 \notin \sigma(a)$.

2. Поскольку $P_1P_2 = I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(I-a)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(P_1P_2)$ совпадает с $\sigma(a)$ с точностью до точек $0, 1$. Предположим, что $1 \notin \sigma(a)$. Тогда $\sigma(a) \subset [0, 1-\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$, поэтому $\sigma(P_1P_2) \cap (1-\varepsilon, 1) = \varnothing$. Наоборот, пусть $\sigma(P_1P_2) \cap (1-\varepsilon, 1) = \varnothing$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $\sigma(a) \cap (1-\varepsilon, 1) = \varnothing$. Поскольку $\ker(I-a) = 0$ и изолированная точка спектра самосопряженного оператора является его собственным значением, то $1 \notin \sigma(a)$.

3. Поскольку $P_1P_2P_1 - P_{H_1\cap H_2} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $\|P_1P_2 - P_{H_1\cap H_2}\|^2 = \|P_1P_2P_1 - P_{H_1\cap H_2}\| = \|a\|$. Поэтому $1 \notin \sigma(a)$ тогда и только тогда, когда $\|P_1P_2 - P_{H_1\cap H_2}\| < 1$.

4. Из формул (2.5), (2.6) следует, что $\sigma((I-P_1)(I-P_2))$ совпадает с $\sigma(a)$ с точностью до точек $0,1$. Поэтому $\sigma((I-P_1)(I-P_2))$ совпадает с $\sigma(P_1P_2)$ с точностью до точек $0,1$, откуда следует нужное утверждение.

5. Из формул (2.5), (2.6) следует, что

$$\mathrm{Im}((I-P_1)P_2) = 0 \oplus 0 \oplus H_1^{\perp} \cap H_2 \oplus 0 \oplus (0 \oplus \mathrm{Im}\sqrt{I-a}).$$

Поэтому $\mathrm{Im}((I-P_1)P_2)$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(\sqrt{I-a})$ замкнуто. Последнее равносильно $1 \notin \sigma(a)$.

6. Обозначим через $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ ортопроекторы на $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$. $\mathrm{Im}(I-P_1P_2)$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(I-\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2)$ замкнут. Поскольку $\mathrm{Im}(I-\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2) = \{((I-a)y - \sqrt{a(I-a)}z, z),\ y,z \in K\}$, последнее условие равносильно замкнутости $\mathrm{Im}(I-a)$, т. е. $1 \notin \sigma(a)$.

Утверждение 2.1 доказано.

***Пример* 2.1.** Пусть $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n<\tau_{n+1}=1$, а P_1, P_2 удовлетворяют равенству $\prod_{k=0}^{n+1}(P_1P_2P_1-\tau_kP_1)=0$.

Поскольку блочные разложения P_1, P_2 имеют вид (2.5), (2.6), то

$$P_1P_2P_1-\tau P_1 = (1-\tau)I \oplus -\tau I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} a-\tau I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\prod_{k=0}^{n+1}(a-\tau_kI)=0$, т. е. $\sigma(a)\subset\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$ (напомним, что $\ker(a) = \ker(I-a)=0$). Следовательно, H_1+H_2 — подпространство.

Приведем условие замкнутости суммы пары подпространств в терминах угла (по Фридрихсу) между ними.

Определение 2.1 [11]. *Углом $\gamma=\gamma(H_1,H_2)$, $0\leqslant\gamma\leqslant\pi/2$, между подпространствами H_1,H_2 назовем угол, определенный равенством*

$$\cos\gamma = \sup\{|(x,y)|,\ x\in H_1\ominus(H_1\cap H_2),\ \|x\|=1,\ y\in H_2\ominus(H_1\cap H_2),\ \|y\|=1\}.$$

Если $H_1\subset H_2$ или $H_2\subset H_1$, то полагаем $\cos\gamma=0$, т. е. $\gamma=\pi/2$.

Пусть $x=(0,x_2,0,0,z_1,0)\in H_1\ominus(H_1\cap H_2)$, тогда $\|x\|^2=\|x_2\|^2+\|z_1\|^2=1$. Далее, пусть $y=(0,0,x_3,0,\sqrt{a}z_2,\sqrt{1-a}z_2)\in H_2\ominus(H_1\cap H_2)$, тогда $\|y\|^2 = \|x_3\|^2+\|z_2\|^2=1$. Здесь векторы записаны покомпонентно относительно ортогонального разложения H (2.4). Тогда $(x,y)=(z_1,\sqrt{a}z_2)$. Отсюда следует, что $\cos\gamma=\sqrt{\|a\|}$. H_1+H_2 замкнуто тогда и только тогда, когда $\|a\|<1$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *H_1+H_2 замкнуто тогда и только тогда, когда $\gamma(H_1,H_2)>0$.*

***Замечание* 2.1.** В терминах углового оператора Θ (см. теорему 2.2) угол $\gamma = \min\{\lambda,\ \lambda\in\sigma(\Theta)\}$.

Следующее утверждение касается линейно независимых пар подпространств, т. е. таких, что $H_1\cap H_2=0$.

Утверждение 2.3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $H_1\cap H_2=0$ *и* H_1+H_2 *замкнуто*,

(2) $\|P_1P_2\|<1$,

(3) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $|(x, y)| \leqslant 1 - \varepsilon$ *для произвольных* $x \in H_1$, $y \in H_2$, $\|x\| = \|y\| = 1$,

(4) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\|x + y\|^2 \geqslant \varepsilon(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *для произвольных* $x \in H_1$, $y \in H_2$,

(5) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\|(I - P_1)x\| \geqslant \varepsilon\|x\|$ *для произвольного* $x \in H_2$.

Доказательство. Равносильность (1) – (3) следует из утверждений 2.1, 2.2.

$(3) \Leftrightarrow (4)$. Пусть выполнено (3). Тогда для произвольных $x \in H_1$, $y \in H_2$ имеем $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x, y) \geqslant \varepsilon(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Пусть выполнено (4). Рассмотрим произвольные $x \in H_1$, $y \in H_2$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Для произвольных комплексных t_1, t_2 имеем $\|t_1x + t_2y\|^2 \geqslant \varepsilon(|t_1|^2 + |t_2|^2)$, т. е. матрица $\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & (x,y) \\ (y,x) & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$ неотрицательно определена. Поэтому $|(x, y)| \leqslant 1 - \varepsilon$.

$(1) \Leftrightarrow (5)$. Пусть выполнено (1). Тогда ортогональное разложение H (2.4) не содержит компоненты $H_1 \cap H_2$. Пусть $x = (0, y, 0, \sqrt{a}z, \sqrt{I - a}z) \in H_2$, тогда $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. Поскольку $(I - P_1)x = (0, y, 0, 0, \sqrt{I - a}z)$, то $\|(I - P_1)x\|^2 = \|y\|^2 + ((I - a)z, z)$. Так как $1 \notin \sigma(a)$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ $I - a \geqslant \varepsilon^2 I$. Следовательно, $\|(I - P_1)x\| \geqslant \varepsilon\|x\|$.

Пусть выполнено (5). Очевидно, что $H_1 \cap H_2 = 0$. Из предыдущих рассуждений следует, что $I - a \geqslant \varepsilon^2 I$, откуда $1 \notin \sigma(a)$.

Утверждение 2.3 доказано.

Следующее утверждение доказано в [18] для подпространств пространства Фреше. Мы приведем простое доказательство с помощью спектральной теоремы для пары ортопроекторов. Обозначим через $S_\infty(H)$ множество компактных операторов в H.

Утверждение 2.4. *Если* P_1P_2 *компактный, то* $H_1 + H_2$ *замкнуто и* $P_{H_1+H_2} = P_1 + P_2 \pmod{S_\infty(H)}$.

Доказательство. Поскольку P_1P_2 компактный, то $\dim(H_1 \bigcap H_2) < \infty$ и $a \in S_\infty(H)$, а так как $\ker(I - a) = 0$, то $1 \notin \sigma(a)$, поэтому сумма $H_1 + H_2$ замкнута. Имеем

$$P_1 + P_2 = 2I_{H_1 \cap H_2} \oplus I_{H_1 \cap H_2^\perp} \oplus I_{H_1^\perp \cap H_2} \oplus$$

$$\oplus\, 0_{H_1^\perp \cap H_2^\perp} \oplus \begin{pmatrix} I_K + a & \sqrt{a(I_K - a)} \\ \sqrt{a(I_K - a)} & I_K - a \end{pmatrix},$$

$$P_{H_1+H_2} = I_{H_1 \cap H_2} \oplus I_{H_1 \cap H_2^\perp} \oplus I_{H_1^\perp \cap H_2} \oplus 0_{H_1^\perp \cap H_2^\perp} \oplus \begin{pmatrix} I_K & 0 \\ 0 & I_K \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $P_{H_1+H_2} = P_1 + P_2 \pmod{S_\infty(H)}$.

Утверждение 2.4 доказано.

2.3. Условие замкнутости $H_1 + H_2$ в терминах свойств функций от P_1, P_2. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ — непрерывные на $[0, 1]$ комплекснозначные функции. Определим оператор

$$b = P_1f_1(P_1P_2P_1) + P_2f_2(P_2P_1P_2) + P_1P_2f_3(P_2P_1P_2) + P_2P_1f_4(P_1P_2P_1). \quad (2.7)$$

***Замечание* 2.2.** Алгебра, порожденная ортопроекторами P_1, P_2, имеет вид $\mathcal{A}(P_1, P_2) = \{b\}$, где f_1, f_2, f_3, f_4 пробегают множество полиномов.

Сужения оператора b на компоненты ортогонального разложения H (2.4) обозначим через $b_{1,1}$, $b_{1,0}$, $b_{0,1}$, $b_{0,0}$, $\widetilde{b}$. Спектр $\sigma(b)$ является объединением спектров операторов $b_{1,1}$, $b_{1,0}$, $b_{0,1}$, $b_{0,0}$, $\widetilde{b}$.

На компоненте $H_1 \cap H_2$ $P_1 = P_2 = I$, поэтому $b_{1,1} = (f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + f_4(1))I$; на компоненте $H_1 \cap H_2^{\perp}$ $P_1 = I, P_2 = 0$, поэтому $b_{1,0} = f_1(0)I$; на компоненте $H_1^{\perp} \bigcap H_2$ $P_1 = 0, P_2 = I$, поэтому $b_{0,1} = f_2(0)I$; на компоненте $H_1^{\perp} \bigcap H_2^{\perp}$ $P_1 = P_2 = 0$, поэтому $b_{0,0} = 0$. Рассмотрим компоненту $K \oplus K$. Сужения ортопроекторов P_1, P_2 на $K \oplus K$ равны

$$\widetilde{P}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(I-a)} \\ \sqrt{a(I-a)} & I-a \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(I-a)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_2\widetilde{P}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \sqrt{a(I-a)} & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2\widetilde{P}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\widetilde{P}_1, \quad \widetilde{P}_2\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} a^2 & a\sqrt{a(I-a)} \\ a\sqrt{a(I-a)} & a(I-a) \end{pmatrix} = a\widetilde{P}_2.$$

Здесь умножение на a означает умножение на оператор $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Для непрерывной на $[0,1]$ комплекснозначной функции $f(x)$ имеем

$$\widetilde{P}_1 f(\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2\widetilde{P}_1) = f(a)\widetilde{P}_1, \quad \widetilde{P}_2 f(\widetilde{P}_2\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2) = f(a)\widetilde{P}_2,$$

поэтому

$$\widetilde{b} = f_1(a)\widetilde{P}_1 + f_2(a)\widetilde{P}_2 + f_3(a)\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2 + f_4(a)\widetilde{P}_2\widetilde{P}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(a) + af_2(a) + af_3(a) + af_4(a) & \sqrt{a(I-a)}(f_2(a) + f_3(a)) \\ \sqrt{a(I-a)}(f_2(a) + f_4(a)) & (I-a)f_2(a) \end{pmatrix}.$$

Определим функции $T(x) = f_1(x) + f_2(x) + x(f_3(x) + f_4(x))$ и $D(x) = (1 - x)(f_1(x)f_2(x) - xf_3(x)f_4(x))$, $x \in [0,1]$. У операторной (2×2)-матрицы, задающей $\widetilde{b}$, компоненты коммутируют, ее операторный след (сумма диагональных элементов) равен $T(a)$, а операторный определитель $D(a)$. Оператор $\lambda I - \widetilde{b}$ не обратим тогда и только тогда, когда операторный определитель операторной (2×2)-матрицы, задающей $\lambda I - \widetilde{b}$, не обратим (см. [29], задача 55). Этот операторный определитель равен $\lambda^2 I - \lambda T(a) + D(a)$. Поскольку функции $T(x), D(x)$ непрерывны, по теореме об отображении спектра $\sigma(\lambda^2 I - \lambda T(a) + D(a)) = \{\lambda^2 - T(x)\lambda + D(x),\ x \in \sigma(a)\}$. Таким образом, $\sigma(\widetilde{b})$ — множество решений уравнения $\lambda^2 - T(x)\lambda + D(x) = 0$, когда x пробегает $\sigma(a)$.

Сумма $H_1 + H_2$ замкнута тогда и только тогда, когда $1 \notin \sigma(a)$. Теперь можно сформулировать критерий замкнутости $H_1 + H_2$ в терминах спектра b (напомним, что b задан формулой (2.7)). Определим функцию $F(x) = f_1(x)f_2(x) - xf_3(x)f_4(x)$, $x \in [0, 1]$.

Утверждение 2.5. *Пусть функция* $F(x)$ *не обращается в* 0 *на* $[0, 1)$. *Тогда*:

(1) *сумма* $H_1 + H_2$ *замкнута тогда и только тогда, когда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\sigma(b) \cap (\{z \in \mathbb{C}, |z| < \varepsilon\} \setminus \{0\}) = \varnothing$;

(2) *пусть дополнительно* $f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + f_4(1) \neq 0$; *сумма* $H_1 + H_2 = H$ *тогда и только тогда, когда оператор* b *обратим.*

Доказательство. Докажем (1). Предположим, что $1 \notin \sigma(a)$. Тогда существует $m_1 > 0$, для которого $|D(x)| \geqslant m_1$, $x \in \sigma(a)$. Кроме того, существует m_2 такое, что $|T(x)| \leqslant m_2$ для произвольного $x \in \sigma(a)$. Отсюда следует существование искомого $\varepsilon > 0$.

Предположим, что $1 \in \sigma(a)$. Поскольку изолированная точка спектра самосопряженного оператора является его собственным значением и $\ker(I - a) = 0$, существует последовательность $x_j \in \sigma(a)$, $j \geqslant 1$, сходящаяся к 1, причем для всех $j \geqslant 1$ $x_j < 1$. Теперь из теоремы о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов следует существование последовательности $\lambda_j \in \sigma(\tilde{b}) \subset \sigma(b)$, сходящейся к 0, причем для всех $j \geqslant 1$ $\lambda_j \neq 0$.

Докажем (2). Пусть $H_1 + H_2 = H$. Тогда $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} = 0$. Спектры $\sigma(b_{1,1}) = f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + f_4(1) \neq 0$, $\sigma(b_{1,0}) = f_1(0) \neq 0$, $\sigma(b_{0,1}) = f_2(0) \neq 0$ (здесь равенства записаны при условии, что соответствующий спектр непустой). Поскольку $1 \notin \sigma(a)$, то $0 \notin \sigma(\widetilde{b})$. Поэтому b обратим.

Пусть b обратим. Тогда $\mathrm{Im}(b) = H$. Из определения b следует, что $\mathrm{Im}(b) \subset H_1 + H_2$. Поэтому $H_1 + H_2 = H$.

Утверждение 2.5 доказано.

***Пример* 2.2.** Пусть $f_1(x) = f_2(x) = 1, f_3(x) = f_4(x) = 0$. Тогда оператор $b = P_1 + P_2$ неотрицателен. Сумма $H_1 + H_2$ замкнута тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma(P_1 + P_2) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$. Сумма $H_1 + H_2 = H$ тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $P_1 + P_2 \geqslant \varepsilon I$.

***Пример* 2.3.** Пусть $f_1 = \tau_1$, $f_2 = \tau_2$, $f_3 = f_4 = 0$, где τ_1, τ_2 — действительные числа, отличные от 0. Используя выражение для спектра $\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2$, условие замкнутости $H_1 + H_2$ можно сформулировать точнее, чем в утверждении 2.5: сумма $H_1 + H_2$ является подпространством тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что:

(1) если $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, то $\sigma(\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$,

(2) если $\tau_1 < 0$, $\tau_2 < 0$, то $\sigma(\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2) \cap (-\varepsilon, 0) = \varnothing$,

(3) если τ_1, τ_2 имеют разные знаки и $\tau_1 + \tau_2 \geqslant 0$, то $\sigma(\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2) \cap (-\varepsilon, 0) = \varnothing$,

(4) если τ_1, τ_2 имеют разные знаки и $\tau_1 + \tau_2 \leqslant 0$, то $\sigma(\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$.

Утверждение 2.6. *Пусть функция* $F(x)$ *не обращается в* 0 *на* $[0, 1)$. $H_1 + H_2$ *замкнуто тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Im}(b)$ *замкнут.*

Доказательство. $\mathrm{Im}(b)$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(\widetilde{b})$ замкнут. Из теоремы Дугласа (см. [9], а также подпункт 5.1 данной работы) следует, что $\mathrm{Im}(\widetilde{b}) = \mathrm{Im}(\widetilde{b}(\widetilde{b})^*)^{1/2}$. Поэтому $\mathrm{Im}(b)$ является подпространством тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon > 0$ $\sigma(\widetilde{b}(\widetilde{b})^*) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$.

1. Пусть $H_1 + H_2$ — подпространство, т. е. $1 \notin \sigma(a)$. Тогда оператор $\widetilde{b}$ обратим, поэтому $\operatorname{Im}(\widetilde{b}) = \widetilde{H}$.

2. Пусть теперь $H_1 + H_2$ не является подпространством, т. е. $1 \in \sigma(a)$. Существует последовательность $x_k \in \sigma(a)$, $x_k \to 1$, причем $x_k < 1$, $k \geqslant 1$. Операторный определитель блочной (2×2)-матрицы, задающей $\widetilde{b}(\widetilde{b})^*$, равен $D_1(a)$, где $D_1(x) = (1-x)^2|F(x)|^2$, а ее операторный след равен $T_1(a)$ для некоторой (ее явный вид нам не нужен) непрерывной на $[0,1]$ функции $T_1(x)$. Спектр оператора $\widetilde{b}(\widetilde{b})^*$ есть множество решений λ уравнения $\lambda^2 - T_1(x)\lambda + D_1(x) = 0$, когда x пробегает $\sigma(a)$. Теперь из теоремы про непрерывную зависимость корней полинома от его коэффициентов следует существование последовательности $\lambda_j \in \sigma(\widetilde{b}(\widetilde{b})^*)$, сходящейся к 0, причем $\lambda_j \neq 0$ для всех $j \geqslant 1$. Поэтому $\operatorname{Im}(\widetilde{b})$ — не подпространство.

Утверждение 2.6 доказано.

Утверждение 2.7. *Предположим, что* $\operatorname{Im}(\widetilde{b}) = \widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$. *Тогда* $H_1 + H_2$ — *подпространство.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im}(\widetilde{b}) = \widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$. Из теоремы Дугласа (см. [9], а также подпункт 5.1 данной работы) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\widetilde{b}(\widetilde{b})^* \geqslant \varepsilon(\widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2)$. Для $x \in [0,1]$ определим следующие (2×2)-матрицы:

$$\widetilde{b}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) + xf_2(x) + xf_3(x) + xf_4(x) & \sqrt{x(1-x)}(f_2(x) + f_3(x)) \\ \sqrt{x(1-x)}(f_2(x) + f_4(x)) & (1-x)f_2(x) \end{pmatrix}$$

и

$$\widetilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix}.$$

Тогда $\widetilde{b}(x)(\widetilde{b}(x))^* \geqslant \varepsilon(\widetilde{P}_1(x) + \widetilde{P}_2(x))$ для каждого $x \in \sigma(a)$, поэтому $\det(\widetilde{b}(x)(\widetilde{b}(x))^*) \geqslant \varepsilon^2 \det(\widetilde{P}_1(x) + \widetilde{P}_2(x))$. Значит, $(1-x)^2|F(x)|^2 \geqslant \varepsilon^2(1-x)$, т. е. $(1-x)|F(x)|^2 \geqslant \varepsilon^2$ для любого $x \in \sigma(a) \setminus \{1\}$. Поэтому $1 \notin \sigma(a)$, что означает замкнутость $H_1 + H_2$.

Утверждение 2.7 доказано.

***Следствие* 2.1.** *Если* $\operatorname{Im}(b) = H_1 + H_2$, *то* $H_1 + H_2$ — *подпространство.*

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $F(x)$ *не обращается в* 0 *на* $[0,1)$ *и* $H_1 \cap H_2 = 0$. *Сумма* $H_1 + H_2$ *является подпространством тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}(b) = H_1 + H_2$.

***Следствие* 2.3.** *Пусть* $F(x)$ *не обращается в* 0 *на* $[0,1)$ *и* $f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + f_4(1) \neq 0$. *Сумма* $H_1 + H_2$ *является подпространством тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}(b) = H_1 + H_2$.

***Следствие* 2.4.** *Пусть* $F(x)$ *не обращается в* 0 *на* $[0,1)$. *Сумма* $H_1 + H_2$ *является подпространством тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}(b) \supset (H_1 + H_2) \bigcap (H_1 \cap H_2)^{\perp}$.

В дальнейшем нам понадобится свойство „почти” симметричности $\sigma(b)$. Из полученных формул для $\sigma(b)$ вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.8. *Пусть функция* $f_1(x) + f_2(x) + x(f_3(x) + f_4(x)) = c$, $x \in [0,1]$. *Тогда* $\sigma(b)$ *„почти” симметричен относительно точки* $c/2$: *если* $\lambda \in \sigma(b)$ *и* $\lambda \notin \{0, f_1(0), f_2(0), c\}$, *то* $(c - \lambda) \in \sigma(b)$.

3. Сведение задачи о замкнутости суммы n подпространств к задаче о замкнутости суммы пары подпространств. ***3.1.*** Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства гильбертова пространства H, $P_1, \ldots, P_n$ — соответствующие ортопроекторы.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $X = \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{n}$. Определим в нем подпространства $\Delta = \{(x, \ldots, x),\, x \in H\}$ и $\widetilde{H} = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$. Соответствующие ортопроекторы имеют вид

$$P_\Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} I_H & \ldots & \frac{1}{n} I_H \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{n} I_H & \ldots & \frac{1}{n} I_H \end{pmatrix}, \quad P_{\widetilde{H}} = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_n).$$

Поскольку

$$\Delta^\perp = \left\{ (x_1, \ldots, x_n),\, x_k \in H,\, 1 \leqslant k \leqslant n,\, \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\},$$

то

$$\Delta^\perp + \widetilde{H} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n),\, \sum_{k=1}^n x_k \in H_1 + \ldots + H_n \right\}.$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *$\sum_{k=1}^n H_k$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\Delta^\perp + \widetilde{H}$ замкнуто. $\sum_{k=1}^n H_k = H$ тогда и только тогда, когда $\Delta^\perp + \widetilde{H} = X$.*

Для того чтобы воспользоваться критерием замкнутости суммы пары подпространств, рассмотрим оператор

$$P_\Delta P_{\widetilde{H}} P_\Delta = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n P_k & \ldots & \sum_{k=1}^n P_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{k=1}^n P_k & \ldots & \sum_{k=1}^n P_k \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\sigma(P_\Delta P_{\widetilde{H}} P_\Delta) = 0 \cup \sigma\left(\frac{P_1 + \ldots + P_n}{n}\right)$. Используя спектральную теорему для пары ортопроекторов $P_\Delta, P_{\widetilde{H}}$, несложно получить $\sigma(P_{\Delta^\perp} P_{\widetilde{H}}) = \left\{ 1 - \alpha,\, \alpha \in \sigma\left(\frac{P_1 + \ldots + P_n}{n}\right) \right\}$ с точностью до точек 0, 1. Используя утверждение 2.1, получаем следующий критерий замкнутости суммы n подпространств.

Утверждение 3.2. *$H_1 + \ldots + H_n$ замкнуто тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma(P_1 + \ldots + P_n) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$.*

Из утверждения 3.2 с учетом того, что изолированная точка спектра самосопряженного оператора является его собственным значением, следует, что $\sum_{k=1}^n H_k = H$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^n P_k$ обратим.

***Замечание* 3.1.** Утверждение 3.2 можно получить различными способами, например:

(a) используя теорему Р. Дугласа (см. подпункт 5.1),

(b) достаточно показать, что если $H_1 + \ldots + H_n = H$, то $P_1 + \ldots + P_n$ обратим.

Определим оператор $A\colon \bigoplus_{k=1}^n H_k \to H$ равенством $A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k$. Тогда $\mathrm{Im}(A) = H$, поэтому A^* — изоморфное вложение (т. е. $\|A^*x\| \geqslant \varepsilon\|x\|$, $x \in H$, для некоторого $\varepsilon > 0$), AA^* обратим. Поскольку $A^*x = (P_1x, \ldots, P_nx)$, $x \in H$, оператор $AA^* = P_1 + \ldots + P_n$ обратим.

***Пример* 3.1.** Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(P_1, \ldots, P_n)$ — алгебра, порожденная $P_1, \ldots, P_n$. Предположим, что $\dim \mathcal{A} < \infty$. Тогда для элемента $Q = P_1 + \ldots + P_n$ этой алгебры существует ненулевой полином $R(z)$, для которого $R(Q) = 0$. Поэтому $\sigma(Q)$ состоит из конечного числа точек, а значит $H_1 + \ldots + H_n$ — подпространство.

В качестве примеров приведем такие системы подпространств:

1. Пусть ортопроекторы $P_1, \ldots, P_n$ попарно коммутируют. Тогда $\dim \mathcal{A} \leqslant 2^n - 1$. В этом случае $\sigma(P_1 + \ldots + P_n) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

2. Пусть система $H_1, \ldots, H_n$ является „простой" n-кой подпространств, связанной с деревом $\mathbb{G}$ (см. [28]). Тогда $\dim \mathcal{A} \leqslant n^2$.

Теперь, используя критерии замкнутости суммы пары подпространств, можем получить критерии замкнутости суммы n подпространств. Сначала приведем пример.

***Пример* 3.2.** Сумма $H_1 + \ldots + H_n = H$ тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $P_{\Delta^\perp} + P_{\widetilde{H}} \geqslant \varepsilon I_X$. Возьмем $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Тогда условие $((P_{\Delta^\perp} + P_{\widetilde{H}})x, x) \geqslant \varepsilon\|x\|^2$ принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \|P_k x_k\|^2 \geqslant \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 - (1-\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2\right).$$

3.2. Критерий замкнутости суммы подпространств в терминах их ортогональных дополнений. Сумма $H_1 + \ldots + H_n = H$ тогда и только тогда, когда $\Delta^\perp + \widetilde{H} = X$. Поскольку для подпространств M_1, M_2 $M_1 + M_2$ замкнуто тогда и только тогда, когда $M_1^\perp + M_2^\perp$ замкнуто, последнее условие равносильно следующему: $\Delta \cap \widetilde{H}^\perp = 0$ и $\Delta + \widetilde{H}^\perp$ замкнуто, что, в силу утверждения 2.3, равносильно существованию $\varepsilon_1 > 0$ такого, что $\|(I - P_\Delta)x\|^2 \geqslant \varepsilon_1\|x\|^2$ для произвольного $x \in \widetilde{H}^\perp$. Возьмем $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in H_i^\perp$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда неравенство $\|(I - P_\Delta)x\|^2 \geqslant \varepsilon_1\|x\|^2$ можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 - \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 \geqslant \varepsilon_1 \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2,$$

что равносильно $\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2 \geqslant n\varepsilon_1 \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$. Таким образом, $\sum_{k=1}^n H_k = H$ тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $x_k \in H_k^\perp$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2 \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2. \tag{3.1}$$

Далее Γ обозначает неориентированный граф с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через $E(\Gamma)$ множество ребер Γ. Будем писать $i \sim j$, если i соединено с j.

Утверждение 3.3. *Пусть Γ — связный граф. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$,

(2) *существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $x_k \in H_k^{\perp}$, $1 \leqslant k \leqslant n$,*

$$\sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \|x_i - x_j\|^2 \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1) очевидно.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $i \neq j$. Поскольку Γ связен, то существует путь $i = i(0) \sim i(1) \sim \ldots \sim i(m) = j$. Тогда

$$\|x_i - x_j\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|x_{i(k+1)} - x_{i(k)}\| \right)^2 \leqslant m \sum_{k=0}^{m-1} \|x_{i(k+1)} - x_{i(k)}\|^2.$$

Теперь из неравенства (3.1) получаем требуемое утверждение.

Утверждение 3.3 доказано.

Пусть, например, $E(\Gamma) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}\}$, т. е. Γ — цепь. Из утверждения 3.3 следует, что сумма $H_1 + \ldots + H_n = H$ тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ (уменьшенное ε из утверждения 3.3) такое, что для произвольных $x_k \in H_k^{\perp}$, $\|x_k\| = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и для произвольных $t_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, не равных одновременно 0, выполнено

$$\sum_{k=1}^{n-1} \|t_k x_k - t_{k+1} x_{k+1}\|^2 > \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |t_k|^2.$$

Это условие равносильно положительной определенности эрмитовой матрицы

$$A_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -(x_1, x_2) & 0 & \ldots & 0 \\ -(x_2, x_1) & 2-\varepsilon & -(x_2, x_3) & \ddots & \vdots \\ 0 & -(x_3, x_2) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2-\varepsilon & -(x_{n-1}, x_n) \\ 0 & \ldots & 0 & -(x_n, x_{n-1}) & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Используя критерий Сильвестра, можно получить необходимые и достаточные условия для положительной определенности $A_{\mathbb{C}}$.

***Пример* 3.3.** Пусть $n = 3$. Сумма $H_1 + H_2 + H_3 = H$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{|(x_1, x_2)|^2 + |(x_2, x_3)|^2,\ x_k \in H_k^{\perp},\ \|x_k\| = 1,\ k = 1, 2, 3\} < 2.$$

Далее будем рассматривать графы Γ с положительными весами на ребрах. Это значит, что каждому ребру $e = \{i, j\} \in E(\Gamma)$ сопоставлено число $\gamma_e > 0$, которое будем обозначать $\gamma_{i,j} = \gamma_{j,i}$. Для вершины i определим $\rho_i = \sum_{j \sim i} \gamma_{i,j}$.

Утверждение 3.4. *Пусть Γ — связный граф с положительными весами на ребрах. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$,

(2) *существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $x_k \in H_k^{\perp}$, $1 \leqslant k \leqslant n$,*

$$2 \sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \gamma_{i,j} |(x_i, x_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \varepsilon) \|x_i\|^2. \tag{3.2}$$

Доказательство. $(2) \Rightarrow (1)$. Для произвольных $x_k \in H_k^{\perp}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеем

$$\sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \gamma_{i,j} \|x_i - x_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \|x_i\|^2 - 2 \sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \gamma_{i,j} \mathrm{Re}(x_i, x_j) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \rho_i \|x_i\|^2 - 2 \sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \gamma_{i,j} |(x_i, x_j)| \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Из утверждения 3.3 следует, что $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$.

$(1) \Rightarrow (2)$. Докажем требуемое утверждение индукцией по $|E(\Gamma)|$. Наименьшее возможное значение $|E(\Gamma)|$ равно $n-1$ и достигается тогда и только тогда, когда Γ — дерево. Из утверждения 3.3 следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \gamma_{i,j} \|y_i - y_j\|^2 \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2$$

для произвольных $y_k \in H_k^{\perp}$, т. е.

$$2 \sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma)} \gamma_{i,j} \mathrm{Re}(y_i, y_j) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \varepsilon) \|y_i\|^2. \tag{3.3}$$

Зафиксируем произвольные $x_k \in H_k^{\perp}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. В неравенство (3.3) подставим $y_k = e^{i\varphi_k} x_k$, где $\varphi_k \in \mathbb{R}$. Поскольку Γ — дерево, φ_k можно выбрать так, что $(y_k, y_l) = |(x_k, x_l)|$, если $k \sim l$. Тогда из неравенства (3.3) следует требуемое.

Выполним индукционный переход. Пусть $|E(\Gamma)| \geqslant n$. Тогда в Γ есть цикл $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $i_k \sim i_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ (здесь $i_{m+1} = i_1$). Для $k = 1, 2, \ldots, m$ обозначим через Γ_k граф, полученный из Γ удалением ребра $\{i_k, i_{k+1}\}$. Ясно, что Γ_k связен. Веса $\gamma_{i,j}^{(k)}$ на ребрах Γ_k определим следующим образом: если ребро $\{i,j\}$ является ребром цикла $\{i_p, i_{p+1}\}$, то $\gamma_{i,j}^{(k)} = \gamma_{i,j}$, иначе $\gamma_{i,j}^{(k)} = \dfrac{m-1}{m} \gamma_{i,j}$. Из предположения индукции следует, что существует $\varepsilon_k > 0$ такое, что для Γ_k выполнено неравенство (3.2). Уменьшив ε_k, можно считать, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = \varepsilon$. Для произвольных $x_i \in H_i^{\perp}$ имеем

$$2 \sum_{\{i,j\} \in E(\Gamma_k)} \gamma_{i,j}^{(k)} |(x_i, x_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\rho_i^{(k)} - \varepsilon) \|x_i\|^2.$$

Прибавив эти неравенства для $k = 1, 2, \ldots, m$, получим неравенство

$$2(m-1)\sum_{\{i,j\}\in E(\Gamma)}\gamma_{i,j}|(x_i,x_j)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}((m-1)\rho_i-m\varepsilon)\|x_i\|^2.$$

Разделив его на $m-1$, будем иметь требуемое утверждение.

Утверждение 3.4 доказано.

4. Линейно независимые системы подпространств.

Определение 4.1. *Подпространства $X_1,\ldots,X_n$ банахова пространства X линейно независимы, если из*

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=0,\quad x_j\in X_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

следует $x_1=\ldots=x_n=0$.

В этом пункте будем изучать n-ки подпространств с замкнутой суммой с дополнительным условием линейной независимости n-ки. Свойство линейной независимости „хорошо сочетается" со свойством замкнутости суммы. Как мы увидим в этом пункте, некоторые свойства n-ок, неверные только при условии замкнутости суммы, становятся верными при дополнительном условии линейной независимости.

Отметим, что при $n\geqslant 3$ задача об описании неприводимых n-ок ортопроекторов с точностью до унитарной эквивалентности чрезвычайно сложна (см., например, [19]). Поэтому „хорошего" представления (типа представления П. Халмоша для пары подпространств) n-ки подпространств при $n\geqslant 3$ нет. Однако некоторые представления для линейно независимых n-ок подпространств с суммой H существуют (см., например, [23]). В указанной работе используется, но не доказано, что если $H_1,\ldots,H_n$ — линейно независимые подпространства H и $H_1+\ldots+H_n=H$, то для всех $1\leqslant k\leqslant n$ сумма $H_1+\ldots+H_k$ замкнута. Это легко восполнить с помощью следствия 4.1.

Приведем несколько примеров условий, при выполнении которых подпространства $H_1,\ldots,H_n$ линейно независимы, а их сумма замкнута.

***Пример* 4.1.** Пусть $H_1,\ldots,H_n$ — ненулевые подпространства гильбертова пространства H, $P_1,\ldots,P_n$ — соответствующие ортопроекторы, $\tau_1,\ldots,\tau_n$ — положительные числа. Предположим, для некоторого $\gamma>0$ выполнено $\tau_1P_1+\ldots+\tau_nP_n\leqslant\gamma I$. Покажем, что если

$$\gamma<\frac{\sum_{j=1}^{n}\tau_j}{n-1},\tag{4.1}$$

то $H_1,\ldots,H_n$ линейно независимы, а их сумма замкнута.

Поскольку $H_j\neq 0$, $1\leqslant j\leqslant n$, то $\tau_j\leqslant\gamma$, $1\leqslant j\leqslant n$. Определим подпространства $M_k=\overline{H_1+\ldots+H_k}$, $1\leqslant k\leqslant n$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2 в [25], убеждаемся, что для всех $1\leqslant k\leqslant n$ выполнено $\tau_1P_1+\ldots+\tau_kP_k\geqslant(\tau_1+\ldots+\tau_k-(k-1)\gamma)P_{M_k}$. Подставляя в это неравенство $k=n$ и используя неравенство (4.1), получаем, что $H_1+\ldots+H_n$ — подпространство. Покажем, что $H_1,\ldots,H_n$ линейно независимы. Предположим, что существует $x\in H_n\cap(H_1+\ldots+H_{n-1})$, $x\neq 0$. Тогда из неравенств

$$\gamma||x||^2 \geqslant ((\tau_1 P_1 + \ldots + \tau_{n-1} P_{n-1})x, x) + \tau_n (P_n x, x) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} \tau_k - (n-2)\gamma \right) ||x||^2 + \tau_n ||x||^2$$

получаем $\gamma \geqslant \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \tau_j}{n-1}$. Пришли к противоречию. Из соображений симметрии имеем $H_i \cap \left(\sum_{j \neq i} H_i \right) = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, что и означает линейную независимость $H_1, \ldots, H_n$.

Оценка (4.1) для γ, при выполнении которой $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы, а их сумма замкнута, вообще говоря, неулучшаема. В работе [25] показано, что в гильбертовом пространстве $H = \mathbb{C}^{n-1}$ существуют одномерные подпространства $H_1, \ldots, H_n$, для которых $P_1 + \ldots + P_n = \dfrac{n}{n-1} I$. Ясно, что $H_1, \ldots, H_n$ линейно зависимы.

***Пример* 4.2** [13]**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $T \colon X \to Y$, $S \colon Y \to Z$ — линейные непрерывные операторы. Предположим, что $ST \colon X \to Z$ — изоморфизм. Тогда $\mathrm{Im}(T)$ — подпространство; подпространства $\mathrm{Im}(T)$ и $\ker(S)$ линейно независимы и их сумма равна Y.

4.1. Критерий замкнутости суммы линейно независимых подпространств. Примеры его использования.

Теорема 4.1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — подпространства банахова пространства X. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если для некоторого $\varepsilon > 0$ и для произвольных $x_j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполнено*

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \geqslant \varepsilon(\|x_1\| + \ldots + \|x_{n-1}\|),$$

то $X_1, \ldots, X_n$ линейно независимы и их сумма — подпространство;

(2) *если $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые подпространства, $X_1 + \ldots + X_n$ — подпространство, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $x_j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполнено*

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \geqslant \varepsilon(\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|).$$

Доказательство. Докажем (1). Ясно, что $X_1, \ldots, X_n$ линейно независимы. Покажем, что $X_1 + \ldots + X_n$ — подпространство. Пусть $x_{k,1} + \ldots + x_{k,n} \to z$, где $x_{k,i} \in X_i$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку

$$\|x_{k,1} + \ldots + x_{k,n} - (x_{l,1} + \ldots + x_{l,n})\| \geqslant \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n-1} \|x_{k,i} - x_{l,i}\| \right),$$

при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ последовательность $\{x_{k,i},\ k \geqslant 1\}$ фундаментальна, а потому $x_{k,i} \to x_i \in X_i$. Поэтому последовательность $x_{k,n} \to x_n \in X_n$. Тогда

$$z = x_1 + \ldots + x_n,$$

откуда следует замкнутость $X_1 + \ldots + X_n$.

Докажем (2). На пространстве $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ определим норму $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, относительно которой это пространство банахово. Рассмотрим оператор $A\colon X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \to X_1 + \ldots + X_n$, определенный равенством $A(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$.

Очевидно, A является линейным непрерывным оператором между банаховыми пространствами, причем A — биекция. По теореме Банаха A обратим, откуда непосредственно следует нужное неравенство.

Теорема 4.1 доказана.

***Замечание* 4.1.** Вместо $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ иногда удобнее рассматривать эквивалентную величину $\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$. Тогда условие замкнутости $X_1 + \ldots + X_n$ и линейной независимости $X_1, \ldots, X_n$ примет вид

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^p \geqslant \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольных $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$.

***Следствие* 4.1.** *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые подпространства банахова пространства X и сумма $X_1 + \ldots + X_n$ — подпространство. Тогда для произвольного набора индексов $i(1), \ldots, i(k)$ сумма $X_{i(1)} + \ldots + X_{i(k)}$ является подпространством.*

***Следствие* 4.2.** *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые подпространства банахова пространства X, сумма $X_1 + \ldots + X_n$ — подпространство и подпространство $Y_k \subset X_k$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $Y_1 + \ldots + Y_n$ является подпространством.*

Следствие 4.1 показывает, что при условии линейной независимости из замкнутости суммы всех подпространств следует замкнутость суммы любого поднабора. Если не накладывать условия линейной независимости, то это утверждение неверно. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множество $\{I \subset \mathbb{N}_n, |I| \geqslant 2\}$ разбито на две части: I_c и I_{nc}. Тогда существуют гильбертово пространство H и n-ка подпространств $H_1, \ldots, H_n$ в нем такие, что если $I \in I_c$, то $\sum_{j \in I_c} H_j$ замкнута, а если $I \in I_{nc}$, то $\sum_{j \in I_{nc}} H_j$ не замкнута.*

Доказательство. 1. Сначала построим пример гильбертова пространства H и его подпространств $H_1, \ldots, H_n$ таких, что для произвольного $I \subset \mathbb{N}_n, |I| \leqslant n - 1$, сумма $\sum_{j \in I} H_j$ замкнута, а $H_1 + \ldots + H_n$ не замкнута. Для $k \geqslant 1$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ и определим набор одномерных подпространств $H_{1,k} = \langle e_1 \rangle, \ldots, H_{n-1,k} = \langle e_{n-1} \rangle$, $H_{n,k} = \left\langle e_1 + \ldots + e_{n-1} + \frac{1}{k} e_n \right\rangle$. Легко видеть, что гильбертово пространство $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}^n$ и набор подпространств $H_j = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{j,k}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеют нужные свойства.

2. Докажем утверждение 4.1 индукцией по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Выполним индукционный переход. Предположим, что $\{1, 2, \ldots, n\} \in I_c$. Для n гильбертовых пространств $L_1, \ldots, L_n$ определим $H = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ и

$$H_j = R_{j,1} \oplus \ldots \oplus R_{j,j-1} \oplus L_j \oplus R_{j,j+1} \oplus \ldots \oplus R_{j,n}$$

для некоторых подпространств $R_{j,i} \subset L_i$. Очевидно, $H_1 + \ldots + H_n = H$. Осталось выбрать подпространства $\{R_{j,i}\}$, чтобы выполнялись все нужные условия. Зафиксируем произвольное $1 \leqslant m \leqslant n$. На подпространства $R_{j,m}$, $j \neq m$, наложим такие условия: если множество $I \subset \mathbb{N}_n \setminus \{m\}$ является элементом I_c, то $\sum_{j\in I} R_{j,m}$ замкнута, если же I является элементом I_{nc}, то сумма $\sum_{j\in I} R_{j,m}$ не замкнута. Из индукционного предположения следует, что существуют гильбертово пространство L_m и набор подпространств $R_{j,m}$, $j \neq m$, с нужными свойствами. Очевидно, построенная n-ка $H_1, \ldots, H_n$ гильбертова пространства H имеет нужные свойства.

Пусть теперь $\{1, 2, \ldots, n\} \in I_{nc}$. Возьмем гильбертово пространство K и набор подпространств $K_1, \ldots, K_n$ в нем такие, что для всех множеств $I \subset \mathbb{N}_n$, $|I| \leqslant n-1$, сумма $\sum_{j\in I} K_j$ замкнута, а сумма $K_1 + \ldots + K_n$ не замкнута. Для гильбертовых пространств $L_1, \ldots, L_n$ определим $H = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n \oplus K$ и подпространства

$$H_j = R_{j,1} \oplus \ldots \oplus R_{j,j-1} \oplus L_j \oplus R_{j,j+1} \oplus \ldots \oplus R_{j,n} \oplus K_j$$

для некоторых подпространств $R_{j,i} \subset L_i$. Очевидно, сумма $H_1 + \ldots + H_n$ не замкнута. Для фиксированного $1 \leqslant m \leqslant n$ набор подпространств $R_{j,m}$, $j \neq m$, пространства L_m (и само L_m) выбирается аналогично предыдущему случаю.

Утверждение 4.1 доказано.

Аналогом предыдущего утверждения для линейно независимых n-ок подпространств, с учетом следствия 4.1, является следующее утверждение.

Утверждение 4.2. *Пусть $n \geqslant 2$ и множество $\{I \subset \mathbb{N}_n, |I| \geqslant 2\}$ разбито на две части: I_c и I_{nc}, причем выполнено следующее условие: если $A, B \subset \mathbb{N}_n$, $|A| \geqslant 2$, $|B| \geqslant 2$, $A \subset B$ и $B \in I_c$, то $A \in I_c$. Тогда существуют гильбертово пространство H и линейно независимые подпространства $H_1, \ldots, H_n$ в нем такие, что если $I \in I_c$, то $\sum_{j\in I_c} H_j$ замкнута, а если $I \in I_{nc}$, то $\sum_{j\in I_{nc}} H_j$ не замкнута.*

Доказательство. Положим $N = 2^n - 1 - n$. Занумеруем элементы множества $\{I \subset \mathbb{N}_n, |I| \geqslant 2\}$ числами от 1 до N, т. е. $\{I \subset \mathbb{N}_n, |I| \geqslant 2\} = \{I_1, \ldots, I_N\}$. Гильбертово пространство H и линейно независимые подпространства $H_1, \ldots, H_n$ в нем будем искать в следующем виде:

$$H_i = R_{i,1} \oplus \ldots \oplus R_{i,N},\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ H = R_1 \oplus \ldots \oplus R_N,$$

где для каждого $1 \leqslant j \leqslant N$ $R_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, есть подпространства гильбертова пространства R_j. Покажем, как их выбрать, чтобы выполнялись требуемые условия. Зафиксируем $1 \leqslant j \leqslant N$ и пусть $I_j = \{i(1), \ldots, i(s)\}$. Предположим, что $I_j \in I_{nc}$. Существуют гильбертово пространство K и линейно независимые подпространства $K_1, \ldots, K_s$ в нем такие, что $\sum_{l\in J} K_l$ замкнута для всех $J \subset \{1, 2, \ldots, s\}$, $|J| < s$, а сумма $K_1 + \ldots + K_s$ не замкнута. Положим $R_j = K$, $R_{i(1),j} = K_1, \ldots, R_{i(s),j} = K_s$, остальные $R_{i,j} = 0$. Предположим, что $I_j \in I_c$. Тогда положим $R_j = \mathbb{C}^1$, $R_{1,j} = \ldots = R_{n,j} = 0$. Легко видеть, что построенные таким образом подпространства $H_1, \ldots, H_n$ гильбертова пространства H удовлетворяют всем нужным условиям.

Утверждение 4.2 доказано.

Приведем несколько примеров использования теоремы 4.1.

***Пример* 4.3.** *Пусть X, Y — банаховы пространства, линейные непрерывные операторы $a_1, \ldots, a_n \colon X \to Y$ таковы, что оператор $a = \sum_{k=1}^{n} a_k$ обратим. Тогда подпространства $X_i = \bigcap_{j \neq i} \ker(a_j),\ 1 \leqslant i \leqslant n$, линейно независимы и их сумма замкнута.*

Доказательство. Пусть $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим произвольное $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$\|a_k\| \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \geqslant \|a_k x_k\| = \|a x_k\| \geqslant \|a^{-1}\|^{-1} \|x_k\|.$$

Прибавив полученые неравенства для $k = 1, 2, \ldots, n$, из теоремы 4.1 получим нужное утверждение.

В частности, если $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$, то $\sum_{k=1}^{n} P_k$ обратим, а поэтому подпространства $M_k = \bigcap_{i \neq k} H_i^{\perp}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, линейно независимы и их сумма замкнута.

***Пример* 4.4.** Покажем связь между операторами с конечным спектром и системами линейно независимых подпространств с суммой H. Пусть $A \colon H \to H$ — линейный непрерывный оператор с конечным спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Пусть Γ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — окружность достаточно малого радиуса с центром в λ_k. Напомним, что проектором Рисса, соответствующим изолированной точке спектра λ_k, называется оператор $R_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_k} R(z, A)\, dz = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_k} (zI - A)^{-1}\, dz$. Известно (см., например, [27]), что $R_k \neq 0$ при всех k, $R_k^2 = R_k$, $R_i R_j = 0$ при $i \neq j$, сумма $R_1 + \ldots + R_n = I$.

Определим $H_k = \mathrm{Im}(R_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Подпространство H_k называется подпространством Рисса, соответствующим изолированной точке спектра λ_k. Очевидно, $H_1, \ldots, H_n$ — ненулевые линейно независимые подпространства, сумма которых равна H. Справедливо и обратное утверждение.

Утверждение 4.3. *Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — множество n комплексных чисел, $H_1, \ldots, H_n$ — ненулевые линейно независимые подпространства H, сумма которых равна H. Тогда найдется линейный непрерывный оператор $A \colon H \to H$ со спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, для которого H_k является подпространством Рисса, соответствующим λ_k для всех $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Доказательство. Каждый $x \in H$ однозначно представляется в виде $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, где $x_k \in H_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Определим $Q_k x = x_k$, тогда из теоремы 4.1 следует, что Q_k ограничен.

Определим линейный непрерывный оператор $A \colon H \to H$ равенством $Ax = \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n$. Иначе говоря, для $x = x_1 + \ldots + x_n$, $x_i \in H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $Ax = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Очевидно, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Для точки λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, соответствующий проектор Рисса равен

$$R_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} (zI - A)^{-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \lambda_j} Q_j\, dz = Q_k,$$

а поэтому соответствующее подпространство Рисса равно H_k.

Утверждение 4.3 доказано.

Покажем несколько применений теоремы 4.1 для гильбертова пространства H.

***Пример* 4.5.** Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства гильбертова пространства H. Сформулируем условие их линейной независимости и замкнутости их суммы. Это равносильно существованию $\varepsilon > 0$ такого, что для произвольных действительных чисел $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, не равных одновременно 0, и для произвольных $x_k \in H_k$, $\|x_k\| = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, выполняется неравенство $\|t_1x_1 + \ldots + t_nx_n\|^2 > \varepsilon(t_1^2 + \ldots + t_n^2)$. Поставленное условие равносильно положительной определенности действительной симметричной матрицы

$$A_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \mathrm{Re}(x_1, x_2) & \ldots & \mathrm{Re}(x_1, x_n) \\ \mathrm{Re}(x_2, x_1) & 1-\varepsilon & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{Re}(x_{n-1}, x_n) \\ \mathrm{Re}(x_n, x_1) & \ldots & \mathrm{Re}(x_n, x_{n-1}) & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Используя критерий Сильвестра, можно получить необходимые и достаточные условия для положительной определенности $A_{\mathbb{R}}$. В частности, при $n = 2$ имеем условие $|\mathrm{Re}(x_1, x_2)| < 1 - \varepsilon$, которое равносильно условию $|(x_1, x_2)| < 1 - \varepsilon$ для всех $x_j \in H_j$, $\|x_j\| = 1$, $j = 1, 2$.

При $n = 3$ имеем условия:

(1) $|\mathrm{Re}(x_1, x_2)| < 1 - \varepsilon$,

(2) $(\mathrm{Re}(x_1, x_2))^2 + (\mathrm{Re}(x_2, x_3))^2 + (\mathrm{Re}(x_3, x_1))^2 < (1-\varepsilon)^2 + \dfrac{2}{1-\varepsilon}\mathrm{Re}(x_1, x_2)\times$ $\times\mathrm{Re}(x_2, x_3)\mathrm{Re}(x_3, x_1)$.

Аналогично можно найти условие линейной независимости и замкнутости суммы подпространств $H_1, \ldots, H_n$, считая числа $t_1, \ldots, t_n$ комплексными. Тогда приходим к условию положительной определенности эрмитовой матрицы

$$A_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & 1-\varepsilon & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (x_{n-1}, x_n) \\ (x_n, x_1) & \ldots & (x_n, x_{n-1}) & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Используя критерий Сильвестра, можно получить необходимые и достаточные условия для положительной определенности $A_{\mathbb{C}}$. В частности, при $n = 3$ имеем условия:

(1) $|(x_1, x_2)| < 1 - \varepsilon$,

(2) $|(x_1, x_2)|^2 + |(x_2, x_3)|^2 + |(x_3, x_1)|^2 < (1-\varepsilon)^2 + \dfrac{2}{1-\varepsilon}\mathrm{Re}((x_1, x_2)(x_2, x_3)\times$ $\times(x_3, x_1))$.

***Пример* 4.6.** Пусть H — гильбертово пространство, $n \geq 2$ и для каждого $k = 1, \ldots, n$ $\{e_{k,s},\ s \in \mathbb{Z}\}$ — ортонормированная система в H. Пусть H_k — подпространство, порожденное системой $\{e_{k,s},\ s \in \mathbb{Z}\}$.

Использовав предыдущий пример, найдем достаточные условия, при которых подпространства $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы, а их сумма $H_1 + \ldots + H_n$ является подпространством.

Для каждого целого p и индексов $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ определим $\alpha_{i,j,p} = \sup_{l-k=p} |(e_{i,k}, e_{j,l})|$. Очевидно, что $\alpha_{i,j,p} = \alpha_{j,i,-p}$. Для каждой пары $i \neq j$,

$1 \leqslant i, j \leqslant n$, определим $\beta_{i,j} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{i,j,p}$. Предположим, что $\beta_{i,j} < \infty$ для всех $i \neq j$.

Пусть $x_k = \sum_{s \in \mathbb{Z}} x_{k,s} e_{k,s} \in H_k$ для $k = 1, \ldots, n$, причем $\|x_k\| = 1$. Это означает, что $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |x_{k,s}|^2 = 1$. Тогда для произвольных $i \neq j$ имеем

$$|(x_i, x_j)| \leqslant \sum_{v,w \in \mathbb{Z}} |x_{i,v}||x_{j,w}|\alpha_{i,j,w-v} \leqslant \beta_{i,j},$$

откуда $|\mathrm{Re}(x_i, x_j)| \leqslant \beta_{i,j}$.

Для $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{k \neq l} t_k t_l \mathrm{Re}(x_k, x_l) \geqslant -\sum_{k \neq l} \beta_{k,l} |t_k||t_l|.$$

Отсюда следует, что если существует $\varepsilon > 0$, для которого матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\beta_{1,2} & \ldots & -\beta_{1,n} \\ -\beta_{2,1} & 1-\varepsilon & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\beta_{n-1,n} \\ -\beta_{n,1} & \ldots & -\beta_{n,n-1} & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

положительно определена, то подпространства $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы и их сумма замкнута. В частности, если $\max_k \left(\sum_{l \neq k} \beta_{k,l} \right) < 1$, то это условие выполнено $\left(\text{при } \varepsilon < 1 - \max_k \left(\sum_{l \neq k} \beta_{k,l} \right) \right)$.

Следующий пример мотивирован результатами работ [2, 12]. К сожалению, в работе [12] есть ошибки. На с. 184 определение $\overline{\mathbb{P}}(A \cap B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$ для $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$, вообще говоря, некорректно, поскольку множество может допускать различные представления в виде $A \cap B$, $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$. Кроме того, наложив дополнительные условия на σ-алгебры $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, чтобы определение $\overline{\mathbb{P}}$ стало корректным (такое условие мы приводим в следующем примере), для продолжения по Каратеодори надо показать, что $\overline{\mathbb{P}}$ является мерой на полуалгебре $\Gamma = \{A \cap B, A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$.

***Пример* 4.7** (замкнутость суммы маргинальных подпространств)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ — σ-алгебры, причем $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Будем говорить, что $\mathcal{F}$-измеримые комплекснозначные случайные величины ξ и η эквивалентны, если $\mathbf{P}\{\xi \neq \eta\} = 0$. Определим пространство H как множество классов эквивалентности всех $\mathcal{F}$-измеримых комплекснозначных случайных величин ξ, для которых $\int_\Omega |\xi|^2 \, d\mathbf{P} < \infty$ и $\int_\Omega \xi \, d\mathbf{P} = 0$. Ясно, что H — гильбертово пространство относительно скалярного произведения $(\xi, \eta) = \int_\Omega \xi \overline{\eta} \, d\mathbf{P}$. Пусть H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — множество классов эквивалентности из H, в которых есть хотя бы одна $\mathcal{F}_i$-измеримая случайная величина. Легко видеть, что H_i — подпространство H. H_i называют маргинальным подпространством H. Наша цель — показать, что если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geqslant \varepsilon \mathbf{P}(A_1) \ldots \mathbf{P}(A_n), \tag{4.2}$$

то $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы и их сумма является подпространством. Итак, далее считаем, что выполнено неравенство (4.2). Через $\mathbf{P}_n$ обозначим продакт-меру $\underbrace{\mathbf{P} \times \ldots \times \mathbf{P}}_{n}$ на измеримом пространстве $\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \ldots \times \Omega}_{n}$ с σ-алгеброй $\underbrace{\mathcal{F} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}}_{n}$ (порожденной измеримыми брусами $A_1 \times \ldots \times A_n$, $A_i \in \mathcal{F}$, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Лемма 4.1. *Пусть $X_i, Y_i \in \mathcal{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subset Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$. Тогда*

$$\boldsymbol{P}_n((X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus (Y_1 \times \ldots \times Y_n)) = 0.$$

Доказательство. Поскольку $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subset Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$, для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ $X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1} \cap (X_i \setminus Y_i) \cap X_{i+1} \ldots \cap X_n = \varnothing$. Из (4.2) следует, что $\mathbf{P}_n(X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times (X_i \setminus Y_i) \times X_{i+1} \ldots \times X_n) = 0$.

Лемма 4.1 доказана.

Определим класс множеств $\mathcal{P} = \{X_1 \cap \ldots \cap X_n,\, X_i \in \mathcal{F}_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Очевидно, $\mathcal{P}$ — полуалгебра. Определим функцию множеств $\mathbf{Q}$ на $\mathcal{P}$ равенством

$$\mathbf{Q}(X_1 \cap \ldots \cap X_n) = \mathbf{P}(X_1) \ldots \mathbf{P}(X_n) = \mathbf{P}_n(X_1 \times \ldots \times X_n).$$

В силу леммы 4.1 $\mathbf{Q}$ определена корректно. Покажем, что $\mathbf{Q}$ — мера на $\mathcal{P}$. Для этого необходима следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть множества $X_{k,j} \in \mathcal{F}_j$, $1 \leqslant k \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда*

$$\boldsymbol{P}_n\left(\bigcup_{k=1}^{t} X_{k,1} \times \ldots \times X_{k,n}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{k=1}^{t} X_{k,1} \cap \ldots \cap X_{k,n}\right).$$

Доказательство. Представим множество $\bigcup_{k=1}^{t} X_{k,1} \times \ldots \times X_{k,n}$ в виде $\bigcup_{l=1}^{s} Y_{l,1} \times \ldots \times Y_{l,n}$, где множества $Y_{l,j} \in \mathcal{F}_j$, $1 \leqslant l \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и множества $Y_{l,1} \times \ldots \times Y_{l,n}$, $l \geqslant 1$, попарно не пересекаются. Тогда

$$\mathbf{P}_n\left(\bigcup_{k=1}^{t} X_{k,1} \times \ldots \times X_{k,n}\right) = \mathbf{P}_n\left(\bigcup_{l=1}^{s} Y_{l,1} \times \ldots \times Y_{l,n}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \mathbf{P}_n(Y_{l,1} \times \ldots \times Y_{l,n}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{s} \mathbf{P}(Y_{l,1} \cap \ldots \cap Y_{l,n}) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}\left(\bigcup_{l=1}^{s} Y_{l,1} \cap \ldots \cap Y_{l,n}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{t} X_{k,1} \cap \ldots \cap X_{k,n}\right),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4.2 доказана.

Теперь покажем, что $\mathbf{Q}$ является мерой на $\mathcal{P}$. Предположим, что

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{k,1} \cap \ldots \cap A_{k,n}),$$

где $A_j, A_{k,j} \in \mathcal{F}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $k \geqslant 1$, и множества $A_{k,1} \cap \ldots \cap A_{k,n}$, $k \geqslant 1$, попарно не пересекаются. Определим на Ω^n функции

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{I}_{A_1}(x_1) \ldots \mathbb{I}_{A_n}(x_n),\; F_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_{k,1}}(x_1) \ldots \mathbb{I}_{A_{k,n}}(x_n).$$

Покажем, что $F_1 = F_2$ почти всюду относительно $\mathbf{P}_n$. Для этого предположим, что для элемента $(x_1, \ldots, x_n)$ $F_1 \neq F_2$. Возможны следующие варианты:

(1) $F_1 = 0, F_2 \geqslant 1$,

(2) $F_1 = 1, F_2 \geqslant 2$,

(3) $F_1 = 1, F_2 = 0$.

Множество элементов $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполнено (1), имеет вид

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} (A_{k,1} \times \ldots \times A_{k,j-1} \times (A_{k,j} \setminus A_j) \times A_{k,j+1} \times \ldots \times A_{k,n}),$$

и в силу леммы 4.1 имеет $\mathbf{P}_n$-меру 0.

Множество элементов $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых имеет место второй случай, вложено в множество

$$\bigcup_{k>l} ((A_{k,1} \cap A_{l,1}) \times \ldots \times (A_{k,n} \cap A_{l,n})),$$

которое, как следует из неравенства (4.2), имеет $\mathbf{P}_n$-меру 0.

Осталось показать, что множество элементов, для которых имеет место третий вариант, имеет $\mathbf{P}_n$-меру 0. Это множество равно $A_1 \times \ldots \times A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,1} \times \ldots \times A_{k,n}$. Имеем

$$\mathbf{P}_n \left(A_1 \times \ldots \times A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,1} \times \ldots \times A_{k,n} \right) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_n \left(A_1 \times \ldots \times A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{t} A_{k,1} \times \ldots \times A_{k,n} \right) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_n \left(\bigcup_{I_1 \bigcup \ldots \bigcup I_n = \mathbb{N}_t} \left(A_1 \setminus \bigcup_{k \in I_1} A_{k,1} \right) \times \ldots \times \left(A_n \setminus \bigcup_{k \in I_n} A_{k,n} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P} \left(\bigcup_{I_1 \bigcup \ldots \bigcup I_n = \mathbb{N}_t} \left(A_1 \setminus \bigcup_{k \in I_1} A_{k,1} \right) \cap \ldots \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{k \in I_n} A_{k,n} \right) \right) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P} \left(A_1 \cap \ldots \cap A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{t} A_{k,1} \cap \ldots \cap A_{k,n} \right) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P} \left(\bigcup_{k \geqslant t+1} A_{k,1} \cap \ldots \cap A_{k,n} \right) = 0.$$

Интегрируя равенство $F_1 = F_2$, выполненное почти всюду относительно $\mathbf{P}_n$, по множеству Ω^n и мере $\mathbf{P}_n$, получаем

$$\mathbf{Q}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}(A_{k,1} \cap \ldots \cap A_{k,n}).$$

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{Q}$ — мера на $\mathcal{P}$. $\mathbf{Q}$ имеет единственное продолжение на σ-алгебру $\mathcal{G} = \sigma a(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}$. При этом $\mathbf{P}(A) \geqslant \varepsilon \mathbf{Q}(A)$, $A \in \mathcal{G}$ (поскольку это неравенство выполнено для множеств $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$, $A_j \in \in \mathcal{F}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Также отметим, что если ξ_j является $\mathcal{F}_j$-измеримой случайной величиной, интегрируемой по $\mathbf{P}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, то величина $\xi_1 \ldots \xi_n$ $\mathcal{G}$-измерима и интегрируема по мере $\mathbf{Q}$, причем

$$\int\limits_{\Omega} \xi_1 \ldots \xi_n \, d\mathbf{Q} = \int\limits_{\Omega} \xi_1 \, d\mathbf{P} \ldots \int\limits_{\Omega} \xi_n \, d\mathbf{P}.$$

Теперь легко показать, что $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы и их сумма замкнута. Пусть $\xi_j \in H_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, является $\mathcal{F}_j$-измеримой случайной величиной. Неравенство

$$\|\xi_1 + \ldots + \xi_n\|^2 \geqslant \varepsilon(\|\xi_1\|^2 + \ldots + \|\xi_n\|^2)$$

равносильно неравенству

$$\int\limits_{\Omega} |\xi_1 + \ldots + \xi_n|^2 \, d\mathbf{P} \geqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} |\xi_1 + \ldots + \xi_n|^2 \, d\mathbf{Q},$$

которое, очевидно, выполнено.

***Замечание* 4.2.** Полученный результат можно применить в следующем случае. Пусть $(\Omega_j, \mathcal{G}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, — измеримое пространство, $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ и σ-алгебра $\mathcal{F} = \mathcal{G}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{G}_n$. Определим σ-алгебру

$$\mathcal{F}_j = \{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n, \, A_j \in \mathcal{G}_j\}$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и маргинальную вероятность $\mathbf{P}_j$ на $(\Omega_j, \mathcal{G}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, равенством

$$\mathbf{P}_j(A_j) = \mathbf{P}(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n), \, A_j \in \mathcal{G}_j.$$

Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $A_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{G}_n$

$$\mathbf{P}(A_1 \times \ldots \times A_n) \geqslant \varepsilon \mathbf{P}_1(A_1) \ldots \mathbf{P}_n(A_n),$$

то маргинальные подпространства $H_1, \ldots, H_n$ (в данном случае H_j — множество (классов эквивалентности) случайных величин $\xi(x_1, \ldots, x_n) = \eta(x_j)$, где η $\mathcal{G}_j$-измерима) линейно независимы, а их сумма является подпространством.

4.2. Свойство обратного наилучшего приближения системы подпространств гильбертова пространства. Пусть H — гильбертово пространство, H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — система его подпространств с соответствующими ортопроекторами P_i.

Определение 4.2. *Будем говорить, что n-ка подпространств $H_1, \ldots, H_n$ имеет свойство обратного наилучшего приближения относительно набора линейных непрерывных операторов $A_i \colon H \to H$, $1 \leqslant i \leqslant n$, если*:

(1) $\mathrm{Im}(A_i) \subset H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

(2) *для произвольных $u_1 \in H_1, \ldots, u_n \in H_n$ найдется $x \in H$ такой, что $A_k x = u_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Системы подпространств, имеющие свойство обратного наилучшего приближения относительно $A_i = P_i$, изучаются в [7]. Далее будем предполагать условие (1) определения 4.2 выполненным.

Определим оператор $A \colon H \to \bigoplus_{k=1}^n H_k$ равенством $Ax = (A_1 x, \ldots, A_n x)$, $x \in H$, тогда $A^*(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^n A_k^* y_k$. Система подпространств H_i, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant n$, имеет свойство обратного наилучшего приближения относительно A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(A) = \bigoplus_{k=1}^n H_k$. Это равносильно тому, что A^* является изоморфным вложением (т. е. $\|A^* y\| \geqslant \varepsilon \|y\|$, $y \in \bigoplus_{k=1}^n H_k$, для некоторого $\varepsilon > 0$). Последнее равносильно существованию $\varepsilon > 0$ такого, что для произвольных $y_i \in H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\left\| \sum_{k=1}^n A_k^* y_k \right\| \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^n \|y_k\| \tag{4.3}$$

(мы перешли к эквивалентной норме).

Утверждение 4.4. *Система подпространств H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеет свойство обратного наилучшего приближения относительно набора операторов A_i, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant n$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(1) $A_k^* \restriction_{H_k}$ — *изоморфное вложение,*

(2) *подпространства $A_k^*(H_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, линейно независимы и их сумма замкнута.*

Доказательство. *Необходимость.* Из неравенства (4.3) следует, что $\|A_k^* y_k\| \geqslant \geqslant \varepsilon \|y_k\|$, $y_k \in H_k$, т. е. $A_k^* \restriction_{H_k}$ является изоморфным вложением. Поэтому $A_k^*(H_k)$ — подпространство. С помощью неравенства (4.3) легко получить (2).

Достаточность. Из (1) следует, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для $y_k \in H_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, выполнено $\|A_k^* y_k\| \geqslant \varepsilon_1 \|y_k\|$. Из (2) следует, что существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для произвольных $z_i \in A_i^*(H_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполнено $\left\| \sum_{i=1}^n z_i \right\| \geqslant \geqslant \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \|z_i\|$. Тогда для произвольных $y_i \in H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n A_i^* y_i \right\| \geqslant \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \|A_i^* y_i\| \geqslant \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \|y_i\|,$$

откуда следует требуемое утверждение.

Утверждение 4.4 доказано.

Утверждение 4.5. *Пусть* $\ker(A_k) = \ker(A_k^*)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Система подпространств H_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеет свойство обратного наилучшего приближения относительно набора операторов A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(1) $a_k = A_k \restriction_{H_k} \colon H_k \to H_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *обратим,*

(2) $H_1, \ldots, H_n$ *линейно независимы и их сумма замкнута.*

Доказательство. Относительно ортогонального разложения $H = H_k \oplus H_k^{\perp}$ оператор $A_k = a_k \oplus 0_{H_k^{\perp}}$.

Необходимость. Из утверждения 4.4 следует, что a_k^* — изоморфное вложение. Поэтому $\mathrm{Im}(a_k) = H_k$. Поскольку $\ker(A_k) = \ker(A_k^*)$, то $\ker(a_k) = \ker(a_k^*) = 0$. Поэтому a_k обратим. Следовательно, a_k^* также обратим, $\mathrm{Im}(a_k^*) = H_k$. Из утверждения 4.4 следует, что $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы и их сумма замкнута.

Достаточность следует из утверждения 4.4.

Утверждение 4.5 доказано.

***Пример* 4.8.** Пусть $A_k = P_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Система подпространств $H_1, \ldots, H_n$ имеет свойство обратного наилучшего приближения относительно P_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, тогда и только тогда, когда $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы и их сумма замкнута.

Другие критерии того, что $H_1, \ldots, H_n$ имеет свойство обратного наилучшего приближения относительно P_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, см. в [7] (теорема 2.8). Отметим, что эти критерии следуют непосредственно из приведенного критерия и критериев замкнутости суммы пары подпространств.

4.3. Спектральные свойства линейной комбинации ортопроекторов на линейно независимые подпространства $H_1, \ldots, H_n$ с суммой $H_1 + \ldots + H_n = H$. При изучении спектральных свойств линейной комбинации ортопроекторов будем использовать следующее утверждение.

Утверждение 4.6. *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства H, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *для произвольных $x_i \in H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,*

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 \geqslant \frac{1}{\alpha_1}\|x_1\|^2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\|x_n\|^2,$$

(2) *$H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы и $\sigma(\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n) \cap (0,1) = \varnothing$.*

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Очевидно, $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы. Для $x \in H$ положим $x_i = \alpha_i P_i x$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда

$$\left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i\right)^2 x, x\right) \geqslant \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i\right) x, x\right).$$

Поэтому $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$, т.е. $\sigma(\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n) \cap (0,1) = \varnothing$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Ясно, что $\sum_{k=1}^n H_k$ замкнуто и $\sum_{k=1}^n \alpha_k P_k \geqslant P_{H_1+\ldots+H_n}$. Поэтому $H_1 + \ldots + H_n = \mathrm{Im}(\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n)$. Следовательно, для произвольных $x_i \in H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует $x \in H$, для которого $\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k P_k\right) x = \sum_{k=1}^n x_k$. Из линейной независимости $H_1, \ldots, H_n$ следует $x_k = \alpha_k P_k x$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Повторяя рассуждения из доказательства $(1) \Rightarrow (2)$, завершаем доказательство утверждения 4.6.

***Следствие* 4.3.** *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — линейно независимые подпространства H, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ε — положительные числа. Если $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \geqslant \varepsilon I$, то для произвольных* (*попарно различных*) *индексов $i(1), \ldots, i(s)$*

$$\alpha_{i(1)} P_{i(1)} + \ldots + \alpha_{i(s)} P_{i(s)} \geqslant \varepsilon P_{H_{i(1)}+\ldots+H_{i(s)}}$$

(*из следствия* 4.1 *следует замкнутость* $H_{i(1)} + \ldots + H_{i(s)}$).

Частный случай следующего утверждения (для $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$) сформулирован в [20].

Утверждение 4.7. *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — ненулевые линейно независимые подпространства H, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ε — положительные числа. Если $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \geqslant \geqslant \varepsilon I$, то*

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-1)\varepsilon \right) I.$$

Доказательство. Сразу отметим, что для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено $\alpha_i \geqslant \varepsilon$. Докажем требуемое утверждение индукцией по n. При $n = 2$ оно следует из свойств спектра линейной комбинации двух ортопроекторов (см. утверждение 2.8). Выполним индукционный переход. Пусть $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{n+1} P_{n+1} \geqslant \varepsilon I$. Тогда

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \geqslant \varepsilon P_{H_1 + \ldots + H_n},$$

поэтому из предположения индукции следует, что

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-1)\varepsilon \right) P_{H_1 + \ldots + H_n}.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-1)\varepsilon \right) P_{H_1 + \ldots + H_n} + \alpha_{n+1} P_{n+1} \geqslant \varepsilon I.$$

Из свойств спектра линейной комбинации двух ортопроекторов имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-1)\varepsilon \right) P_{H_1 + \ldots + H_n} + \alpha_{n+1} P_{n+1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - n\varepsilon \right) I,$$

поэтому

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{n+1} P_{n+1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - n\varepsilon \right) I,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 4.7 доказано.

***Следствие* 4.4.** *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — ненулевые подпространства H, $\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_n$, ε — положительные числа. Предположим, что $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \geqslant \varepsilon I$ и для некоторых $t \leqslant n-1$ индексов i $H_i \bigcap \overline{\sum_{j \neq i} H_j} = 0$. Тогда*

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - t\varepsilon \right) I.$$

Доказательство. Можно считать, что индексами из условия являются $1,\ldots,t$. Подпространства $H_1,\ldots,H_t,\overline{H_{t+1}+\ldots+H_n}$ линейно независимы и

$$\alpha_1P_1+\ldots+\alpha_tP_t+\left(\sum_{i=t+1}^{n}\alpha_i\right)P_{\overline{H_{t+1}+\ldots+H_n}}\geqslant\varepsilon I.$$

Поэтому

$$\alpha_1P_1+\ldots+\alpha_tP_t+\left(\sum_{i=t+1}^{n}\alpha_i\right)P_{\overline{H_{t+1}+\ldots+H_n}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-t\varepsilon\right)I,$$

что и завершает доказательство следствия 4.4.

4.4. „Сведение" системы подпространств $H_1,\ldots,H_n$ к линейно независимой системе подпространств с сохранением суммы подпространств. Пусть H_1,H_2 — подпространства гильбертова пространства H. Определим $M_1=H_1$ и $M_2=H_2\ominus(H_1\cap H_2)$. Тогда подпространства M_1,M_2 линейно независимы и сумма $M_1+M_2=H_1+H_2$. Таким образом, имея пару подпространств, мы можем их „уменьшить" до линейно независимых, не меняя суммы. В этом подпункте мы докажем аналогичное утверждение для произвольной n-ки подпространств.

Теорема 4.2. *Для каждого $n\geqslant 2$ существует постоянная c_n, $0<c_n<1$, с таким свойством: если $H_1,\ldots,H_n$ — подпространства H и $0<\varepsilon<1$ такое, что $P_{H_1}+\ldots+P_{H_n}\geqslant\varepsilon I$, то существуют подпространства $M_2,\ldots,M_n$ такие, что:*

(1) $M_k\subset H_k$ *для всех* $2\leqslant k\leqslant n$,

(2) *подпространства* $H_1,M_2,\ldots,M_n$ *линейно независимы,*

(3) $P_{H_1}+P_{M_2}+\varepsilon P_{M_3}+\ldots+\varepsilon^{n-2}P_{M_n}\geq c_n\varepsilon^{n-1}I$.

Для доказательства теоремы 4.2 нужна следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть H_1,H_2 — подпространства H. Для произвольного $0<\varepsilon<1$ существует подпространство $M_2\subset H_2$ такое, что:*

(1) H_1+M_2 — *подпространство,*

(2) $3(P_{H_1}+P_{M_2})+\varepsilon I\geqslant P_{H_1}+P_{H_2}$,

(3) $P_{H_1}+P_{M_2}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{4}P_{H_1+M_2}$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда $H=K\oplus K$ для некоторого гильбертова пространства K, а ортопроекторы

$$P_{H_1}=\begin{pmatrix}a & \sqrt{a(I-a)}\\ \sqrt{a(I-a)} & I-a\end{pmatrix},\quad P_{H_2}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

для некоторого самосопряженного оператора $a\colon K\to K$, $0\leqslant a=a^*\leqslant I$, $\ker(a)=\ker(I-a)=0$ (см. подпункт 2.1).

Тогда $H_1=\{(\sqrt{a}x,\sqrt{I-a}x),\ x\in K\}$, $H_2=\{(x,0),\ x\in K\}$. Рассмотрим спектральное представление $a=\displaystyle\int_{[0,1)}x\,dE(x)$. Для числа $\delta<1$, которое мы определим позже, определим подпространство $K_1=E([0,\delta))K$. Пусть $q=E([0,\delta))$. Определим подпространство $M_2=\{(x,0),\ x\in K_1\}$. Поскольку $|(\sqrt{a}x,x_1)|\leqslant\sqrt{\delta}\|x\|\|x_1\|$, $x\in K$, $x_1\in K_1$, то H_1+M_2 — подпространство, причем $P_{H_1}+P_{M_2}\geqslant(1-\sqrt{\delta})P_{H_1+M_2}\geqslant\dfrac{1-\delta}{2}P_{H_1+M_2}$.

Так как $P_{M_2} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, неравенство $3(P_{H_1} + P_{M_2}) + \varepsilon I \geqslant P_{H_1} + P_{H_2}$ равносильно неотрицательности оператора

$$A = \begin{pmatrix} 3q + 2a + (\varepsilon - 1)I & 2\sqrt{a(I-a)} \\ 2\sqrt{a(I-a)} & 2(I-a) + \varepsilon I \end{pmatrix}.$$

Точка $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда операторный определитель $\det(\lambda I - A)$ не обратим. Операторный определитель имеет вид

$$\lambda^2 I - (3q + (2\varepsilon + 1)I)\lambda + (3q + 2a + (\varepsilon - 1)I)(2(I-a) + \varepsilon I) - 4a(I-a) =$$

$$= \int\limits_{[0,1)} \big(\lambda^2 - (3 \cdot I_{[0,\delta)} + 2\varepsilon + 1)\lambda + (3 \cdot I_{[0,\delta)} + 2x + \varepsilon - 1)\times$$

$$\times (2(1-x) + \varepsilon) - 4x(1-x)\big)\, dE(x).$$

Для доказательства того, что при $\lambda < 0$ $\det(\lambda I - A)$ обратим, достаточно доказать, что при $x \in [0,1)$ выполняется неравенство

$$(3 \cdot I_{[0,\delta)} + 2x + \varepsilon - 1)(2(1-x) + \varepsilon) \geqslant 4x(1-x).$$

При $x \in [0,\delta)$ это неравенство имеет вид $(2x + \varepsilon + 2)(2(1-x) + \varepsilon) \geqslant 4x(1-x)$ и является очевидным.

При $x \in [\delta, 1)$ рассматриваемое неравенство имеет вид $(2x - (1-\varepsilon))(2(1-x) + \varepsilon) \geqslant 4x(1-x)$, т. е. $x \geqslant 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$. Поэтому, выбрав $\delta = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, будем иметь нужное. Осталось заметить, что при таком δ выполнено $P_{H_1} + P_{M_2} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{4} P_{H_1 + M_2}$.

Лемма 4.3 доказана.

***Доказательство теоремы* 4.2** проведем индукцией по n. При $n = 2$ подойдет $c_2 = \dfrac{1}{2}$. Выполним шаг индукции. Пусть мы имеем $n \geq 3$ подпространств $H_1, \ldots, H_n$ таких, что $P_{H_1} + \ldots + P_{H_n} \geqslant \varepsilon I$. Пусть $H_2' = H_2 \ominus (H_1 \cap H_2)$. Тогда $P_{H_1} + P_{H_2'} + \ldots + P_{H_n} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2} I$.

Из леммы 4.3 следует, что существует подпространство $M_2 \subset H_2'$ такое, что $H_1 + M_2$ — подпространство, $3(P_{H_1} + P_{M_2}) + \dfrac{\varepsilon}{4} I \geqslant P_{H_1} + P_{H_2'}$ и $P_{H_1} + P_{M_2} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{16} P_{H_1 + M_2}$. Тогда

$$P_{H_1} + P_{M_2} + P_{H_3} + \ldots + P_{H_n} \geqslant \frac{\varepsilon}{12} I,$$

а потому

$$P_{H_1 + M_2} + P_{H_3} + \ldots + P_{H_n} \geqslant \frac{\varepsilon}{24} I.$$

Используем предположение индукции для набора подпространств $(H_1 + M_2)$, $H_3, \ldots, H_n$. Существуют подпространства $M_k \subset H_k$, $3 \leqslant k \leqslant n$, такие, что

$(H_1+M_2), M_3, \ldots, M_n$ линейно независимы и $P_{H_1+M_2} + \sum_{k=3}^{n} \left(\dfrac{\varepsilon}{24}\right)^{k-3} P_{M_k} \geqslant$ $\geqslant c_{n-1} \left(\dfrac{\varepsilon}{24}\right)^{n-2} I$. Домножая обе части на $\varepsilon/16$, имеем

$$P_{H_1} + P_{M_2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\varepsilon^{k-2}}{16 \cdot 24^{k-3}} P_{M_k} \geqslant c_{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^{n-2} \frac{\varepsilon}{16} I.$$

Поэтому можно положить $c_n = \dfrac{c_{n-1}}{16 \cdot 24^{n-2}}$.

Теорема 4.2 доказана.

***Следствие* 4.5.** *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства H, сумма которых $H_1 + \ldots + H_n = H$. Тогда существуют подпространства M_k, $2 \leqslant k \leqslant n$, такие, что*:

(1) $M_k \subset H_k$ *для всех* $2 \leqslant k \leqslant n$,

(2) $H_1, M_2, \ldots, M_n$ *линейно независимы,*

(3) $H_1 + M_2 + \ldots + M_n = H$.

***Следствие* 4.6.** *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства H, причем $H_1 + \ldots$ $\ldots + H_n = H$, и Δ — подпространство в H. Тогда существуют линейно независимые подпространства M_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, такие, что*:

(1) $M_j \subset H_j$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant n$,

(2) $M_1 + \ldots + M_n$ — *подпространство,*

(3) $M_1 + \ldots + M_n + \Delta = H$,

(4) $(M_1 + \ldots + M_n) \bigcap \Delta = 0$.

Доказательство. Из следствия 4.5 для набора подпространств $\Delta, H_1, \ldots, H_n$ получим нужное утверждение.

Следующее утверждение показывает, что в следствии 4.5 подпространства можно заменить на образы линейных непрерывных операторов.

***Следствие* 4.7.** *Пусть $K_1, \ldots, K_n$ — гильбертовы пространства, $a_i \colon K_i \to$ $\to H$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — линейные непрерывные операторы, причем $\mathrm{Im}(a_1) + \ldots$ $\ldots + \mathrm{Im}(a_n) = H$. Тогда существуют линейно независимые подпространства M_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, такие, что $M_j \subset \mathrm{Im}(a_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и сумма $M_1 + \ldots + M_n = H$.*

Доказательство. $\mathrm{Im}(a_1) + \left(\sum_{i \neq 1} \mathrm{Im}(a_i)\right) = H$. Из теоремы 2.4 работы [10] (см. также подпункт 5.1) следует, что существует подпространство $H_1 \subset \mathrm{Im}(a_1)$ такое, что $H_1 + \mathrm{Im}(a_2) + \ldots + \mathrm{Im}(a_n) = H$. Рассуждая аналогично, находим набор подпространств $H_2 \subset \mathrm{Im}(a_2), \ldots, H_n \subset \mathrm{Im}(a_n)$ таких, что $H_1 + \ldots + H_n = H$. Осталось воспользоваться следствием 4.5.

Следствие 4.7 доказано.

Теперь мы докажем, что произвольную n-ку подпространств можно „уменьшить" до линейно независимой n-ки с сохранением суммы подпространств. Введем необходимые обозначения. Для подпространств $H_1, \ldots, H_n$ определим гильбертово пространство $\widetilde{H} = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ и в нем подпространства $\Delta_0 = \Big\{(x_1, \ldots, x_n),$ $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0\Big\}$ и $\widetilde{H}_k = \{(0, \ldots, 0, \underbrace{x}_{k}, 0 \ldots, 0),\ x \in H_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Теорема 4.3. *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства H. Тогда существуют подпространства $M_j \subset H_j$, $2 \leqslant j \leqslant n$, такие, что*:

(1) $H_1, M_2, \ldots, M_n$ *линейно независимы,*

(2) $H_1 + M_2 + \ldots + M_n = H_1 + \ldots + H_n$.

***Замечание* 4.3.** Эта теорема означает следующее: можно не „уменьшать" H_1, а „уменьшить" подпространства $H_2, \ldots, H_n$ так, что сумма не изменится, но „уменьшенные" подпространства уже линейно независимы.

Доказательство. Заметим, что $\Delta_0 \cap \widetilde{H}_1 = 0$ и $\Delta_0 + \widetilde{H}_1 = \Big\{(x_1, \ldots, x_n), \sum_{i=1}^n x_i \in H_1\Big\}$ замкнуто в $\widetilde{H}$. Используя следствие 4.5 для набора подпространств $\Delta_0 + \widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_n$, убеждаемся, что существуют подпространства $M_k \subset H_k$, $2 \leqslant k \leqslant n$, такие, что

$$(H_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n) \cap \Delta_0 = 0, \quad (H_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n) + \Delta_0 = \widetilde{H}.$$

Тогда $H_1, M_2, \ldots, M_n$ линейно независимы и $H_1 + M_2 + \ldots + M_n = H_1 + \ldots + H_n$.

Теорема 4.3 доказана.

Теперь естественно возникает следующий вопрос: пусть для некоторого $m < n$ подпространства $H_1, \ldots, H_m$ линейно независимы. Можно ли „уменьшить" только $H_{m+1}, \ldots, H_n$, чтобы сумма не изменилась, но „уменьшенные" пространства были линейно независимы? В связи с этим вопросом дадим следующее определение. (Систему подпространств $H_1, \ldots, H_n$ пространства H будем обозначать $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$.)

Определение 4.3. *Для $m \leqslant n$ определим* $\mathbf{RPS}(H, m, n)$ (*reduction preserving sum*) *как множество n-ок подпространств $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$, для которых существуют подпространства $M_j \subset H_j$, $m + 1 \leqslant j \leqslant n$, такие, что*:

(1) $H_1, \ldots, H_m, M_{m+1}, \ldots, M_n$ *линейно независимы,*

(2) $H_1 + \ldots + H_m + M_{m+1} + \ldots + M_n = H_1 + \ldots + H_n$.

***Замечание* 4.4.** Если $S \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$, то $H_1, \ldots, H_m$ линейно независимы.

Мы изучим некоторые свойства классов $\mathbf{RPS}(H, m, n)$. Из теоремы 4.3 следует, что $\mathbf{RPS}(H, 1, n)$ совпадает с множеством n-ок подпространств H, кроме того, очевидно, $\mathbf{RPS}(H, n, n)$ совпадает с множеством n-ок подпространств, для которых $H_1, \ldots, H_n$ линейно независимы. Далее $m < n$.

Используя следствие 4.1 и теорему 4.3, легко получить следующее утверждение.

Утверждение 4.8. *Пусть $H_1 + \ldots + H_n$ — подпространство. $S \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$ тогда и только тогда, когда $H_1, \ldots, H_m$ линейно независимы и $H_1 + \ldots + H_m$ — подпространство.*

Утверждение 4.9. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $S \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$,

(2) $H_1, \ldots, H_m$ *линейно независимы и* $\Delta_0 + \widetilde{H}_1 + \ldots + \widetilde{H}_m$ — *подпространство в* $\widetilde{H}$,

(3) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для произвольных* $y_j \in H_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^n y_j = 0$ *выполнено*

$$\|y_{m+1}\| + \ldots + \|y_n\| \geqslant \varepsilon(\|y_1\| + \ldots + \|y_m\|).$$

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $S \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$. Для соответствующих подпространств M_j, $m + 1 \leqslant j \leqslant n$ (см. определение 4.3), обозначим $\widetilde{M_j} = \{(0, \ldots, 0, \underbrace{x}_{j}, 0, \ldots, 0),\ x \in M_j\}$. Тогда подпространства $\Delta_0, \widetilde{H}_1, \ldots, \widetilde{H}_m$,

$\widetilde{M}_{m+1}, \ldots, \widetilde{M}_n$ линейно независимы и их сумма равна $\widetilde{H}$. Из следствия 4.1 следует, что $\Delta_0 + \widetilde{H}_1 + \ldots + \widetilde{H}_m$ — подпространство в $\widetilde{H}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $H_1, \ldots, H_m$ линейно независимы и $\Delta_0 + \widetilde{H}_1 + \ldots + \widetilde{H}_m$ замкнуто в $\widetilde{H}$. Применив теорему 4.3 к набору подпространств $(\Delta_0 + \widetilde{H}_1 + \ldots \ldots + \widetilde{H}_m), \widetilde{H}_{m+1}, \ldots, \widetilde{H}_n$, убедимся, что существуют подпространства $M_j \subset H_j$, $m+1 \leqslant j \leqslant n$, для которых

$$(H_1 \oplus \ldots \oplus H_m \oplus M_{m+1} \oplus \ldots \oplus M_n) \cap \Delta_0 = 0$$

и

$$(H_1 \oplus \ldots \oplus H_m \oplus M_{m+1} \oplus \ldots \oplus M_n) + \Delta_0 = \widetilde{H}.$$

Эти M_j, $m+1 \leqslant j \leqslant n$, являются требуемыми.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). $H_1, \ldots, H_m$ линейно независимы и сумма $\Delta_0 + \widetilde{H}_1 + \ldots + \widetilde{H}_m$ — подпространство тогда и только тогда, когда $\Delta_0 \cap \left(\sum_{i=1}^m \widetilde{H}_i\right) = 0$ и $\Delta_0 + \left(\sum_{i=1}^m \widetilde{H}_i\right)$ замкнуто в $\widetilde{H}$. В силу утверждения 2.3 последнее равносильно существованию такого $\varepsilon_1 > 0$, что для произвольного $(y_1, \ldots, y_n) \in \Delta_0$ выполнено (нам удобнее перейти к эквивалентной норме)

$$\sum_{j=m+1}^{n} \|y_j\| \geqslant \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|.$$

Отсюда следует, что (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Утверждение 4.9 доказано.

Отметим, что

$$\Delta_0 + \widetilde{H}_1 + \ldots + \widetilde{H}_m = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{H}, \ \sum_{j=m+1}^{n} x_j \in H_1 + \ldots + H_m \right\}.$$

***Следствие* 4.8.** *Если $H_1, \ldots, H_m$ линейно независимы и $(H_1 + \ldots + H_m) \cap \cap (H_{m+1} + \ldots + H_n)$ замкнуто в $H_{m+1} + \ldots + H_n$, то $S \in$ **RPS**(H, m, n).*

***Следствие* 4.9.** *$S \in$ **RPS**$(H, n-1, n)$ тогда и только тогда, когда $H_1, \ldots \ldots, H_{n-1}$ линейно независимы и $H_n \cap (H_1 + \ldots + H_{n-1})$ — подпространство.*

***Следствие* 4.10.** *Пусть для двух систем подпространств $S = (H; H_1, \ldots \ldots, H_n)$, $S' = (H; H_1', \ldots, H_n')$ $H_k \subset H_k'$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Если $S' \in$ **RPS**(H, m, n), то и $S \in$ **RPS**(H, m, n).*

***Следствие* 4.11.** *Если $S \in$ **RPS**(H, m, n), то для любого $l \leqslant m$ и $1 \leqslant r \leqslant n-m$ система подпространств $S' = (H; H_1, \ldots, H_l, H_{m+1}, \ldots, H_{m+r}) \in$ **RPS**$(H, l, l + + r)$.*

***Следствие* 4.12.** *Если $S \in$ **RPS**(H, m, n), то для любого $m+1 \leqslant j \leqslant n$ $H_j \cap (H_1 + \ldots + H_m)$ — подпространство.*

Утверждение 4.10. *Пусть множество $\{m+1, \ldots, n\}$ разбито на подмножества I_k, $1 \leqslant k \leqslant r$. Тогда*:

(1) *если $S' = \left(H; H_1, \ldots, H_m, \overline{\sum_{j \in I_1} H_j}, \ldots, \overline{\sum_{j \in I_r} H_j}\right) \in$ **RPS**$(H, m, m + + r)$, то $S \in$ **RPS**(H, m, n),*

(2) *пусть для всех* $1 \leqslant k \leqslant r$ $\sum_{j \in I_k} H_j$ — *подпространство; если* $S \in \boldsymbol{RPS}(H, m, n)$, *то* $S' = \left(H; H_1, \ldots, H_m, \sum_{j \in I_1} H_j, \ldots, \sum_{j \in I_r} H_j\right) \in \boldsymbol{RPS}(H, m, m+r)$.

Доказательство. Докажем (1). Для доказательства нужного утверждения используем утверждение 4.9. Пусть $y_j \in H_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$. Для всех $1 \leqslant k \leqslant r$ $\sum_{j \in I_k} \|y_j\| \geqslant \left\|\sum_{j \in I_k} y_j\right\|$. Отсюда легко получаем, что $S \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$.

Докажем (2). Пусть для всех $1 \leqslant k \leqslant r$ сумма $\sum_{j \in I_k} H_j$ является подпространством, $S \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$. Для всех $1 \leqslant k \leqslant r$ существуют подпространства $K_j \subset H_j$, $j \in I_k$, такие, что K_j, $j \in I_k$, линейно независимы и сумма $\sum_{j \in I_k} K_j = \sum_{j \in I_k} H_j$. Тогда n-ка $S'' = (H; H_1, \ldots, H_m, K_{m+1}, \ldots, K_n) \in \mathbf{RPS}(H, m, n)$. Для любого $1 \leqslant k \leqslant r$ существует $\varepsilon_k > 0$ такое, что для произвольных $y_j \in K_j$, $j \in I_k$, выполняется $\left\|\sum_{j \in I_k} y_j\right\| \geqslant \varepsilon_k \left(\sum_{j \in I_k} \|y_j\|\right)$. Используя утверждение 4.9, убеждаемся что $\left(H; H_1, \ldots, H_m, \sum_{j \in I_1} K_j, \ldots, \sum_{j \in I_r} K_j\right) \in \mathbf{RPS}(H, m, m+r)$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4.10 доказано.

***Следствие* 4.13.** *Пусть* $H_{m+1} + \ldots + H_n$ — *подпространство.* $S \in \boldsymbol{RPS}(H, m, n)$ *тогда и только тогда, когда* $H_1, \ldots, H_m$ *линейно независимы и* $(H_1 + \ldots + H_m) \cap (H_{m+1} + \ldots + H_n)$ — *подпространство.*

5. Замкнутость суммы образов операторов. В этом пункте рассмотрим более общий объект, чем систему подпространств, — систему образов линейных непрерывных операторов. Отметим, что изучение таких систем не сводится к изучению системы линеалов в H, так как в бесконечномерном гильбертовом пространстве есть линеалы, отличные от образов линейных непрерывных операторов (см. [10]).

Рассмотрение системы подпространств H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, как системы $H_i = \mathrm{Im}(P_{H_i})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, позволит получить критерии замкнутости суммы подпространств, а также изучить некоторые свойства сумм подпространств H.

5.1. Теорема Р. Дугласа и ее следствия.

Теорема 5.1 [9]. *Пусть* H, H_1, H_2 — *гильбертовы пространства,* $A\colon H_1 \to H$, $B\colon H_2 \to H$ — *линейные непрерывные операторы. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(B)$,

(2) *существует* $\lambda > 0$ *такое, что* $AA^* \leqslant \lambda BB^*$,

(3) *существует линейный непрерывный оператор* $C\colon H_1 \to H_2$ *такой, что* $A = BC$.

Кроме того, при выполнении (1) *оператор* C *может быть выбран так, что* $\ker C = \ker A$, $\mathrm{Im}(C) \subset (\ker B)^{\perp}$.

***Следствие* 5.1.** *Пусть* $A\colon H_1 \to H$ — *линейный непрерывный оператор. Тогда* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\sqrt{AA^*})$.

***Следствие* 5.2.** *Пусть* $H, H_1, \ldots, H_n$ — *гильбертовы пространства,* $a_k\colon H_k \to H$, $1 \le k \le n$, — *линейные непрерывные операторы. Тогда* $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k a_k^*}\right)$.

Доказательство. Определим оператор $A\colon H_1 \oplus \ldots \oplus H_n \to H$ равенством $A(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Блочная запись A имеет вид $(a_1, \ldots, a_n)$, поэтому $A^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)^\top$. Отсюда $AA^* = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^*$. Осталось заметить, что $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(\sqrt{AA^*})$.

Следствие 5.2 доказано.

***Следствие* 5.3.** *Пусть* $H_1, \ldots, H_n$ — *подпространства* H, $P_1, \ldots, P_n$ — *соответствующие ортопроекторы. Тогда сумма* $H_1 + \ldots + H_n = \operatorname{Im}(\sqrt{P_1 + \ldots + P_n})$. *Отсюда следует, что сумма* $H_1 + \ldots + H_n$ *замкнута тогда и только тогда, когда* $\sigma(P_1 + \ldots + P_n) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Утверждение 5.1. *Пусть* $a_k\colon H \to H$, $1 \leqslant k \leqslant n$, — *неотрицательные самосопряженные операторы в* H. *Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $\operatorname{Im}(a_1) + \ldots + \operatorname{Im}(a_n)$ *замкнуто,*

(2) *для некоторого* $\varepsilon > 0$ $\sigma(a_1 + \ldots + a_n) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$.

При выполнении этих условий (*одного из этих условий*) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

Доказательство. Определим подпространства $H_1 = \overline{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k)}$, $H_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \ker(a_k)$. Тогда $H = H_1 \oplus H_2$. Относительно этого ортогонального разложения пространства H оператор $a_i = b_i \oplus 0$, где $b_i\colon H_1 \to H_1$ — неотрицательный самосопряженный оператор. Ясно, что $\bigcap_{k=1}^{n} \ker(b_i) = 0$.

1. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k)$ замкнута. Тогда $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(b_k)$ замкнута. Поскольку $\bigcap_{k=1}^{n} \ker(b_k) = 0$, то $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(b_k)$ плотно в H_1. Поэтому $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(b_k) = H_1$, т. е. $\operatorname{Im}(\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}) = H_1$. Тогда $b_1^2 + \ldots + b_n^2 \geqslant \varepsilon_1 I_{H_1}$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$. Поскольку $\|b_i\| b_i \geqslant b_i^2$, то $b_1 + \ldots + b_n \geqslant \varepsilon_2 I_{H_1}$ для некоторого $\varepsilon_2 > 0$. Поэтому $\sigma\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cap (0, \varepsilon_2) = \varnothing$ и $\operatorname{Im}(a_1 + \ldots + a_n) = H_1$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $\sigma(a_1 + \ldots + a_n) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $\sigma(b_1 + \ldots + b_n) \cap (0, \varepsilon) = \varnothing$. Поскольку $\ker(b_1 + \ldots + b_n) = 0$, то $0 \notin \sigma(b_1 + \ldots + b_n)$, поэтому $b_1 + \ldots + b_n \geqslant \varepsilon I_{H_1}$. Следовательно, $\operatorname{Im}(a_1 + \ldots + a_n) = H_1 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(a_k)$.

Утверждение 5.1 доказано.

***Пример* 5.1.** *Пусть* $a_1, \ldots, a_n$ — *неотрицательные операторы в* H, *причем для произвольного* $1 \leqslant k \leqslant n$ $\operatorname{Im}(a_k)$ — *подпространство. Определим оператор* $C = a_1 + \ldots + a_n$. *Предположим, что* $Ca_k = a_kC$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Тогда* $\operatorname{Im}(a_1) + \ldots + \operatorname{Im}(a_n)$ — *подпространство.*

Доказательство. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma(a_k) \bigcap (0, \varepsilon) = \varnothing$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Поскольку $C \geqslant a_k$ и $Ca_k = a_kC$, то $Ca_k \geqslant a_k^2 \geqslant \varepsilon a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Прибавив полученные неравенства, получим $C^2 \geqslant \varepsilon C$, откуда $\sigma(C) \bigcap (0, \varepsilon) = \varnothing$.

5.2. Различные критерии замкнутости $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(T_i)}$. В этом подпункте $T_1, \ldots, T_n$ — неотрицательные операторы в H, причем $\|T_k\| < 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Определим $E = (I - T_n)\ldots(I - T_1)$. Лемма 5.1 следует из лемм 3.3, 3.10 работы [16].

Лемма 5.1. *Пусть* $\|T_k\| \leqslant \omega < 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Тогда для любого* $x \in H$

$$\frac{2 + \omega^2 n(n-1)}{2 - \omega}(\|x\|^2 - \|Ex\|^2) \geqslant \sum_{k=1}^{n}(T_k x, x).$$

Следующая лемма следует из леммы 5.1, но мы приведем непосредственное доказательство.

Лемма 5.2. *Если* $\|Ex\| = \|x\|$ *для некоторого* $x \in H$, *то* $T_k x = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Отметим, что для неотрицательного оператора T с нормой $\|T\| < 2$ и для произвольного $x \in H$ $\|(I-T)x\| \leqslant \|x\|$. Если $\|(I-T)x\| = \|x\|$, то $Tx = 0$. Действительно, пусть $\|(I - T)x\| = \|x\|$. Тогда $\|x - Tx\|^2 = \|x\|^2$, откуда $\|Tx\|^2 = 2(Tx, x)$. Поскольку $\|Tx\|^2 \leqslant \|T\|(Tx, x)$, то $(Tx, x) = 0$, $Tx = 0$.

Предположим, что $\|Ex\| = \|x\|$. Поскольку $\|Ex\| \leqslant \|(I - T_1)x\| \leqslant \|x\|$, то $\|(I - T_1)x\| = \|x\|$, откуда $T_1 x = 0$. Тогда $Ex = (I - T_n)\ldots(I - T_2)x$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем $T_2 x = \ldots = T_n x = 0$.

Лемма 5.2 доказана.

Обобщая определение работы [26] на бесконечномерный случай, дадим следующее определение.

Определение 5.1. *Пусть* $A_1, \ldots, A_n$ *— линейные непрерывные операторы в* H, $1 \leqslant p < \infty$. *p-Радиусом набора операторов* $A_1, \ldots, A_n$ *назовем число*

$$\hat{\rho}_p(A_1, \ldots, A_n) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\sum\|A_{i(1)}\ldots A_{i(k)}\|^p\right)^{1/pk},$$

где сумма берется по всем наборам индексов $1 \leqslant i(1), \ldots, i(k) \leqslant n$.

Определение корректно. Действительно, определим $a_{k,p} = \Big(\frac{1}{n^k}\sum\|A_{i(1)}\ldots \ldots A_{i(k)}\|^p\Big)^{1/p}$. Ясно, что $a_{k+l,p} \leqslant a_{k,p}a_{l,p}$, $k, l \geqslant 1$. Поэтому существует $\lim_{k\to\infty} a_{k,p}^{1/k}$. Различные свойства p-радиуса для операторов в конечномерном гильбертовом пространстве, а также его применения содержатся в работе [26]. Мы сформулируем условие замкнутости суммы образов операторов $T_1, \ldots, T_n$ в терминах p-радиуса набора операторов $I - T_1, \ldots, I - T_n$.

Утверждение 5.2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Сумма* $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) = H$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\rho}_p(I - T_1, \ldots, I - T_n) < 1$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) \neq H$. Тогда для произвольного набора индексов $i(1), \ldots, i(k)$ норма $\|(I - T_{i(1)})\ldots(I - T_{i(k)})\| = 1$. Действительно, если $\|(I - T_{i(1)})\ldots(I - T_{i(k)})\| < 1$, то оператор $I - (I - T_{i(1)})\ldots(I - T_{i(k)})$ обратим, а потому $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) = H$. Пришли к противоречию. Отсюда $\hat{\rho}_p(I - T_1, \ldots, I - T_n) = 1$.

2. Пусть теперь $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) = H$. Тогда $T_1 + \ldots + T_n \geqslant \varepsilon I$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из леммы 5.1 следует, что $\|(I - T_n)\ldots(I - T_1)\| < 1$. Поэтому $a_{n,p}(I - T_1, \ldots, I - T_n) < 1$. Для всех $k \geqslant 1$ $a_{kn,p} \leqslant a_{n,p}^k$, $a_{kn,p}^{1/kn} \leqslant a_{n,p}^{1/n}$. Переходя к границе при $k \to \infty$, получаем $\hat{\rho}_p(I - T_1, \ldots, I - T_n) \leqslant a_{n,p}^{1/n} < 1$.

Утверждение 5.2 доказано.

Сформулируем условие замкнутости суммы образов операторов в терминах порожденной ими C^*-алгебры. Пусть $\mathcal{B}(H)$ — множество всех линейных непрерывных операторов в H. Пусть $\mathcal{A}(T_1,\ldots,T_n)$ — алгебра, порожденная $T_1,\ldots$ $\ldots,T_n$, и $C^*(T_1,\ldots,T_n)$ — замыкание $\mathcal{A}(T_1,\ldots,T_n)$ в $\mathcal{B}(H)$.

Утверждение 5.3. *Ортопроектор $P_{\overline{\mathrm{Im}(T_1)+\ldots+\mathrm{Im}(T_n)}} \in C^*(T_1,\ldots,T_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(T_1)+\ldots+\mathrm{Im}(T_n)$ — подпространство.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(T_k)$ плотно в H.

1. Пусть $\mathrm{Im}(T_1)+\ldots+\mathrm{Im}(T_n)=H$. Тогда $\|(I-T_n)\ldots(I-T_1)\|<1$, поэтому $I-((I-T_n)\ldots(I-T_1))^k\to I$, $k\to\infty$. Отсюда $I\in C^*(T_1,\ldots,T_n)$.

2. Пусть теперь $I\in C^*(T_1,\ldots,T_n)$. Существует элемент $a\in\mathcal{A}(T_1,\ldots,T_n)$ такой, что $\|I-a\|<1$. Тогда a обратим. Следовательно, $\mathrm{Im}(a)=H$, а значит, и $\mathrm{Im}(T_1)+\ldots+\mathrm{Im}(T_n)=H$.

Утверждение 5.3 доказано.

***Замечание* 5.1.** Из приведенного доказательства следует, что $I\in C^*(T_1,\ldots$ $\ldots,T_n)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(T_k)=H$. Это верно для произвольных неотрицательных T_k (не обязательно $\|T_k\|<2$). Действительно, вместо операторов T_k можно рассмотреть операторы λT_k, где $\lambda>0$ таково, что $\lambda\|T_k\|<2$, $1\leqslant k\leqslant n$.

***Следствие* 5.4.** *Пусть алгебра $\mathcal{A}=\mathcal{A}(T_1,\ldots,T_n)$ конечномерна. Определим $T=\sum_{k=1}^{n}T_k$. Поскольку $\mathcal{A}$ конечномерна, то для некоторого ненулевого полинома F $F(T)=0$. Поэтому $\sigma(T)$ конечен. Тогда $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(T_k)$ замкнуто, кроме того, $C^*(T_1,\ldots,T_n)=\mathcal{A}(T_1,\ldots,T_n)$. Поэтому $P_{\mathrm{Im}(T_1)+\ldots+\mathrm{Im}(T_n)}\in\mathcal{A}(T_1,\ldots,T_n)$.*

Из утверждений 5.3 и 2.4 вытекает следующий критерий замкнутости суммы подпространств.

Утверждение 5.4. *Пусть $H_1,\ldots,H_n$ — подпространства H, натуральное $m\leqslant n-1$. Предположим, что оператор P_iP_j компактный для всех $1\leqslant i\leqslant m$, $m+1\leqslant j\leqslant n$. Если $H_1+\ldots+H_m, H_{m+1}+\ldots+H_n$ — подпространства, то $H_1+\ldots+H_n$ — подпространство, причем*

$$P_{H_1+\ldots+H_n}=P_{H_1+\ldots+H_m}+P_{H_{m+1}+\ldots+H_n} \pmod{S_\infty(H)}.$$

Как показывает следующий пример, обратное утверждение неверно.

***Пример* 5.2.** В гильбертовом пространстве $H=l_2\bigoplus l_2$ рассмотрим подпространства H_1,H_2,H_3, ортопроекторы на которые

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&I\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}I-a^2&a\sqrt{(I-a^2)}\\a\sqrt{(I-a^2)}&a^2\end{pmatrix},$$

где самосопряженный $a\colon l_2\to l_2$, $0\leqslant a\leqslant I$, $\ker(a)=0$ и a компактный. Тогда операторы P_1P_2, P_1P_3 компактны, $H_1+H_2+H_3=H$, но H_2+H_3 — не подпространство.

5.3. Образы элементов алгебры, порожденной $T_1,\ldots,T_n$. Для последовательности $\mathcal{I}=(i(1),\ldots,i(k))$, $1\leqslant i(r)\leqslant n$, $1\leqslant r\leqslant k$, определим оператор $E_{\mathcal{I}}=(I-T_{i(1)})\ldots(I-T_{i(k)})$. Определим последовательность $\mathcal{I}^*=(i(k),\ldots,i(1))$, тогда $E_{\mathcal{I}}^*=E_{\mathcal{I}^*}$. Далее будем рассматривать оператор $T=\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}}\alpha_{\mathcal{I}}E_{\mathcal{I}}$, где все

$\alpha_{\mathcal{I}} > 0$, $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$ (здесь $\mathcal{U}$ — некоторое множество последовательностей). Мы предполагаем, что для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ найдется последовательность $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$, в которой встречается l.

Утверждение 5.5. *Следующие условия равносильны*:

(1) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(T_k)$ *замкнуто,*

(2) $\mathrm{Im}\left(\left(\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T\right)$ *замкнуто.*

При выполнении этих условий (*одного из этих условий*) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(T_k) = \mathrm{Im}\left(\left(\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T\right)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(T_k)$ плотно в H.

1. Пусть $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) = H$. Тогда $T_1 + \ldots + T_n \geqslant \varepsilon I$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольный $x \in H$. Из леммы 5.1 следует, что для любого $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$ существует $m_{\mathcal{I}} > 0$, не зависящее от x, такое, что $m_{\mathcal{I}}(\|x\|^2 - \|E_{\mathcal{I}}x\|^2) \geqslant \sum_{i\in\mathcal{I}} (T_i x, x)$. Прибавим эти неравенства. Тогда $\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} m_{\mathcal{I}}(\|x\|^2 - \|E_{\mathcal{I}}x\|^2) \geqslant \varepsilon\|x\|^2$. Поэтому существует $\mathcal{J} \in \mathcal{U}$ (зависящее от x), для которого $m_{\mathcal{J}}(\|x\|^2 - \|E_{\mathcal{J}}x\|^2) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{|\mathcal{U}|}\|x\|^2$, т. е. $\|E_{\mathcal{J}}x\| \leqslant \sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon}{m_{\mathcal{J}}|\mathcal{U}|}}\,\|x\|$. Поэтому

$$\|Tx\| \leqslant \left(\sum_{\mathcal{I}\neq\mathcal{J}} \alpha_{\mathcal{I}} + \alpha_{\mathcal{J}}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{m_{\mathcal{J}}|\mathcal{U}|}}\right)\|x\|.$$

Поскольку $\mathcal{J} = \mathcal{J}(x) \in \mathcal{U}$, то $\|T\| < \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}$, поэтому оператор $\left(\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T$ обратим, откуда следует нужное.

2. Пусть теперь $\mathrm{Im}\left(\left(\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T\right)$ — подпространство. Обозначим $A = \left(\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T$. Покажем, что $\ker(A^*) = 0$. Действительно, пусть $x \in \ker A^*$. Поскольку все $\alpha_{\mathcal{I}} > 0$, $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$, то для любого $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$ $\|E_{\mathcal{I}^*}x\| = \|x\|$. Из леммы 5.2 получаем $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \ker T_i$. Поэтому $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker T_i$, т.е. $x = 0$. Итак, $\ker A^* = 0$, поэтому $\mathrm{Im}(A) = H$. Поскольку A принадлежит алгебре, порожденной $T_1, \ldots, T_n$, то $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) = H$.

Утверждение 5.5 доказано.

После этого утверждения естественно возникает вопрос: следует ли из равенства $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n) = \mathrm{Im}\left(\left(\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T\right)$ замкнутость $\mathrm{Im}(T_1) + \ldots + \mathrm{Im}(T_n)$? Всегда $\mathrm{Im}(T_1) = \mathrm{Im}(I - (I - T_1))$, но $\mathrm{Im}(T_1)$ не обязательно замкнут. Поэтому естественно наложить на операторы T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, дополнительное условие, состоящее в том, что $\mathrm{Im}(T_i)$ замкнут для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Для изучения этого вопроса нам понадобятся вспомогательные результаты.

Лемма 5.3. *Пусть M — гильбертово пространство, $a, b \in \mathcal{B}(M)$, $c = aba^*$. Если $\mathrm{Im}(c) = \mathrm{Im}(a)$, то $\mathrm{Im}(c) \supset (\ker(c))^{\perp}$.*

Доказательство. Из теоремы Р. Дугласа следует, что $a = cd$, где $\mathrm{Im}(d) \subset (\ker(c))^{\perp}$. Тогда $c = cdba^*$, $c(I - dba^*) = 0$. Для произвольного $x \in M$ $x = (I - dba^*)x + dba^*x$, при этом $(I - dba^*)x \in \ker(c)$, $dba^*x \in (\ker(c))^{\perp}$. Поэтому $dba^* = P_{(\ker(c))^{\perp}}$ — ортопроектор на $(\ker(c))^{\perp}$. Поскольку ортопроектор самосопряжен, то $ab^*d^* = P_{(\ker(c))^{\perp}}$, откуда $(\ker(c))^{\perp} \subset \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(c)$.

Лемма 5.3 доказана.

Для гильбертовых пространств H, H' обозначим через $\mathcal{B}(H, H')$ множество всех линейных непрерывных операторов из H в H'. Пусть $M_1, \ldots, M_n, M$ — гильбертовы пространства, $a_i \in \mathcal{B}(M_i, M)$ — набор линейных непрерывных операторов. Определим

$$\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n) = \left\{ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i a_{i,j} a_j^*, \ a_{i,j} \in \mathcal{B}(M_j, M_i), \ 1 \leqslant i, j \leqslant n \right\} \subset \mathcal{B}(M).$$

Отметим, что $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n)$ — $*$-алгебра. Из теоремы Р. Дугласа следует, что если набор операторов $\widetilde{a}_k \in \mathcal{B}(\widetilde{M}_k, M)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, такой, что $\mathrm{Im}(\widetilde{a}_k) = \mathrm{Im}(a_k)$, $1 \leqslant$ $\leqslant k \leqslant n$, то $\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{M}(\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n)$.

Лемма 5.4. *Пусть оператор* $a \in \mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n)$ *и* $\mathrm{Im}(a) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k)$. *Тогда* $\mathrm{Im}(a) \supset (\ker a)^\perp$.

Доказательство. Определим $b = \left(\sum_{k=1}^n a_k a_k^*\right)^{1/2}$, тогда $\mathrm{Im}(b) =$ $= \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k) \supset \mathrm{Im}(a_i)$. Из теоремы Р. Дугласа следует, что $a_i = b b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где $b_i \in \mathcal{B}(M_i, M)$. Тогда $a_i^* = b_i^* b$. Поэтому $a = b\left(\sum_{i,j} b_i a_{i,j} b_j^*\right) b$. Из леммы 5.3 следует $\mathrm{Im}(a) \supset (\ker(a))^\perp$.

Лемма 5.4 доказана.

***Следствие* 5.5.** *Пусть в условиях леммы* 5.4 $\ker a = \ker a^*$ (*это выполнено, например, если a нормальный*). *Тогда* $\mathrm{Im}(a) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k)$ *замкнут.*

Утверждение 5.6. *Пусть* $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(T_k) = \left(\left(\sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T\right)$ *и для всех* $1 \leqslant k \leqslant n$ *образ* $\mathrm{Im}(T_k)$ *замкнут. Тогда* $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(T_k)$ *замкнуто.*

Доказательство. Пусть $A = \left(\sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{U}} \alpha_{\mathcal{I}}\right) I - T$. Поскольку $\mathrm{Im}(T_k)$ замкнут, то $\mathrm{Im}(T_k) = \mathrm{Im}(T_k^{1/2})$. Ясно, что $A \in \mathcal{M}(T_1^{1/2}, \ldots, T_n^{1/2})$. Аналогично доказательству второй части утверждения 5.5 можно показать, что $\ker A = \bigcap_{k=1}^n \ker T_k$. Теперь из леммы 5.4 следует $\mathrm{Im}(A) \supset \overline{\mathrm{Im}(A)}$, что означает замкнутость $\mathrm{Im}(A)$.

Утверждение 5.6 доказано.

***Пример* 5.3.** *Пусть* $H_1, \ldots, H_n$ — *подпространства* H, $P_1, \ldots, P_n$ — *соответствующие ортопроекторы. Следующие утверждения равносильны:*

(1) $\mathrm{Im}(I - (I - P_n) \ldots (I - P_1)) = \sum_{k=1}^n H_k$,

(2) $\sum_{k=1}^n H_k$ *замкнуто.*

Используя лемму 5.4, можем сформулировать следующий критерий замкнутости суммы образов операторов.

Утверждение 5.7. *Пусть* $a_k \in \mathcal{B}(M_k, M)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Сумма* $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k)$ *замкнута тогда и только тогда, когда* $(a_1 a_1^* + \ldots + a_n a_n^*)^{1/2} \in \mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство. 1. Пусть сначала $a = (a_1 a_1^* + \ldots + a_n a_n^*)^{1/2} \in \mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n)$. Поскольку $\mathrm{Im}(a) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k)$ и $\ker a = (\mathrm{Im}(a))^\perp$ (так как a самосопряжен), то из леммы 5.4 получим $\mathrm{Im}(a) \supset \overline{\mathrm{Im}(a)}$, т. е. $\mathrm{Im}(a)$ — подпространство.

2. Пусть теперь сумма $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k)$ — подпространство. Рассмотрев операторы $b_k = (a_k a_k^*)^{1/2}$, можем сразу считать, что операторы a_k принадлежат $\mathcal{B}(M)$, самосопряжены и неотрицательны. Кроме того, можно считать, что $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}(a_k) = H$.

Тогда оператор $a_1^2+\ldots+a_n^2$ обратим. Поэтому

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{\frac{1}{2}}=(a_1^2+\ldots+a_n^2)(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{3}{2}}(a_1^2+\ldots+a_n^2)=$$

$$=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i^2(a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{3}{2}}a_j^2\in\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_n).$$

Утверждение 5.7 доказано.

***Следствие* 5.6.** *Пусть $H_1,\ldots,H_n$ — подпространства H, $P_1,\ldots,P_n$ — соответствующие ортопроекторы. Сумма $\sum_{k=1}^n H_k$ замкнута тогда и только тогда, когда $\left(\sum_{k=1}^n P_k\right)^{1/2}\in\mathcal{M}(P_1,\ldots,P_n)$.*

***5.4. Критерии замкнутости суммы подпространств в терминах* $\mathrm{Im}(A)$, *где* $A=\sum_{i,j}\alpha_{i,j}P_iP_j$, $\alpha_{i,j}\in\mathbb{C}$.** Пусть $H_1,\ldots,H_n$ — подпространства H с соответствующими ортопроекторами $P_1,\ldots,P_n$. Пусть сначала $n=2$. Из утверждения 2.7 следует, что если $A\in\mathcal{A}(P_1,P_2)$ (алгебра, порожденная ортопроекторами P_1,P_2) и $\mathrm{Im}(A)=H_1+H_2$, то H_1+H_2 замкнуто. При $n\geqslant 3$ аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.

***Пример* 5.4.** Пусть $A=P_1P_2+P_3$. Построим подпространства H_1,H_2,H_3 такие, что:

(Cond1) $\mathrm{Im}(A)=H_1+H_2+H_3$,

(Cond2) $H_1+H_2+H_3$ не замкнуто.

(Cond1) равносильно $H_2\subset H_1+H_3$ и $\mathrm{Im}(A)=H_1+H_3$. Для выполнения $\mathrm{Im}(A)=H_1+H_3$ достаточно, чтобы пара подпространств H_1,H_3 имела свойство обратного наилучшего приближения относительно пары операторов P_1P_2,P_3 (см. подпункт 4.2). Используя утверждение 4.4, убеждаемся, что для выполнения **(Cond1), (Cond2)** достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $H_2\subset H_1+H_3$,

(2) существует $\varepsilon>0$ такое, что $\|P_2x\|\geqslant\varepsilon\|x\|$, $x\in H_1$,

(3) подпространства $P_2(H_1),H_3$ линейно независимы и их сумма замкнута,

(4) H_1+H_3 не замкнуто.

Пусть операторы $a,b\colon l_2\to l_2$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) a самосопряжен и $\frac{1}{4}I\leqslant a\leqslant I$,

(2) $1\in\sigma(a)$ и $\ker(I-a)=0$,

(3) $E([1/4,3/4))l_2$ бесконечномерно, здесь $E(\cdot)$ — спектральная проекторнозначная мера a,

(4) $(I-a^{-1/2}b)$ — изометрия и $\mathrm{Im}(I-a^{-1/2}b)=E([1/4,3/4))l_2$.

Определим $H=l_2\oplus l_2$, $H_1=\{(x,0),\,x\in l_2\}$, $H_2=\{(\sqrt{a}x,\sqrt{I-a}x),\,x\in l_2\}$, $H_3=\{(bx,\sqrt{I-a}x),\,x\in l_2\}$.

Убедимся, что H_3 — подпространство. Для этого достаточно показать, что существует $\varepsilon_1>0$ такое, что для любого $x\in l_2$ $\|bx\|+\|\sqrt{I-a}x\|\geqslant\varepsilon_1\|x\|$. Для этого достаточно доказать, что если $x_n\in l_2$, $bx_n\to 0$, $\sqrt{I-a}x_n\to 0$, то $x_n\to 0$. Имеем $-a^{-1/2}bx_n\to 0$, $(I-a^{-1/2}b)x_n-x_n\to 0$, $\sqrt{I-a}(I-a^{-1/2}b)x_n-\sqrt{I-a}x_n\to 0$, $\sqrt{I-a}(I-a^{-1/2}b)x_n\to 0$. Поскольку $\|\sqrt{I-a}z\|\geqslant\frac{1}{2}\|z\|$ для $z\in E([1/4,3/4))l_2$, то $(I-a^{-1/2}b)x_n\to 0$, $x_n\to 0$. Итак, H_3 — подпространство.

Поскольку $H_1 + H_3 = \{(x, \sqrt{I-a}y),\ x, y \in l_2\}$, то $H_2 \subset H_1 + H_3$ и $H_1 + H_3$ не замкнуто.

Пусть $x = (y, 0) \in H_1$. Поскольку $P_2 = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(I-a)} \\ \sqrt{a(I-a)} & I-a \end{pmatrix}$, то $\|P_2x\|^2 = (ay, y) \geqslant \frac{1}{4}\|y\|^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2$, $\|P_2x\| \geqslant (1/2)\|x\|$. Легко видеть, что $P_2(H_1) = H_2$.

Покажем, что H_2, H_3 линейно независимы и их сумма замкнута. Для этого достаточно доказать, что если $X_n \in H_2, Y_n \in H_3$ и $X_n + Y_n \to 0$, то $X_n \to 0$. Пусть $X_n = (\sqrt{a}x_n, \sqrt{I-a}x_n)$, $Y_n = (by_n, \sqrt{I-a}y_n)$. Тогда $\sqrt{a}x_n + by_n \to 0$ и $\sqrt{I-a}(x_n + y_n) \to 0$. Поэтому $x_n + a^{-1/2}by_n \to 0$, $\sqrt{I-a}(I - a^{-1/2}b)y_n \to 0$, $(I - a^{-1/2}b)y_n \to 0$. Поскольку $I - a^{-1/2}b$ — изометрия, то $y_n \to 0$, $x_n \to 0$.

Итак, H_1, H_2, H_3 удовлетворяют условиям **(Cond1), (Cond2)**.

Далее будем рассматривать операторы вида $A = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} P_i P_j$, где $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$. Как показывает предыдущий пример, из $\mathrm{Im}(A) = \sum_{k=1}^{n} H_k$, вообще говоря, не следует замкнутость $\sum_{k=1}^{n} H_k$. Будем накладывать условия на $\alpha_{i,j}$, чтобы это стало верным. Далее $\alpha_{i,i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Определим $\beta_{i,i} = \alpha_{i,i}$ и

$$\beta_{i,j} = -\frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{Re}\alpha_{i,j} + \mathrm{Re}\alpha_{j,i})^2 + (\mathrm{Im}\alpha_{i,j} - \mathrm{Im}\alpha_{j,i})^2},\ i \neq j.$$

Для произвольного $x \in H$

$$\mathrm{Re}(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\|P_ix\|^2 + \sum_{i<j} \mathrm{Re}(\alpha_{i,j}(P_jx, P_ix) + \alpha_{j,i}(P_ix, P_jx)) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\|P_ix\|^2 + 2\sum_{i<j} \beta_{i,j}|(P_ix, P_jx)| \geqslant \sum_{i,j} \beta_{i,j}\|P_ix\|\|P_jx\|. \tag{5.1}$$

Утверждение 5.8. *Пусть матрица $B = (\beta_{i,j})$ положительно определена. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $\sum_{k=1}^{n} H_k$ *замкнута,*

(2) $\mathrm{Im}(A) = \sum_{k=1}^{n} H_k$,

(3) $\mathrm{Im}(A)$ *замкнут.*

Доказательство. Можно считать, что $\sum_{k=1}^{n} H_k$ плотна в H. Из неравенств (5.1) и положительной определенности B следует, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для произвольного $x \in H$

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \geqslant \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{n} \|P_kx\|^2.$$

$(1) \Rightarrow (2), (3)$. Поскольку $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\sum_{k=1}^{n} P_k \geqslant \varepsilon_2 I$. Тогда $\mathrm{Re}(Ax, x) \geqslant \varepsilon_1\varepsilon_2\|x\|^2$, поэтому A обратим. В частности, $\mathrm{Im}(A) = H$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Поскольку $A \in \mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n)$, то из леммы 5.4 следует $\mathrm{Im}(A) \supset \supset (\ker(A))^{\perp}$. Пусть $x \in \ker(A)$, тогда $Ax = 0$, $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$. Поэтому $P_k x = = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, откуда $x = 0$. Итак, $\ker(A) = 0$, поэтому $\mathrm{Im}(A) = H$ и $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$.

(3) $\Rightarrow$ (1). В этом случае $\mathrm{Im}(A) = (\ker(A^*))^{\perp}$. Пусть $x \in \ker(A^*)$, тогда $A^* x = = 0$, $(A^* x, x) = 0$, $(Ax, x) = 0$, $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$. Поэтому $x = 0$. Итак, $\ker(A^*) = 0$, поэтому $\mathrm{Im}(A) = H$, $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$.

Утверждение 5.8 доказано.

Теперь откажемся от положительной определенности B. Далее предполагаем, что выполнены следующие условия:

$(\mathbf{B_1})$ B неотрицательно определена, $0 \in \sigma(B)$ и имеет кратность 1,

$(\mathbf{B_2})$ построим граф Γ_β с множеством вершин $1, 2, \ldots, n$ следующим образом: i соединено с j, если $\beta_{i,j} \neq 0$. Граф Γ_β связен.

Пусть вектор $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ является базисом $\ker(B)$. Тогда $(Bs, s) = 0$. Определим $s' = (|s_1|, \ldots, |s_n|)$. Поскольку $\beta_{i,i} > 0$ и $\beta_{i,j} \leqslant 0$ при $i \neq j$, то $(Bs', s') \leqslant (Bs, s) = 0$. Из неотрицательной определенности B следует $(Bs', s') = = 0$, $Bs' = 0$. Поэтому можем считать, что $s_1, \ldots, s_n$ неотрицательны. Поскольку $Bs = 0$, то $\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} s_j = 0$, $\alpha_{i,i} s_i = \sum_{j \neq i} (-\beta_{i,j}) s_j$. Поэтому если $s_i = 0$ и $\beta_{i,j} \neq 0$ (т. е. $\beta_{i,j} < 0$), то $s_j = 0$. Предположив, что для некоторого i $s_i = 0$, из связности Γ_β получим $s_1 = \ldots = s_n = 0$. Пришли к противоречию. Итак, $s_1, \ldots, s_n > 0$.

***Замечание* 5.2.** Легко показать, что если выполнено условие $(\mathbf{B_1})$ и $s_1, \ldots \ldots, s_n > 0$, то выполнено и условие $(\mathbf{B_2})$.

Утверждение 5.9. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{B_1})$, $(\mathbf{B_2})$. *Тогда*:

(1) *если* $\mathrm{Im}(A) = \sum_{k=1}^{n} H_k$, *то* $\sum_{k=1}^{n} H_k$ *замкнуто,*

(2) *если* $\mathrm{Im}(A)$ *замкнут, то* $\sum_{k=1}^{n} H_k$ *замкнуто,*

(3) *если* $\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} H_k^{\perp} = H$, *то* A *обратим.*

Лемма 5.5. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{B_1})$, $(\mathbf{B_2})$ *и* $\bigcap_{k=1}^{n} H_k = \bigcap_{k=1}^{n} H_k^{\perp} = = 0$. *Тогда* $\ker(A) = \ker(A^*) = 0$.

Доказательство. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда $Ax = 0$, $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$. Из неравенств (5.1) и неотрицательной определенности B следует, что в неравенствах (5.1) везде достигаются равенства и $\sum_{i,j} \beta_{i,j} \|P_i x\| \|P_j x\| = 0$. Поэтому $\|P_k x\| = \lambda s_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, для некоторого $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 0$, то $P_k x = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, откуда $x = 0$. Предположим, что $\lambda > 0$. Тогда $P_k x \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Поскольку в неравенствах (5.1) достигаются равенства, если $\beta_{i,j} \neq 0$, то $|(P_i x, P_j x)| = \|P_i x\| \|P_j x\|$, существует $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ такое, что $P_i x = \lambda_{i,j} P_j x$. Так как Γ_β связен, то $P_1 x = = \lambda_2 P_2 x = \ldots = \lambda_n P_n x$ для некоторых комплексных $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Далее, поскольку $\bigcap_{k=1}^{n} H_k = 0$, то $P_1 x = 0$. Пришли к противоречию с $\lambda > 0$. Итак, $\ker(A) = 0$.

Докажем, что $\ker(A^*) = 0$. Пусть $x \in \ker(A^*)$, тогда $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем $x = 0$.

Лемма 5.5 доказана.

***Доказательство утверждения* 5.9.** Можно считать, что $\bigcap_{k=1}^{n} H_k = = \bigcap_{k=1}^{n} H_k^{\perp} = 0$.

Докажем (1). Поскольку $A \in \mathcal{M}(P_1, \ldots, P_n)$, из леммы 5.4 следует $\mathrm{Im}(A) \supset \supset (\ker(A))^{\perp}$. Из леммы 5.5 получаем $\ker(A) = 0$. Поэтому $\mathrm{Im}(A) = H$, откуда $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$.

Докажем (2). Имеем $\mathrm{Im}(A) = (\ker(A^*))^{\perp} = H$, откуда $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$.

Докажем (3). Пусть $\gamma_{i,j} = -\beta_{i,j}$, $i \neq j$. Поскольку $Bs = 0$, то $\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} s_j = 0$, $\alpha_{i,i} = \sum_{j \neq i} \gamma_{i,j} \dfrac{s_j}{s_i}$. Из неравенств (5.1) для произвольного $x \in H$ имеем

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} \|P_i x\|^2 - 2 \sum_{i<j} \gamma_{i,j} |(P_i x, P_j x)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \neq i} \gamma_{i,j} s_i s_j \right) \|P_i x / s_i\|^2 - 2 \sum_{i<j} \gamma_{i,j} s_i s_j |(P_i x / s_i, P_j x / s_j)|. \qquad (5.2)$$

У нас $\sum_{k=1}^{n} H_k^{\perp} = H$, $s_1, \ldots, s_n > 0$, Γ_β связен. Поэтому из утверждения 3.4 следует, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для произвольных $y_k \in H_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$2 \sum_{i<j} \gamma_{i,j} s_i s_j |(y_i, y_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \neq i} \gamma_{i,j} s_i s_j - \varepsilon_1 \right) \|y_i\|^2.$$

Подставив в это неравенство $y_i = P_i x / s_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, из неравенства (5.2) получим $\mathrm{Re}(Ax, x) \geqslant \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \|P_i x / s_i\|^2 \geqslant \varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} \|P_i x\|^2$ для некоторого $\varepsilon_2 > 0$. Поскольку $\sum_{k=1}^{n} H_k = H$, то $\mathrm{Re}(Ax, x) \geqslant \varepsilon_3 \|x\|^2$ для некоторого $\varepsilon_3 > 0$. Отсюда следует, что A обратим.

Утверждение 5.9 доказано.

Рассмотрим применения утверждения 5.9. Пусть Γ — связный граф с множеством вершин $1, 2, \ldots, n$. Будем писать $i \sim j$, если i соединено с j в Γ. Пусть каждой паре вершин i, j, соединенных ребром в Γ, сопоставлены действительные числа $\xi_{i,j}, \xi_{j,i}$, причем $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} > 0$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим $\xi_i = (1/2) \sum_{j \sim i} (\xi_{i,j} + \xi_{j,i})$. Ясно, что $\xi_i > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i \sim j} \xi_{i,j}$. Определим $A = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P_i - \sum_{i \sim j} \xi_{i,j} P_i P_j$.

***Пример* 5.5.** Пусть $E(\Gamma) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n,1\}\}$, т. е. Γ — цикл. Пусть $\xi_{1,2} = \xi_{2,3} = \ldots = \xi_{n,1} = 1$, $\xi_{2,1} = \xi_{3,2} = \ldots = \xi_{1,n} = 0$. Тогда $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 1$ и $A = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} P_i P_{i+1}$, где обозначено $P_{n+1} = P_1$.

В предыдущих обозначениях оператор A получается при выборе $\alpha_{i,j}$ таким образом:

(1) $\alpha_{i,i} = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $\alpha_{i,j} = -\xi_{i,j}$, если $i \sim j$,

(3) $\alpha_{i,j} = 0$, если $i \neq j$ и i не соединено с j в Γ.

Тогда для $\beta_{i,j}$ имеем

(1) $\beta_{i,i} = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $\beta_{i,j} = -\dfrac{1}{2}(\xi_{i,j} + \xi_{j,i})$, если $i \sim j$,

(3) $\beta_{i,j} = 0$, если $i \neq j$ и i не соединено с j в Γ.

На векторе $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ квадратичная форма, порожденная B, равна

$$(Bt,t)=\sum_{i=1}^n \xi_i t_i^2-\sum_{\{i,j\}\in E(\Gamma)}(\xi_{i,j}+\xi_{j,i})t_it_j=\sum_{\{i,j\}\in E(\Gamma)}\frac{1}{2}(\xi_{i,j}+\xi_{j,i})(t_i-t_j)^2.$$

Поэтому B неотрицательно определена, $0\in\sigma(B)$ имеет кратность 1, соответствующий собственный вектор: $(1,1,\dots,1)$ (это следует из связности Γ). Также ясно, что $\Gamma_\beta=\Gamma$. Таким образом, условия $(\mathbf{B_1})$, $(\mathbf{B_2})$ выполнены.

Утверждение 5.10. *Следующие утверждения равносильны*:

(1) $\sum_{k=1}^n H_k, \sum_{k=1}^n H_k^\perp$ *замкнуты,*

(2) $\mathrm{Im}(A)=\left(\sum_{k=1}^n H_k\right)\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^n H_k\right)^\perp$,

(3) $\mathrm{Im}(A)$ *замкнут.*

Доказательство. Разложим $H=\bigcap_{k=1}^n H_k^\perp\oplus\bigcap_{k=1}^n H_k\oplus\widetilde{H}$, тогда $H_k=0\oplus\bigcap_{k=1}^n H_k\oplus\widetilde{H}_k$, где $\widetilde{H}_k$ — подпространство $\widetilde{H}$. Ясно, что $\bigcap_{k=1}^n \widetilde{H}_k^\perp=\bigcap_{k=1}^n \widetilde{H}_k=0$ (здесь $\widetilde{H}_k^\perp$ обозначает ортогональное дополнение $\widetilde{H}_k$ в $\widetilde{H}$). Обозначим через $\widetilde{P}_k$ ортопроектор на $\widetilde{H}_k$ в пространстве $\widetilde{H}$. Тогда $P_k=0\oplus I\oplus\widetilde{P}_k$. Поскольку $\sum_{i=1}^n\xi_i=\sum_{i\sim j}\xi_{i,j}$, то $A=0\oplus 0\oplus\widetilde{A}$, где $\widetilde{A}=\sum_{i=1}^n\xi_i\widetilde{P}_i-\sum_{i\sim j}\xi_{i,j}\widetilde{P}_i\widetilde{P}_j$. Таким образом, достаточно доказать нужное утверждение для подпространств $\widetilde{H}_k$ пространства $\widetilde{H}$. Поэтому сразу будем считать, что $\bigcap_{k=1}^n H_k=\bigcap_{k=1}^n H_k^\perp=0$.

$(1)\Rightarrow(2),(3)$. Поскольку $\sum_{k=1}^n H_k=\sum_{k=1}^n H_k^\perp=H$, то нужное следует из утверждения 5.9.

$(2)\Rightarrow(1)$. Имеем $\mathrm{Im}(A)=\sum_{k=1}^n H_k$. Из утверждения 5.9 следует замкнутость $\sum_{k=1}^n H_k$, поэтому $\sum_{k=1}^n H_k=H$, и, следовательно, $\mathrm{Im}(A)=H$. Для $i=1,2,\dots,n$ обозначим через Q_i ортопроектор на $H_i^\perp$. Тогда $P_i=I-Q_i$. Поэтому

$$A=\sum_{i=1}^n\xi_i(I-Q_i)-\sum_{i\sim j}\xi_{i,j}(I-Q_i)(I-Q_j).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^n\xi_i=\sum_{i\sim j}\xi_{i,j}$, при раскрытии скобок слагаемые, кратные I, сократятся, поэтому $\mathrm{Im}(A)\subset\sum_{k=1}^n H_k^\perp$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^n H_k^\perp=H$.

$(3)\Rightarrow(1)$. Из леммы 5.5 следует $\ker(A^*)=0$, поэтому $\mathrm{Im}(A)=H$. Отсюда $\sum_{k=1}^n H_k=H$. Повторив рассуждения при доказательстве импликации $(2)\Rightarrow(1)$, получим $\sum_{k=1}^n H_k^\perp=H$.

Утверждение 5.10 доказано.

5.5. Сумма n подпространств представима в виде суммы пары подпространств. Рассмотрим следующий вопрос: пусть $H_1,\dots,H_n$ — подпространства H. Можно ли сумму $H_1+\ldots+H_n$ представить в виде суммы двух подпространств, т. е. существуют ли подпространства M_1,M_2, для которых $H_1+\ldots+H_n=M_1+M_2$? В случае сепарабельного пространства H утвердительный ответ следует из теоремы 2.6 работы [10]. Однако упомянутая теорема неверна в случае несепарабельного пространства (см. замечание после ее доказательства). Тем не менее мы покажем, что ответ утвердительный в случае произвольного гильбертова пространства H (отметим, что, например, гильбертово пространство почти периодических функций на $\mathbb{R}$, имеющее размерность континуум, имеет многочисленные применения в теории дифференциальных уравнений и математической физике).

Теорема 5.2. *Для произвольных подпространств $H_1, \ldots, H_n$ существуют два подпространства M_1, M_2 такие, что $H_1 + \ldots + H_n = M_1 + M_2$.*

Для доказательства необходимы несколько лемм. Следующая лемма мотивирована леммой 3.2 в [10].

Лемма 5.6. *Пусть A, B — неотрицательные самосопряженные операторы, E_A, E_B — их спектральные меры. Пусть $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(B)$. Тогда существует $K > 0$ такое, что для всех $\alpha > 0$*

$$\dim E_A([\alpha, +\infty))H \leqslant \dim E_B([\alpha/K, +\infty))H.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что существует $K > 0$, для которого $(E_A([\alpha, +\infty))H) \cap (E_B([\alpha/K, +\infty))H)^{\perp} = 0$ для всех $\alpha > 0$. Из теоремы Р. Дугласа следует, что существует оператор $C \in \mathcal{B}(H)$, для которого $A = BC$, поэтому $A = C^* B$. Пусть $x \in E_A([\alpha, +\infty))H$. Тогда $\|Ax\| \geqslant \alpha\|x\|$, $\|C^*Bx\| \geqslant \alpha\|x\|$, а следовательно, $\|Bx\| \geqslant \dfrac{\alpha}{\|C\|}\|x\|$. Поэтому нам подойдет $K = 2\|C\|$.

Лемма 5.6 доказана.

Лемма 5.7. *Пусть A — неотрицательный самосопряженный оператор в H, причем $\ker A = 0$, E — его спектральная мера. Линеал $\mathrm{Im}(A)$ можно представить в виде суммы пары подпространств тогда и только тогда, когда $\dim E([\varepsilon, +\infty))H = \dim H$ для некоторого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Пусть сначала $\dim E([\varepsilon, +\infty))H = \dim H$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Можем считать, что $\varepsilon < 1$. Разложим $H = E([0, \varepsilon))H \oplus E([\varepsilon, \infty))H$. Относительно этого ортогонального разложения $A = A_1 \oplus A_2$, где $0 \leqslant A_1 \leqslant \varepsilon I$, а A_2 обратим. Поэтому $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A_1) \oplus E([\varepsilon, \infty))H$. Ясно, что $\dim E([0, \varepsilon))H \leqslant \dim E([\varepsilon, \infty))H$.

Таким образом, достаточно доказать следующее: в гильбертовом пространстве $M \oplus M \oplus N$ линеал $\mathrm{Im}(B) \oplus M \oplus N$ (здесь оператор $B\colon M \to M$) можно представить в виде суммы пары подпространств M_1, M_2. Ясно, что $M_1 = \{(Bx, (I - B)x, 0),\ x \in M\}$, $M_2 = 0 \bigoplus M \bigoplus N$ — искомые подпространства.

Пусть теперь $\mathrm{Im}(A)$ можно представить в виде суммы пары подпространств. Если H конечномерно, то нужное утверждение очевидно, поэтому далее H бесконечномерно. Пусть $\mathrm{Im}(A) = H_1 + H_2$, P_1, P_2 — соответствующие ортопроекторы. Поскольку $\ker A = 0$, то $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} = 0$. Определим подпространства $H_{1,1} = H_1 \cap H_2$, $H_{1,0} = H_1 \cap H_2^{\perp}$, $H_{0,1} = H_1^{\perp} \cap H_2$. Применим для пары подпространств H_1, H_2 теорему 2.2, используем ее обозначения. В ортогональном разложении (2.4) компонента $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp}$ отсутствует.

Тогда
$$H_1 + H_2 = H_{1,1} \oplus H_{1,0} \oplus H_{0,1} \oplus K \oplus \mathrm{Im}(\sqrt{I - a})$$
— образ оператора $B = I_{H_{1,1}} \oplus I_{H_{1,0}} \oplus I_{H_{0,1}} \oplus I_K \oplus \sqrt{I - a}$. Из леммы 5.6 ($\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$) следует существование $\varepsilon > 0$, для которого $\dim E([\varepsilon, \infty))H \geqslant \dim H_{1,1} + \dim H_{1,0} + \dim H_{0,1} + \dim K = \dim H$, т. е. $\dim E([\varepsilon, \infty))H = \dim H$.

Лемма 5.7 доказана.

***Доказательство теоремы* 5.2.** Можно считать, что $\overline{H_1 + \ldots + H_n} = H$. В случае конечномерного H утверждение теоремы очевидно, поэтому далее H бесконечномерно. Пусть размерность $\dim H_1$ — наибольшая из $\dim H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\dim H_1 = \dim H$. Определим оператор $A = \sqrt{P_1 + \ldots + P_n}$, пусть E — его спектральная мера. Поскольку $\mathrm{Im}(P_1) \subset \mathrm{Im}(A)$, из леммы 5.6 следует, что существует $\varepsilon > 0$, для которого $\dim E([\varepsilon, +\infty))H \geqslant \dim H_1 = \dim H$. Поэтому $\dim E([\varepsilon, +\infty))H = \dim H$. Теперь из леммы 5.7 следует нужное утверждение.

Теорема 5.2 доказана.

5.6. Когда из замкнутости $H_1 + \ldots + H_n$ следует замкнутость $H_1 + \ldots \ldots + H_m$ ($m < n$ фиксировано).

Утверждение 5.11. *Пусть M_1, M_2 — гильбертовы пространства, $a\colon M_1 \to H$, $b\colon M_2 \to H$ — линейные непрерывные операторы, причем* $\mathrm{Im}(a) \bigcap \mathrm{Im}(b)$, $\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$ *— подпространства в H. Тогда* $\mathrm{Im}(a)$, $\mathrm{Im}(b)$ *— подпространства.*

Доказательство. 1. Сначала докажем требуемое утверждение при условии $\mathrm{Im}(a) \bigcap \mathrm{Im}(b) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\ker(a) = 0$ и $\ker(b) = 0$. Определим оператор $c\colon M_1 \oplus M_2 \to \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$ равенством $c(x, y) = ax + by$. Тогда c непрерывен и биективен, а потому обратим. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольных $x \in M_1$, $y \in M_2$ выполнено $\|ax + by\|^2 \geqslant \varepsilon^2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Подставив $y = 0$, получим $\|ax\| \geqslant \varepsilon\|x\|$, $x \in M_1$, поэтому $\mathrm{Im}(a)$ — подпространство. Аналогично $\mathrm{Im}(b)$ — подпространство.

2. Теперь рассмотрим общий случай. Обозначим $M = \mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b)$. Разложим $M_1 = a^{-1}(M) \oplus M_1'$ и определим оператор $a'\colon M_1' \to H$ равенством $a'x = ax$, $x \in M_1'$. Тогда $\mathrm{Im}(a') \cap \mathrm{Im}(b) = 0$ и $\mathrm{Im}(a') + \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$ — подпространство, поэтому $\mathrm{Im}(b)$ — подпространство. Аналогично $\mathrm{Im}(a)$ — подпространство.

Утверждение 5.11 доказано.

***Следствие* 5.7.** *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства H и $H_1 + \ldots + H_n$ — подпространство. Если для некоторого $m < n$ $(H_1 + \ldots + H_m) \cap (H_{m+1} + \ldots + H_n)$ — подпространство, то $H_1 + \ldots + H_m, H_{m+1} + \ldots + H_n$ — подпространства.*

***Следствие* 5.8.** *Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — подпространства H, сумма которых $H_1 + \ldots + H_n$ замкнута. Предположим, что для любого $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|I| < n$, существует $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $J \nsubseteq I$, такое, что $\left(\sum_{i \in I} H_i\right) \cap \left(\sum_{j \in J} H_j\right)$ — подпространство. Тогда для любого $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ сумма $\sum_{i \in I} H_i$ — подпространство.*

Доказательство получается применением индукции „сверху вниз” по $|I|$, база индукции — $|I| = n$.

Автор искренне признателен своему научному руководителю Ю. С. Самойленко, а также В. И. Рабановичу, А. В. Стрельцу за полезные советы и обсуждения результатов, приведенных в работе. Автор выражает благодарность С. Ф. Коляде за помощь при работе с литературой.

1. *Bauschke H. H., Borwein J. M.* On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Rev. – 1996. – **38**, № 3. – P. 367 – 426.
2. *Bickel P. J., Ritov Y., Wellner J. A.* Efficient estimation of linear functionals of a probability measure P with known marginal distributions // Ann. Statist. – 1991. – **19**, № 3. – P. 1316 – 1346.
3. *Björstad P. E., Mandel J.* On the spectra of sums of orthogonal projections with applications to parallel computing // BIT. – 1991. – **31**. – P. 76 – 88.
4. *Böttcher A., Spitkovsky I. M.* A gentle guide to the basics of two projections theory // Linear Algebra and its Appl. – 2010. – **432**. – P. 1412 – 1459.

5. *Browder F. E.* Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in banach spaces // Math. Z. – 1967. – **100**. – S. 201 – 225.
6. *Chunyuan D., Hongke D.* A new characterization of the closedness of the sum of two subspaces // Acta Math. Sci. – 2008. – **28B**. – P. 17 – 23.
7. *Combettes P. L., Reyes N. N.* Functions with prescribed best linear approximations // arXiv:0905.3520v1 [math.FA] 21 May 2009.
8. *Davis C.* Separation of two linear subspaces // Acta Sci. Math. Szeged. – 1958. – **19**. – P. 172 – 187.
9. *Douglas R. G.* On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 413 – 416.
10. *Fillmore P., Williams J.* On operator ranges // Adv. Math. – 1971. – **7**. – P. 254 – 281.
11. *Friedrichs K.* On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – **41**. – P. 321 – 364.
12. *Grobler J. J.* Closed sums of marginal subspaces of Banach function spaces // Contemp. Math. – 2007. – **435**. – P. 183 – 190.
13. *Guachalla J. H.* A characterization of reflexivity for dual Banach spaces // arXiv:math/0509683v1 [math.FA] 29 Sep 2005.
14. *Halmos P. R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 381 – 389.
15. *Hildebrandt S., Schmidt B.* Zur Konvergenz von Operatorprodukten im Hilbertraum // Math. Z. – 1968. – **105**. – S. 62 – 71.
16. *Holst M.* Algebraic Schwarz theory (Technical Report CRPC-TR994-10). – 1994.
17. *Kober H.* A theorem on Banach spaces // Compos. Math. – 1940. – **7**. – P. 135 – 140.
18. *Lang H.* On sum of subspaces in topological vector spaces and an application in theoretical tomography // Appl. Anal. – 1984. – **18**, № 4. – P. 257 – 265.
19. *Ostrovskyĭ V. L., Samoĭlenko Yu. S.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. 1. Representations by bounded operators. – Amsterdam: Harwood Acad. Publ., 1999.
20. *Rabanovich V. I.* On the spectra of sums and the norms of products of orthogonal projections // Contributed Talk, 17-th Int. Conf. Domain Decomposition Methods (Austria, 2006) (см. www.imath.kiev.ua/ slavik/).
21. *Schochetman I. E., Smith R. L., Tsui S-K.* On the closure of the sum of closed subspaces // Int. J. Math. and Mech. Sci. – 2001. – **26**, № 5. – P. 257 – 267.
22. *Spitkovsky I.* Once more on algebras generated by two projections // Linear Algebra and its Appl. – 1994. – **208/209**. – P. 377 – 395.
23. *Sunder V. S.* N subspaces // Can. J. Math. – 1988. – **40**. – P. 38 – 54.
24. *Svensson L.* Sums of complemented subspaces in locally convex spaces // Ark. mat. – 1987. – **25**, № 1. – P. 147 – 153.
25. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
26. *Протасов В. Ю.* Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход // Изв. РАН Сер. мат. – 1997. – **61**, № 5. – С. 99 – 136.
27. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Дрофа, 2004.
28. *Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О простых n-ках подпространств гильбертова пространства // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1668 – 1703.
29. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970.

Получено 16.02.11,
после доработки — 14.09.11