УДК 517.5

Е. С. Афанасьева (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

We study the problems of a continuous and homeomorphic extension of so-called ring Q-homeomorphisms between domains on Riemannian manifolds to the boundary. We establish conditions for a function $Q(x)$ and the boundaries of domains under which every ring Q-homeomorphism admits a continuous or homeomorphic extension to the boundary. This theory can be applied, in particular, to Sobolev classes.

Досліджуються проблеми неперервного та гомеоморфного продовження на межу так званих кільцевих Q-гомеоморфізмів між областями на ріманових многовидах. Знайдено умови на функцію $Q(x)$ та межі областей, при яких будь-який кільцевий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу. Теорію можна застосувати, зокрема, до класів Соболєва.

1. Введение. Систематическое изучение пространственных квазиконформных отображений началось в конце 50-х – начале 60-х годов. Метод экстремальных длин был впервые использован Альфорсом и Берлингом для исследования конформных отображений и восходит, в свою очередь, к приемам Гретша. Однако впоследствии вместо экстремальной длины стали использовать более удобную обратную к ней величину — конформный модуль, который имеет свойство полуаддитивности и является внешней мерой в пространстве кривых. Метод экстремальных длин или модулей успешно применялся в геометрической теории функции, в частности, к исследованию граничного поведения конформных и квазиконформных отображений.

В 1854 г. Риман использовал новый способ определения метрики через положительно определенную (невырожденную) квадратичную форму, которая впоследствии получила название римановой метрики. Понятие „многообразие” было впервые четко введено позже Пуанкаре. Систематическое изучение гладких многообразий началось после 1912 г.

Параллельно этой теории длительное время развивалась и теория отображений в рамках конформных и квазиконформных отображений. Бельтрами, Каратеодори, Кристоффель, Гаусс, Гильберт, Лиувилль, Пуанкаре, Риман, Шварц и другие внесли свой вклад в развитие теории отображений. Отметим, что конформные отображения и их обобщения играют важную роль в развитии теории потенциала, математической физики, римановых поверхностей и топологии.

В конце 1920-х – начале 1930-х годов был введен более общий, чем конформные, класс отображений, которые позже были названы квазиконформными. Вскоре квазиконформные отображения стали применяться к классическим проблем покрытия римановых поверхностей (Альфорс), классификации односвязных римановых поверхностей (Волковыский), описанию модулей римановых поверхностей (Тейхмюллер). Затем произошел переход к исследованию более общих отображений, таких как отображения, квазиконформные в среднем, с ограниченным интегралом Дирихле, с конечным искажением и др. В работе [1] для пространственных квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии легло в основу определения так называемых Q-гомеоморфизмов. В последние годы активно изучаются так называемые кольцевые Q-гомеоморфизмы. Это понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено на плоскости в связи с изучением вырожденных уравнений Бельтрами, а затем в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и метрических пространствах с мерами (см., например, статьи [2 – 5], а также монографию [6]).

В настоящей работе доказываются следствия для кольцевых Q-гомеоморфизмов и отображений класса Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ на римановых многообразиях из предыдущей статьи автора [5] о граничном поведении кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах с мерами.

2. Предварительные замечания. Напомним определения, которые можно найти, например, в [7 – 10]. *n-Мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ — это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U,φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ — гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$: каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*. *Гладкое многообразие* — многообразие с картами $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким (C^∞)-образом.

Римановым многообразием $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданным на нем метрическим тензором g или римановой метрикой. *Римановой метрикой* на многообразии называется положительно определенное (невырожденное) симметричное тензорное поле

$$g = g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

которое определяется только в координатных картах с правилом перехода

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x))\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Тензорное метрическое поле $g_{ij}(x)$ в дальнейшем предполагается гладким.

Элемент длины на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j = (dx_1,\ldots,dx_i)\begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \ldots \\ dx_j \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где g_{ij} — метрический тензор, x^i — локальные координаты. В соответствии с этим, если $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{M}^n$ — кусочно-гладкая кривая и $x(t)$ — ее параметрическое задание в локальных координатах, то ее длина вычисляется по формуле

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\ \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt. \tag{3}$$

Геодезическое расстояние $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки p_1 и p_2 в $(\mathbb{M}^n, g)$ (см. [8, с. 94]).

Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой

$$dv = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \ldots dx^n, \tag{4}$$

а *элемент площади* гладкой гиперповерхности H на $(\mathbb{M}^n, g)$ — инвариантной формой

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det g^*_{\alpha\beta}}\, du_1 \ldots du_{n-1}, \tag{5}$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} по формуле

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u))\ \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\ \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \tag{6}$$

(см., например, § 88 в [10]). Здесь $x(u)$ — гладкая параметризация гиперповерхности H с $\nabla_u x \neq 0$. Таким образом, метрический тензор g на римановом многообразии порождает соответствующий метрический тензор g^* на произвольной регулярной поверхности.

Здесь под *гиперповерхностью* на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ понимается непрерывное отображение $H\colon U \to \mathbb{M}^n$, где U — область в $(n-1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ или более общо U — $(n-1)$-мерное многообразие, например $(n-1)$-мерная сфера. Если отображение H является гладким (класса C^1) в локальных координатах, то гиперповерхность называют *гладкой*. Если, кроме того, $\nabla_u x \neq 0$, то гиперповерхность H называется *регулярной*. Например, геодезические сферы в достаточно малых окрестностях любой точки риманового многообразия являются регулярными гиперповерхностями (см. [8, с. 106]).

Напомним следующие фундаментальные факты (см., например, лемму 5.10 и следствие 6.11 в [8], а также [7, с. 260, 261]).

Предложение 1. *В каждой точке риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка лучей, исходящих из начала координат.*

Указанные окрестности и координаты принято называть *нормальными*.

***Замечание* 1.** В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную регулярную параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор в начале координат в этих координатах совпадает с единичной матрицей (см., например, предложение 5.11 в [8]).

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых на n-мерном римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho\colon \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $n \geq 2$, называется *допустимой* для Γ, если условие

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1 \tag{7}$$

выполнено для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Здесь мы используем естественный параметр s длин дуг кривой γ. Под *длиной произвольной кривой* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{M}^n$ понимается супремум всех сумм

$$\sup\sum_{j=1}^{k} d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})) \tag{8}$$

над всеми конечными разбиениями $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k = b$ интервала $[a,b]$. Кривая γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна; кривая $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{M}^n$ называется *локально спрямляемой*, если любая ее собственная подкривая $\gamma|_{[a',b']}$, $a<a'<b'<b$, спрямляема.

Конформным модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{M}^n}\rho^n dv, \tag{9}$$

где нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям.

Величина (9) выполняет роль внешней меры в пространстве кривых. В дальнейшем говорим, что некоторое свойство P имеет место для почти всех кривых семейства Γ, если подсемейство Γ_* кривых семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет нулевой конформный модуль. В частности, очевидно, что почти всех кривые в $(\mathbb{M}^n, g)$ являются спрямляемыми.

Аналогично [6] говорим, что гомеоморфизм $f : D\to D_*$ между областями D и D_* на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ является *Q-гомеоморфизмом* с измеримой функцией $Q\colon D\to[1,\infty]$, если

$$M(f\Gamma)\le\int\limits_{D} Q(x)\rho^n(x)\,dv(x) \tag{10}$$

для произвольного семейства Γ кривых в D и любых $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$.

Следующая концепция является естественным обобщением кольцевого определения квазиконформных отображений по Герингу (ср. с [11]).

В дальнейшем подразумевается, что геодезические сферы $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{M}^n\colon d(x,x_0) = r\}$, геодезические кольца $A = A(x_0,r_1,r_2) = \{x\in\mathbb{M}^n\colon r_1 < d(x,x_0) < r_2\}$ и геодезические шары $B(x_0,r) = \{x\in\mathbb{M}^n\colon d(x,x_0)<r\}$ лежат в нормальной окрестности точки x_0.

Пусть D — область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, D_* — область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n\ge 2$, и $Q\colon D\to[0,\infty]$ — измеримая функция. В дальнейшем мы часто без оговорок будем подразумевать, что функция Q продолжена нулем вне области D. Далее $\Delta(E,F;D)$ обозначает семейство всех кривых γ, соединяющих множества E и F в D. Говорим, что гомеоморфизм $f\colon D\to D_*$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0\in\overline{D}$, если условие

$$M\left(\Delta(f(\mathrm{C}_0),\, f(\mathrm{C}_1); D_*)\right)\ \le\ \int\limits_{A\cap D} Q(x)\ \eta^n\left(d(x,x_0)\right)dv(x) \tag{11}$$

выполняется для любого геодезического кольца $A = A(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<\infty$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $\mathrm{C}_0\subset\overline{B(x_0,\,r_1)}$ и $\mathrm{C}_1\subset\mathbb{M}^n\setminus B(x_0,r_2)$ и любой измеримой функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr\ge 1. \tag{12}$$

Также говорим, что f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в D, если (11) выполнено для всех точек $x_0 \in \overline{D}$. Заметим, что любой Q-гомеоморфизм в области является кольцевым Q-гомеоморфизмом в той же области, но не наоборот.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма было впервые введено в связи с исследованиями уравнений Бельтрами на плоскости (см., например, [4]), затем в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в статье [3] и, наконец, в метрических пространствах с мерами в работе [5].

3. Основная лемма. Далее H^k, $k = 1, \ldots, n-1$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A на $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$. Точнее, пусть A — множество на $(\mathbb{M}^n, g)$. Тогда полагаем

$$H^k(A) = \sup_{\varepsilon > 0} H^k_{\varepsilon}(A)\,, \tag{13}$$

$$H^k_{\varepsilon}(A) \ = \inf \sum_{i=1}^{\infty} {\delta_i}^k\,, \tag{14}$$

где инфимум в (14) берется над всеми счетными наборами чисел $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ такими, что некоторые множества A_i на $(\mathbb{M}^n, g)$ с диаметрами δ_i покрывают A (см., например, [12]). Пусть для некоторого множества A и $k \geq 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < \infty$. Тогда $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$ (см., например, разд. 1. В гл. VII в [12]). Величина

$$\dim_H A = \sup_{H^k(A) > 0} k$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

Лемма 1. *Хаусдорфова размерность областей на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ относительно геодезического расстояния совпадает с топологической размерностью n. Кроме того, гладкие римановы многообразия локально n-регулярны по Альфорсу.*

Определение регулярности по Альфорсу метрического пространства с мерой см. в [5].

Доказательство. Напомним, что

$$d(z, y) = \inf_{\gamma} s_{\gamma}, \tag{15}$$

где инфимум берется по всем кусочно-гладким кривым γ, соединяющим z и y в $\mathbb{M}^n$ и s_{γ} — длина кривой γ. При этом $s_{\gamma} = \displaystyle\int \sqrt{g_{ij}(x(s_*))\frac{dx^i}{ds_*}\frac{dx^j}{ds_*}}ds_*$, где s_* — естественный параметр длин дуг кривой γ, и $\left|\dfrac{dx}{ds_*}\right| = 1$. Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, где $\eta^i = \dfrac{dx^i}{ds_*}$. Оценим геодезическое расстояние $d(z, y)$ через евклидово расстояние $\rho(z, y)$ в произвольных локальных координатах. Для этого цели рассмотрим функцию

$$\varphi_{x_0}(\eta) = g_{ij}(x_0)\ \eta^i \eta^j, \tag{16}$$

заданную на единичной сфере $|\eta| = 1$ в $\mathbb{R}^n$, где $x_0 \in \mathbb{M}^n$ — фиксированная точка. По определению метрический тензор g_{ij} является положительно определенным и непрерывным. Поскольку непрерывная на компакте функция является ограниченной, $\varphi_{x_0}(\eta)$ достигает на нем своего максимума и минимума

$$0 < m_{x_0} < \varphi_{x_0}(\eta) < M_{x_0} < \infty, \tag{17}$$

где m_{x_0} и M_{x_0} — константы, зависящие от x_0.

Вследствие непрерывной зависимости $\varphi_x(\eta)$ по совокупности переменных x и η, (17) имеет место не только в точке x_0, но и во всех точках x некоторой окрестности x_0. От любой наперед заданной координатной системы можно перейти в другую систему, такую, что в точке x_0 значения всех координат будут равны нулю, а коэффициенты g_{ij} фундаментальной формы (2) равны единице, если $i = j$, и нулю, если $i \neq j$ (см., например, [7, с. 201]).

Таким образом, локально имеем двустороннюю оценку геодезического расстояния через евклидово расстояние в соответствующей системе координат

$$mr(z,y) \leq d(z,y) \leq Mr(z,y),$$

где $0 < m \leq M < \infty$.

С другой стороны, из тех же соображений имеем локальную двустороннюю оценку объема $V(B) = \int_B \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \ldots dx^n$ геодезических шаров B через их евклидов объем $W(B)$

$$\widetilde{m}W(B) \leq V(B) \leq \widetilde{M}W(B) \tag{18}$$

в соответствующей системе координат, где $\det g_{ij}$ близок к единице.

Комбинируя (17) и (18), получаем, что локально

$$cd^n \leq V(B) \leq Cd^n,$$

где d — геодезический радиус шаров B.

Таким образом, римановы многообразия являются локально n-регулярными по Альфорсу, а значит, их хаусдорфова размерность совпадает с топологической размерностью n (см. [14, с. 62]).

Из леммы 1, в частности, получаем локальное условие удвоения меры.

***Следствие* 1.** *Для любой точки x_0 на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ найдутся $r_0 > 0$ и $c \in (1,\infty)$ такие, что*

$$v(B(x_0, 2r)) \leq cv(B(x_0, r)) \quad \forall\, r \leq r_0.$$

4. Функции конечного среднего колебания. Пусть $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, — гладкое риманово многообразие. Аналогично [13] говорим, что функция $\varphi\colon \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \mathbb{M}^n$ (сокращенно $\varphi \in FMO(x_0)$), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon|\, dv(x) < \infty \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{M}^n, \tag{19}$$

где

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = \tilde{\varphi}_{\varepsilon,x_0} = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dv(x) = \frac{1}{v(B(x_0,\varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dv(x) \tag{20}$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по геодезическому шару $B(x_0,\varepsilon)$ относительно меры объема v. Здесь условие (19) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры v по некоторому геодезическому шару $B(x_0,\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon>0$. Пишем также $\varphi\in$ *FMO*, если $\varphi\in FMO(x_0)$ для всех $x_0\in\mathbb{M}^n$.

Известно, что условие (19) выполняется для почти всех точек x_0, если $\varphi\in L^1_{\rm loc}$, и поэтому указанное условие является естественным.

Предложение 2. *Если для некоторых чисел* $\varphi_\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \ \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon|\,dv(x)<\infty, \tag{21}$$

то φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 (см. [15]).

Доказательство. Действительно, по неравенству треугольника

$$\fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|dv(x)\le \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon|dv(x)+|\varphi_\varepsilon-\overline{\varphi}_\varepsilon|\le$$

$$\le 2\fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon|dv(x).$$

Следствие 2. *Если для точки $x_0\in D$ выполнено*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \ \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,dv(x)<\infty, \tag{22}$$

то φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Следующее утверждение получается из леммы 4.1 в [15] в силу леммы 1 и следствия 1.

Предложение 3. *Для любой неотрицательной функции $\varphi\colon\mathbb{M}^n\to\mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\,dv(x)}{\left(d(x,x_0)\log\dfrac{1}{d(x,x_0)}\right)^n}=O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{23}$$

при $\varepsilon\to 0$ и некотором $\varepsilon_0\in(0,\delta_0)$, где $\delta_0=\min\left(e^{-e},r_0\right)$, r_0 — радиус нормальной окрестности точки x_0.

5. Граничное поведение кольцевых *Q*-гомеоморфизмов. Далее D и D_* — области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n,g)$ и $(\mathbb{M}^n_*,g^*)$, $n\ge 2$, соответственно. Напомним некоторые определения в соответствии с работой [15], в которой рассматривались произвольные метрические пространства с мерами.

Область D называется *локально связной в точке* $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется другая ее окрестность $V\subseteq U$ такая, что $V\cap D$ связно. Заметим, что любая жорданова область D локально связна в любой своей граничной точке (см. [16, с. 66]).

Замечание 2. Если область D на $(\mathbb{M}^n,g)$ локально связна в точке $x_0\in\partial D$, то она и локально линейно связна в x_0. Связность и линейная связность эквивалентны для открытых множеств на многообразиях и в так называемых слабо плоских пространствах, которые включают в себя известные широкие классы пространств

Левнера, группы Карно и Гейзенберга (см. следствие 13.1 в [6] или следствие 2.1 в [15]).

Будем также говорить, что граница ∂D — *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq P \tag{24}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Будем говорить, что граница области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq \delta \tag{25}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Очевидно, что (24) влечет (25).

Граница ∂D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

***Замечание* 3.** В определениях слабо плоской и сильно достижимой границ можно ограничиться окрестностями точки x_0 из какой-либо фундаментальной системы окрестностей и, в частности, можно выбрать окрестности U и V точки x_0 в виде достаточно малых шаров (открытых или замкнутых) с центром в точке x_0 в локальных координатах или относительно геодезического расстояния. Кроме того, здесь можно ограничиться только континуумами E и F в $\overline{U}$.

С учетом леммы 1 следующая лемма вытекает из леммы 3.1 работы [15].

Лемма 2. *Если ∂D — слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то D локально связна в x_0.*

Нижеприведенные результаты о граничном поведении кольцевых Q-гомеоморфизмов на римановых многообразиях следуют непосредственно из леммы 1 и соответствующих теорем из предыдущей работы автора [5] о граничном поведении кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах с мерами. В частности, следующая теорема следует из теоремы 3 работы [5].

Теорема 1. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* слабо плоская, $\overline{D}$ компактно и $Q \in L^1(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}\colon D_* \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{D_*} \to \overline{D}$.*

Следующая лемма получается из леммы 4 в [5] с учетом леммы 1.

Лемма 3. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ — компакт, а $f\colon D \to D_*$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0 такой, что ∂D_* сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \left\{ y \in \mathbb{M}^n_*\colon\ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ \ x_k \to x_0,\ \ x_k \in D \right\}, \tag{26}$$

$Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{D_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} Q(x)\psi^n_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))\, dv(x) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{27}$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$ при $\varepsilon \to 0$, где $d(x_0) = \sup_{x\in D} d(x, x_0)$, $D_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = \{x \in D\colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство *неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0,\infty)$ таких, что*

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)). \tag{28}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

В частности, из леммы 3 получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D_*}$ — компакт, а $f\colon D \to D_*$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0 такой, что ∂D_* сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0,f)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dt}{\left(\int_{D\cap S(x_0,t)} Q(x)\,d\mathcal{A}\right)^{1/(n-1)}} = \infty \tag{29}$$

для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) = \sup_{x\in D} d(x,x_0)$, $B(x_0,\delta(x_0))$ — нормальная окрестность точки x_0. Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

Доказательство. Действительно, положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\int_{S(x_0,t)} Q(x)\,d\mathcal{A}\right]^{1/(n-1)}}, & t \in (0,\varepsilon_0), \\ 0, & t > \varepsilon_0. \end{cases} \tag{30}$$

Тогда в силу условия (29)

$$\int\limits_{A\cap D} Q(x)\psi^n\,(r)\ dv(x) =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\left(\int_{S(x_0,r)} Q(x)\,d\mathcal{A}\right)^{1/(n-1)}} = I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)),$$

где $A = A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)$. Таким образом, по лемме 3 получаем заключение леммы 4.

Из предложения 3 и леммы 3 получаем также следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима и $\overline{D_*}$ компактно. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

***Следствие* 3.** *Пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, ∂D_* сильно достижима и $\overline{D_*}$ компактно. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \ \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dv(x) < \infty, \tag{31}$$

то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

Комбинируя теорему 1 и лемму 3, получаем также следующие утверждения.

Лемма 5. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* слабо плоская, $\overline{D}$ компактно. Если функция $Q \in L^1(D)$ удовлетворяет условию* (27) *в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Теорема 3. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* слабо плоская* (*сильно достижимая*)*, $\overline{D_*}$* (*и $\overline{D}$*) *компактно и $Q \in L^1(D)$. Если Q принадлежит FMO, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ допускает гомеоморфное* (*непрерывное*) *продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Теорема 4. *Пусть D локально связна на границе, ∂D_* слабо плоская* (*сильно достижимая*)*, $\overline{D_*}$* (*и $\overline{D}$*) *компактно, $Q \in L^1(D)$,*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\left(\displaystyle\int_{S(x_0,r)\cap D} Q(x)\, d\mathcal{A}\right)^{1/(n-1)}} = \infty \quad \forall\, x_0 \in \partial D \tag{32}$$

и $0 < \varepsilon(x_0) < d_0 = \sup_{x\in D} d(x,x_0)$ таково, что $B(x_0,\varepsilon(x_0))$ — нормальная окрестность точки x_0. Тогда каждый кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ допускает гомеоморфное (*непрерывное*) *продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

***Следствие* 4.** *Пусть D локально связна на ∂D, ∂D_* слабо плоская* (*сильно достижимая*)*, $\overline{D_*}$* (*и $\overline{D}$*) *компактно, $Q \in L^1(D)$ и*

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)\cap D} Q(x)\, d\mathcal{A} = O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right). \tag{33}$$

Тогда каждый кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ допускает гомеоморфное (*непрерывное*) *продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

6. Следствия для гомеоморфизмов класса Соболева. В качестве следствий сформулируем основные результаты для гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}$ между областями на гладких римановых n-мерных многообразиях.

Именно, пусть D и D_* — области на гладких римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, соответственно. Говорят, что отображение $f\colon D \to D_*$ принадлежит *классу Соболева* $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$, если координатные функции f имеют в локальных координатах обобщенные частные производные первого порядка, локально интегрируемые в степени p. Определение класса Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ корректно вследствие его инвариантности относительно замен локальных координат.

Известно, что непрерывная функция f в $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т. е. если отображение f локально абсолютно непрерывно на почти всех отрезках, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p (см., например, теоремы 2.7.1 и 2.7.2 в [17]). Также известно, что непрерывные функции f класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$ характеризуются тем, что их можно аппроксимировать последовательностями гладких функций $\{f_m\}$ так, что $f_m \to f$ локально равномерно, а их первые обобщенные производные сходятся локально в L^p (см., например, теорему 27.7 в [18], а также теоремы 1.1, 1.6 и 1.8 в [19]). Аналогичный критерий имеет место на гладких римановых многообразиях (см., например, теорему 6.10 в [20]). В случае

$p = n$ существует подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$, производные которой сходятся локально в L^1 на почти всех локально спряляемых кривых к производным f относительно естественной меры длин дуг [21]. Таком образом, приходим к следующей теореме (ср. с теоремой 28.2 в [18] для $\mathbb{R}^n$).

Теорема Фугледе. *Пусть D — область на гладком римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ и $f\colon D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$. Тогда $M(\Gamma) = 0$, где Γ — семейство всех спрямляемых кривых в D, на которых f не является локально абсолютно непрерывной.*

Развитая в п. 5 теория будет применима к гомеоморфизмам класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ с $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, так как такие гомеоморфизмы, как мы покажем, являются кольцевыми Q-гомеоморфизмами с $Q(x) = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ — *внутренняя дилатация отображения* f:

$$K_I(x, f) = \frac{J(x, f)}{l^n(x, f)}. \tag{34}$$

Здесь

$$J(x, f) = \limsup_{r\to 0} \frac{v_*(f(B(x, r)))}{v(B(x, r))}$$

и

$$l(x, f) = \liminf_{y\to x} \frac{d_*(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

В (34) доопределяем $K_I(x, f) = 1$, если $l(x, f) = 0 = J(x, f)$, и $K_I(x, f) = \infty$, если $l(x, f) = 0$, но $J(x, f) \neq 0$.

***Замечание* 4.** Напомним, что гомеоморфизмы f между областями в $\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ дифференцируемы почти всюду и имеют (N)-свойство Лузина (см. [22, 23]). При этом если к тому же $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, то $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ по следствию 2.3 в работе [24], следовательно, f^{-1} также дифференцируемый почти всюду и имеет (N)-свойство. Последнее свойство влечет, что $J(x, f) \neq 0$ почти всюду (см. [25]). Таким образом, в (34) мы можем почти всюду $J(x, f)$ заменить на $J_f(x) := |\det f'(x)|$, а $l(x, f)$ — на

$$l_f(x) := \inf_{h\in\mathbb{R}^n,\, |h|=1} |f'(x)h|,$$

где $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в любых локальных координатах на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$. Далее мы также используем обозначение операторной нормы якобиевой матрицы

$$\|f'(x)\| := \sup_{h\in\mathbb{R}^n,\, |h|=1} |f'(x)h|.$$

Лемма 6. *Пусть $f\colon D \to D_*$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда f является Q-гомеоморфизмом с $Q(x) = K_I(x, f)$.*

Доказательство. Пусть Γ — произвольное семейство кривых в области D и $\tilde{\Gamma}$ — семейство всех путей $\gamma \in f(\Gamma)$, на которых f^{-1} является локально абсолютно непрерывным. Тогда по приведенной выше теореме Фугледе $M(f(\Gamma)) = M(\tilde{\Gamma})$. Для произвольной функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ полагаем

$$\tilde{\rho}(y) = \rho(f^{-1}(y))\|(f^{-1})'(y)\|$$

для почти всех $y \in D_*$, где f^{-1} дифференцируемо, и $\tilde{\rho}(y) = 0$ для остальных точек. Тогда получаем

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}} \tilde{\rho}\, ds \geq \int\limits_{f^{-1}\circ\tilde{\gamma}} \rho\, ds \geq 1$$

для всех $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ и, следовательно, $\tilde{\rho} \in \operatorname{adm}\tilde{\Gamma}$.

Согласно замечанию 4, f и f^{-1} являются дифференцируемыми почти всюду, имеют (N)-свойство и $J(x, f) \neq 0$ почти всюду. Поэтому, применяя замену переменных под интегралом (см., например, [26]), получаем

$$M(f\Gamma) = M(\tilde{\Gamma}) \leq \int\limits_{D_*} \tilde{\rho}^n\, dv_*(y) =$$

$$= \int\limits_{D_*} \rho^n(f^{-1}(y))\|(f^{-1})'(y))\|^n\, dv_*(y) = \int\limits_{D_*} \frac{\rho^n(f^{-1}(y))}{l_f(f^{-1}(y))^n}\, dv_*(y) =$$

$$= \int\limits_{D_*} \rho^n(f^{-1}(y)) K_I(f^{-1}(y), f) J_{f^{-1}}(y)\, dv_*(y) = \int\limits_{D} K_I(x, f)\rho^n(x)\, dv(x).$$

Здесь мы также воспользовались соотношениями $J_{f^{-1}}(y) = 1/J_f(f^{-1}(y))$ и $\|(f^{-1})'(y))\| = 1/\, l_f(f^{-1}(y))$ почти всюду.

В качестве следствий леммы 6 и результатов предыдущего пункта получаем следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть D локально связна на ∂D, ∂D_* слабо плоская, $\overline{D}$ компактно и $f\colon D \to D_*$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ с $K_I(x, f) \in L^1(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}\colon D_* \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{D_*} \to \overline{D}$.*

Теорема 6. *Пусть D локально связна на ∂D, ∂D_* сильно достижимая (слабо плоская), $\overline{D_*}$ (и $\overline{D}$) компактно, $Q\colon \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ и Q — функция класса FMO. Тогда любой гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ с $K_I(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду в D допускает непрерывное (гомеоморфное) продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

***Следствие* 5.** *Пусть D локально связна на ∂D, ∂D_* сильно достижимая (слабо плоская), $\overline{D_*}$ (и $\overline{D}$) компактно, $Q\colon \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$, Q — локально суммируемая функция и*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dv(x) < \infty \quad \forall\, x_0 \in \partial D.$$

Тогда любой гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ с $K_I(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду в D допускает непрерывное (гомеоморфное) продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Теорема 7. *Пусть D локально связна на ∂D, ∂D_* сильно достижимая (слабо плоская), $\overline{D_*}$ (и $\overline{D}$) компактно. Если $f\colon D \to D_*$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ такой, что $K_I(x, f) \in L^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{\left(\int_{D(x_0,r)} K_I(x, f)\, d\mathcal{A}\right)^{1/n-1}} = \infty \quad \forall\, x_0 \in \partial D,$$

где $D(x_0, r) = D \cap S(x_0, r)$, *то* f *допускает непрерывное* (*гомеоморфное*) *продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

***Следствие* 6.** *Пусть* D *локально связна на* ∂D, ∂D_* *сильно достижимая* (*слабо плоская*), $\overline{D_*}$ (*и* $\overline{D}$) *компактно. Если* $f\colon D \to D_*$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ *такой, что* $K_I(x, f) \in L^1(D)$ *и*

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)\cap D} K_I(x,f)\, d\mathcal{A} = O\left(\log^{n-1}\frac{1}{r}\right) \quad \forall\, x_0 \in \partial D$$

при $r \to 0$, *то* f *допускает непрерывное* (*гомеоморфное*) *продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

7. Интегральные условия. Напомним, что функция $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ называется *выпуклой*, если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda\Phi(t_1) + (1-\lambda)\Phi(t_2)$$

для всех $t_1, t_2 \in [0,\infty]$ и $\lambda \in [0,1]$.

Лемма 7. *Пусть* $\mathbb{B}_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ — *нормальная окрестность точки* x_0 *на римановом многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \ge 2$, $Q\colon \mathbb{B}_0 \to [0,\infty]$ — *измеримая функция и* $\Phi\colon [0,\infty] \to (0,\infty]$ — *возрастающая выпуклая функция. Тогда*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \ge \frac{c}{n} \int\limits_{eCM_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/p}} \quad \forall\, p \in (0,\infty),$$

где M_0 — *среднее значение функции* $\Phi \circ Q$ *над геодезическим шаром* $\mathbb{B}_0$, $q(r)$ — *средние значения функции* $Q(x)$ *над геодезическими сферами* $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n\colon d(x, x_0) = r\}$, c *и* C — *постоянные, произвольно близкие к единице для малых* ε_0.

Доказательство. В нормальной системе координат точка x_0 имеет нулевые координаты, а коэффициенты g_{ij} фундаментальной формы (2) равны единице, если $i = j$, и нулю, если $i \ne j$ (см., например, (b) и (c) предложения 5.11 в [8]). Следовательно, во всех точках достаточно малой окрестности точки x_0 матрица g_{ij} произвольно близка к единичной. Поэтому элементы объема и площади на геодезических сферах в таких окрестностях эквивалентны евклидовым с коэффициентом эквивалентности, произвольно близким к единице. Таким образом, заключение леммы 7 следует из ее евклидового аналога (см. лемму 1 в [27]).

Полагая $Q \equiv 0$ вне области D и комбинируя леммы 4 и 7 при $p = n - 1$, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* D *и* D_* — *области на гладких римановых многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \ge 2$, *соответственно,* D *локально связна на* ∂D, D_* *имеет сильно достижимую границу и* $\overline{D_*}$ *компактно. Предположим, что* $f\colon D \to D_*$ — *кольцевой* Q*-гомеоморфизм с*

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\, dv < \infty$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi\colon [0,\infty] \to (0,\infty]$. *Если*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \infty \tag{35}$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$, *то* f *имеет непрерывное продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Кроме того, используя теорему 1, получаем также следующее утверждение.

Теорема 9. *Если дополнительно к условиям теоремы* 8 $Q \in L^1(D)$, *область* D_* *имеет слабо плоскую границу, а замыкание* $\overline{D}$ *компактно, то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Наконец, отсюда с учетом леммы 6 получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть* D *и* D_* — *области на гладких римановых многообразиях* $(\mathbb{M}^n, g)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geq 2$, *соответственно,* D *локально связна на* ∂D, D_* *имеет сильно достижимую* (*слабо плоскую*) *границу,* $\overline{D_*}$ (*и* $\overline{D}$) *компактно. Тогда любой гомеоморфизм* $f\colon D \to D_*$ *класса Соболева* $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ *такой, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_I(x,f))\, dv(x) < \infty \tag{36}$$

для некоторой выпуклой возрастающей функции $\Phi\colon [0,\infty] \to (0,\infty]$ *с условием* (35) *допускает непрерывное* (*гомеоморфное*) *продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Как показывает соответствующий пример в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, из работы [28], условие (35) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения указанных отображений на границу при интегральном ограничении (36).

Отметим, наконец, что все известные в настоящий момент регулярные границы — гладкие и липшицевые, а также границы выпуклых, квазивыпуклых, равномерных и *QED*-областей, квазиэкстремальной длины по Герингу – Мартио — являются слабо плоскими и, следовательно, приведенные выше результаты применимы к таким границам (см. [29]).

1. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
2. *Ломако Т. В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. журн. – 2009. – **6**, № 10. – С. 1329 – 1337.
3. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
4. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 1. С. 97 – 115.
5. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682 – 689.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York: Springer, 2009.
7. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960.
8. *Lee J. M.* Riemannian manifolds: An introduction to curvature. – New York: Springer, 1997.
9. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
10. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
11. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
12. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
13. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
14. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001.
15. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199 – 234.
16. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – New York: Amer. Math. Soc., 1949.
17. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977.
18. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
19. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.

20. *Suominen K.* Quasiconformal maps in manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1 Math. – 1966. – **393**. – P. 1 – 39.
21. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171 – 219.
22. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость п. в. // Мат. сб. – 1968. – **75**, № 3. – С. 323 – 334.
23. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 4. – С. 886 – 919.
24. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. reine und angew. Math. – 2006. – **599**. – S. 1 – 26.
25. *Пономарев С. П.* N^{-1}-свойство отображений и (N)-условие Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**. – С. 411 – 418.
26. *Müller S.* Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1 // J. reine und angew. Math. – 1990. – **412**. – S. 20 – 34.
27. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* Toward the theory of generalized quasi-isometries // Мат. студ. – 2010. – **34**, № 2. – С. 129 – 135.
28. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On boundary behavior of generalized quasi-isometries // ArXiv: 1005. 0247v1 [math. CV], 3 May 2010.
29. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И.* Регулярные области в теории отображенй на римановых многообразиях // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 1 – 10.

Получено 25.02.11,
после доработки — 14.07.11