УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧАС ПЕРЕБУВАННЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ЦІЛОЗНАЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ФІКСОВАНОМУ СТАНІ

Let $\xi(t)$ be an almost lower semicontinuous integer-valued process with the moment generating function of the negative part of jumps $\xi_k: \mathbf{E}[z^{\xi_k}/\xi_k<0]=\dfrac{1-b}{z-b}$, $0\le b<1$. For the moment generating function of the sojourn time of $\xi(t)$ in a fixed state, we obtain relations in terms of the roots $z_s<1<\hat{z}_s$ of the Lundberg equation. By passing to the limit $(s\to 0)$ in the ob-tained relations, we determine the distributions of $l_r(\infty)$.

Пусть $\xi(t)$ — почти полунепрерывный снизу процесс с производящей функцией отрицательной части скачков $\xi_k: \mathbf{E}[z^{\xi_k}/\xi_k<0]=\dfrac{1-b}{z-b}$, $0\le b<1$. Для производящей функции времени пребывания $\xi(t)$ в фиксированном состоянии установлены соотношения в терминах корней $z_s<1<\hat{z}_s$ уравнения Лундберга. Из полученных соотношений предельным переходом $(s\to 0)$ определены распределения $l_r(\infty)$.

Час перебування процесів з незалежними приростами і значеннями в $\mathbb{R}$ вивчався в [1, 2]. Для цілозначних адитивних послідовностей та напівмарковських процесів розподіл часу перебування розглядався в [3 – 5], де встановлено співвідношення для генератриси часу перебування. Такі ж співвідношення одержано в [5] для довільного цілозначного часу перебування без застосування факторизації.

На основі результатів уточнення зображення компонент факторизації (див. теореми 7.5 та 7.6 у [5]) конкретизуються співвідношення для розподілу часу перебування майже неперервних цілозначних процесів $\xi(t)$ у довільному стані. Для цього використовуються співвідношення для розподілу $\xi(t)$, виражені через значення коренів рівняння Лундберга: $z_s<1<\hat{z}_s$, $s>0$.

Цілозначний пуассонівський процес $\xi(t)(\xi(0)=0,\ t\ge 0)$ називається майже напівнеперервним знизу, якщо він перетинає від'ємний рівень $x<0$ лише за допомогою від'ємних геометрично розподілених стрибків $\xi_k<0:$

$$p(z)=\mathbf{E}[z^{\xi_k}\mid \xi_k<0]=\frac{1-b}{z-b},\quad 0\le b<1.$$

При $b=0$ процес $\xi(t)$ називається напівнеперервним знизу.

Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу цілозначний процес з кумулянтою

$$k(z)=\ln\mathbf{E}z^{\xi(t)}=\lambda\left(pp_{(1)}(z)+q\frac{1-b}{z-b}-1\right),\quad |z|=1,\quad p+q=1, \qquad (1)$$

де $p_{(1)}(z)=\mathbf{E}[z^{\xi_1}|\xi_1>0]$, $b\in(0,1)$ — параметр геометричного розподілу $\xi_k<0$, $\lambda>0$ — інтенсивність стрибків ξ_k. Позначимо через θ_s випадкову величину з показниковим розподілом: $\mathbf{P}\{\theta_s>t\}=e^{-st}$, $s>0$. Введемо ще такі позначення:

$$l_r(t)=\int\limits_0^t I\{\xi(u)=r\}du,\qquad \tau^+(z)=\inf\{t>0\colon \xi(t)>r\},\quad r\in\mathbb{Z},$$

$$\xi^\pm(t)=\sup_{0\le t'\le t}(\inf)\,\xi(t'),\qquad \xi^\pm=\sup_{0\le<\infty}(\inf)\,\xi(t),$$

$$d_r(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu l_r(\theta_s)} = s\int\limits_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}e^{-\mu l_r(t)}dt,$$

$$g(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = s\int\limits_0^\infty \mathbf{E}z^{\xi(t)}dt = s(s-k(z))^{-1},$$

$$g_\pm(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^\pm(\theta_s)} = s\int\limits_0^\infty \mathbf{E}z^{\xi^\pm(t)}dt.$$

У роботі [5] показано, що для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) рівняння Лундберга ($k(z)=s$) має два прості корені: $b<z_s<1<\hat{z}_s$. При $m=\mathbf{E}\xi(1)=0$ і $s\to 0$ ці корені збігаються до 1; при $m>0$ $z_s \underset{s\to 0}{\to} z_0<1$, $\hat{z}_s \underset{s\to 0}{\to} 1$; при $m<0$ $\hat{z}_s \underset{s\to 0}{\to} \hat{z}_0>1$, $z_s \underset{s\to 0}{\to} 1$. При цьому $z_s=q_-(s)+bp_-(s)<1$, $p_-(s)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=0\}$, $q_-(s)= =1-p_-(s)$.

У випадку майже напівнеперервності знизу для основної факторизаційної тотожності (о. ф. т.)

$$g(s,z)=g_+(s,z)g_-(s,z),\quad |z|=1, \tag{2}$$

компонента $g_-(s,z)$ повністю визначається меншим коренем рівняння Лундберга $k(z)=s\colon\ z_s\in(b,1)$ (див. теорему 7.6 у [5]):

$$g_-(s,z)=\frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_s},\qquad p_-(s)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=0\}=\frac{1-z_s}{1-b}. \tag{3}$$

Згідно з (7.32) в [5] генератрису $g_+(s,z)$ можна записати дещо простіше, ніж у формулі Спітцера, а саме,

$$\begin{gathered} g_+(s,z)=\frac{1}{p_-(s)}\left[g_0(s,z)+q_-(s)\frac{b-1}{b-z}(g_1(s,b)-g_1(s,z))\right], \\ g_k(s,z)=\sum_{r\ge k}z^r p_r(s),\qquad p_k(s)=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=k\},\quad k\ge 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Розглянемо майже напівнеперервний знизу цілозначний процес ризику $\xi(t)$ з ерланговим розподілом вимог $\xi_k>0$

$$p_{(1)}(z)=z^n\prod_{r\le n}\frac{1-c_r}{1-c_r z},\quad 0\le c_r<1,$$

та геометричним розподілом „премій" $\xi_k<0$ (див. вище $p(z)$ з $b\in[0,1)$) і доведемо наступне твердження.

Лема 0. *Для процесу ризику з ерланговим розподілом вимог генератриса* $\xi(\theta_s)$ *має зображення*

$$g(s,z)=\frac{s(z-b)q_n(z)}{k_*(s,z)},\qquad q_n(z)=\prod_{r\le n}(1-c_r z),\quad q_1(z)=1-cz, \tag{5}$$

$$k_*(s,z) = s(z-b)q_n(z) - \lambda[p(z-b)z^n q_n(1) + pb + q - z]. \tag{6}$$

Внаслідок існування коренів $z_s < 1 < \hat{z}_s$ *рівняння Лундберга* ($k(z) = s \sim k_*(s,z) = 0$)

$$k_*(s,z) = P_{n+1}(s,z) = (\hat{z}_s - z)(z - z_s)P_{n-1}(s,z), \tag{7}$$

де $P_n(s,z)$ — *поліном* n*-го порядку. Якщо деякі сталі* $c_r = 0$, *то* $q_m(z)$ — *поліном порядку* $m < n$. *Генератрису* $\xi^+(\theta_s)$ *можна записати у вигляді*

$$g_+(s,z) = s\big[p_-(s)Q(s,z)(\hat{z}_s - z)\big]^{-1}, \tag{8}$$

де $Q(s,z) = P_{n-1}(s,z)q_n^{-1}(z)$, $n \geq 0$, $g_+(s,z) \underset{z\to 0}{\to} p_+(s) = \dfrac{s}{Q(s,0)\hat{z}_s p_-(s)}$.

Зокрема, якщо лише $c_1 = c \neq 0$ *і* $q_1(z) = 1 - cz$ (*тобто при* $n = 1$), *то*

$$g_+(s,z) = \frac{s}{p_-(s)}\frac{1-cz}{(\hat{z}_s - z)Q_0(s)}, \qquad \hat{z}_s = (p_+(s) + cq_+(s))^{-1},$$

узгоджується з формулою (7.27) *у* [5] $\left(g_+(s,z) = \dfrac{p_+(s)(1-cz)\hat{z}_s}{\hat{z}_s - z}\right)$.

Доведення. Після підстановки $p_1(z)$ в (1) і нескладних перетворень встановлюється (5) для $g(s,z) = \dfrac{s}{s - k(z)}$ та (6) для $k_+(s,z)$. А після підстановки (3) та (5) в (2) з урахуванням (7) одержимо співвідношення

$$\frac{(z-b)q_n(z)s}{(z-z_s)(\hat{z}_s - z)P_{n-1}(s,z)} = \frac{p_-(s)(z-b)}{z - z_s}g_+(s,z),$$

з якого випливає (8) для $g_+(s,z)$.

У загальному випадку

$$g(s,z) = \frac{s(z-b)}{k_*(s,z)}, \qquad k_*(s,z) = s(z-b) - \lambda[p(z-b)p_{(1)}(z) + pb + q - z],$$

внаслідок існування коренів рівняння Лундберга $z_s < 1 < \hat{z}_s$

$$k(z) = s \sim k_*(s,z) = 0, \qquad k_*(s,z) = Q(s,z)(\hat{z}_s - z)(z - z_s).$$

Замість (5) знаходимо

$$g(s,z) = \frac{s(z-b)}{(\hat{z}_s - z)(z - z_s)Q(s,z)}, \qquad Q(s,z_s)Q(s,\hat{z}_s) \neq 0.$$

На основі (2), (3) та останнього зображення для $g(s,z)$ аналогічно встановлюється співвідношення

$$\frac{(z-b)s}{(z-z_s)(\hat{z}_s - z)Q(s,z)} = \frac{z-b}{z-z_s}p_-(s)g_+(s,z),$$

з якого випливає формула (8). У загальному випадку можна обчислити лише частинні значення $Q(s,z)$. Зокрема, із (8) при $z = 1$ та $z = z_s < 1$ знаходимо

$$Q(s,1)(\hat{z}_s - 1) = sp_-(s)^{-1}, \qquad g_+(s,z_s) = s\big[p_-(s)Q(s,z_s)(\hat{z}_s - z_s)\big]^{-1}. \tag{9}$$

При $m < 0$ $z_s \to 1$, $\hat{z}_s \to z_0 > 1$ із (9) випливає, що

$$Q(s, z_s)(\hat{z}_s - z_s) \underset{s\to 0}{\to} Q(0,1)(\hat{z}_0 - 1) = |m|(1-b). \tag{10}$$

Хоча повної інформації про $Q(s,z)$ немає, але, як буде показано далі, у граничному випадку $s \to 0$ за допомогою (8) при $m \leq 0$ можна одержати співвідношення для розподілу $l_r(\infty)$.

Наведемо основні співвідношення з теореми 7.8 у [5] для загального випадку, які належить уточнити для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) у випадку майже напівнеперервності знизу.

Теорема 1 [5]. *Для довільного цілозначного процесу $\xi(t)$ справджуються співвідношення для генератрис $l_r(\theta_s)$,*

$$d_0(s,\mu) = \frac{s}{s + \mu p_0(s)}, \qquad p_r(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = r\} \quad \textit{для будь-якого} \quad r, \tag{11}$$

$$d_r(s,\mu) = 1 - \frac{\mu p_r(s)}{s + \mu p_0(s)}, \quad r \neq 0.$$

Після обернення по μ із (11) *випливає, що*

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\{l_0(\theta_s) > y\} = e^{-ysp_0^{-1}(s)}, \quad y \geq 0, \\
\mathbf{P}\{l_r(\theta_s) = 0\} = 1 - p_r(s)p_0^{-1}(s), \quad r \neq 0, \\
\mathbf{P}\{l_r(\theta_s) > y\} = p_r(s)p_0^{-1}(s)e^{-ysp_0^{-1}(s)} \underset{y\to 0}{\to} p_r(s)p_0^{-1}(s),
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\mathbf{P}\{l_r(t) > y\} = \int_0^t \mathbf{P}\{l_r(t-u) > 0\} d_u \mathbf{P}\{l_0(u) > y\}, \quad r \neq 0.$$

Щоб уточнити (11), (12) для $\xi(t)$ з кумулянтою (1), використаємо лему про зображення $p_k(s)$ у термінах $z_s = q_-(s) + bq_-(s) \in (b, 1)$.

Лема 1. *Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (1). *Із співвідношення для розподілів $\xi^{\pm}(\theta_s)$ (див. теорему* 7.6 *у* [5])

$$\begin{gathered}
p^-_{-k}(s) = p_-(s)(z_s - b)z_s^{k-1}, \quad k \geq 1, \qquad p_-(s) = \frac{1 - z_s}{1 - b}, \\
p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)}[p_k(s) + (b - z_s)b^{-k-1}g_{k+1}(s,b)], \quad k > 0, \qquad p_0^{\pm}(s) = p_{\pm}(s),
\end{gathered} \tag{13}$$

з о. ф. т. (2) *випливають співвідношення для $p_k(s)$, виражені через z_s,*

$$\begin{gathered}
p_0(s) = p_-(s)\big[bz_s^{-1}p_+(s) + (1 - z_s^{-1}b)g_+(s, z_s)\big], \\
p_k(s) = p_-(s)[p_k^+(s) + (1 - z_s^{-1}b)z_s^{-k}g_{k+1}^+(s, z_s)], \quad k > 0, \\
p_{-k}(s) = p_-(s)(z_s - b)z_s^{k-1}g_+(s, z_s), \quad r = -k < 0, \\
g_k^+(s,z) = \sum_{r \geq k} p_r^+(s)z^r \quad (k \geq 0), \qquad g_0^+(s,z) = g_+(s,z).
\end{gathered} \tag{14}$$

Для атомарних імовірностей $p_{\pm}(s)$ *справджується співвідношення в термінах* z_s :

$$p_+(s) = \frac{1-b}{1-z_s}[p_0(s) + (b-z_s)b^{-1}\mathbf{E}[b^{\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) \geq 1]],$$

$$p_+(s) = p_0(s) - p_1(s)z_s(1-z_s)^{-1} \quad \text{при} \quad b = 0, \tag{15}$$

$$p_-(s) = (1-z_s)(1-b)^{-1} \to 1 - z_s \quad \text{при} \quad b \to 0.$$

Доведення. З розкладів у ряд Лорана для генератрис $\xi(\theta_s)$, $\xi^{\pm}(\theta_s)$

$$g(s,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k p_k(s), \qquad g_{\pm}(s,z) = \sum_{k\geq 0} z^{\pm k} p^{\pm}_{\pm k}(s)$$

після підстановки в (2) і перемножування двох останніх рядів шляхом групування членів з однаковими степенями z встановлюються співвідношення (14). Співвідношення (15) для $p_+(s)$ випливає з формули (4), а для $p_-(s)$ — із (3).

При знаходженні границь $(s \to 0)$

$$\tilde{p}_k = \lim_{s\to 0} \frac{p_k(s)}{s} = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\}dt, \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

значення яких залежить від знаку m, нам знадобляться ще наступні леми (для випадку $m = 0$ та $m \neq 0$).

Лема 2. *Нехай* $\xi(t)$ *— майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (1). *Тоді згідно з* (8) *та* (14) *обернена величина показника експоненти розподілу* (12) *визначається співвідношенням*

$$p_0(s)s^{-1} = z_s^{-1}\left[\frac{b}{\hat{z}_s Q(s,0)} + \frac{z_s - b}{(\hat{z}_s - z_s)Q(s,z_s)}\right]. \tag{16}$$

Якщо $m = 0$ $(z_s \to 1-0,\ \hat{z}_s \to 1+0$ *при* $s \to 0)$, *то*

$$\lim_{s\to 0} p_0(s)/s = \tilde{p}_0 = \infty, \qquad \frac{1}{\tilde{p}_0} = 0. \tag{17}$$

Якщо $r = -k < 0$ *і* $m = 0$, *то згідно з* (8)

$$p_{-k}(s) = \frac{s(z_s - b)z_s^k}{Q(s,z_s)(\hat{z}_s - z_s)},$$

$$\tilde{p}_{-k} = \lim_{s\to 0}\frac{p_{-k}(s)}{s} = \infty, \qquad \frac{1}{\tilde{p}_{-k}} = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{p_{-k}(s)}{p_0(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{(z_s - b)z_s^k}{z_s - b + bQ(s,z_s)(\hat{z}_s - z_s)} = 1. \tag{19}$$

Якщо $k > 0$, *то згідно з* (8) *та* (14)

$$p_k(s) = \frac{s}{Q(s,z_s)(\hat{z}_s - z_s)}\times$$

$$\times\left[(z_s-b)z_s^{-k-1}+Q(s,z_s)(\hat z_s-z_s)p_-(s)(p_+(s)-(z_s-b)z_s^{-k-1}\sum_{r=0}^{k}z_s^r p_r^+(s))\right]. \tag{20}$$

Якщо $m=0$, то аналогічно для $k>0$ при $s\to 0$ знаходимо

$$\tilde p_k=\lim_{s\to 0}p_k(s)/s=\infty,\qquad \frac{1}{\tilde p_k}=0,\quad k>0, \tag{21}$$

але $p_k(s)\sim p_0(s)$ при $s\to 0$, тому

$$\lim_{s\to 0}p_k(s)/p_0(s)=\frac{(1-b)Q(0,1)}{(1-b)Q(0,1)}=1,\quad k>0.$$

Доведення леми 2 для $m=0$ суттєво спирається на зображення (8) для $g_+(s,z_s)$ з особливістю при $s\to 0$ ($z_s,\,\hat z_s\to 1\mp 0$). Щоб скористатися співвідношенням (14) для $p_k(s)$ при $k>0$, слід виразити цю ймовірність через $g_+(s,z_s)$:

$$p_k(s)=p_-(s)\left[p_k^+(s)+(z_s-b)z_s^{-k-1}(g_+(s,z_s)-\sum_{r=0}^{k}p_r^+(s)z_s^r)\right]. \tag{22}$$

Після підстановки (8) у це співвідношення одержуємо (20).

Зауваження. Згідно з теоремою 7.6 [5] $p_k^-(s)$ виражаються через z_s (див. (13)). При перемножуванні рядів

$$\left[p_-(s)+\sum_{k\le 1}z^k(z_s-b)z_s^{k-1}\right]\sum_{k\ge 0}z^k p_k^+(s)$$

з урахуванням (8) і (22) одержуємо співвідношення (20) у термінах $z_s<1<\hat z_s$ та $Q(s,z_s)$.

Позначимо $H(k)=\mathbf{E}\tau^+(k), k>0,\ h_k=H(k)-H(k-1)$,

$$H(0)=\mathbf{E}\tau^+(0)=\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^+(t)=0\}dt=\dot p_+$$

і доведемо аналогічну лему для $m\ne 0$, позначаючи границі $\tilde p_k=\tilde p_k^{>}(\tilde p_k^{<})$ при $\pm m>0$.

Лема 3. *Якщо $m>0$, то $p_-(s)\underset{s\to 0}{\to}p_-$, $z_s\underset{s\to 0}{\to}z_0<1$ й існують границі*

$$\lim_{s\to 0}s^{-1}p_r^+(s)=\dot p_r^+=h_r,\quad r>0,$$

через які виражаються значення $\tilde p_k=\tilde p_k^{>}$ в термінах z_0 :

$$\begin{aligned}\tilde p_0^{>}&=p_-\left[bz_0^{-1}H(0)+(1-z_0^{-1}b)\sum_{r\ge 0}z_0^r h_r\right],\quad k=0,\\ \tilde p_k^{>}&=p_-\left[h_k+(1-z_0^{-1}b)\sum_{r\ge k+1}z_0^{r-k}h_r\right],\quad k>0.\end{aligned} \tag{23}$$

Згідно з (13) *та* (17) *при* $b = 0$

$$H(0) = \tilde{p}_0^{>} - \frac{z_0}{1 - z_0}\tilde{p}_1^{>}, \qquad h_k = \frac{1}{1 - z_0}[\tilde{p}_k^{>} - z_0\tilde{p}_{k+1}^{>}], \quad k > 0. \tag{24}$$

Якщо $m < 0$, *то* $p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} p_+$, $z_s \to 1$, $p_-(s)s^{-1} \to \dfrac{1}{|m|(1-b)}$ *й існують аналогічні до* (19) *границі* $\tilde{p}_k = \tilde{p}_k^{<}$:

$$\tilde{p}_0^{<} = \frac{1 - bq_+}{|m|(1-b)} \underset{b\to 0}{\to} \frac{1}{|m|}, \qquad \tilde{p}_{-k}^{<} = \frac{1}{|m|}, \quad r = -k < 0, \tag{25}$$

$$\tilde{p}_k^{<} = \frac{1}{|m|(1-b)}[p_k^{+} + (1-b)\mathbf{P}\{\xi^+ > k\}] \underset{b\to 0}{\to} \frac{1}{|m|}\mathbf{P}\{\xi^+ \geq k\}, \quad k > 0.$$

Доведення. Для обчислення границь $\tilde{p}_k^{>}$ при $m > 0$ слід використати співвідношення (14). Існування границь (23) випливає з (13) та (15). При $m < 0$ з (14) після домноження на s^{-1} і граничного переходу ($s \to 0$) випливають формули (25).

На основі цих лем уточнюються співвідношення для генератрис $d_r(s, \mu)$ та граничних розподілів для $l_r(\infty)$. Для випадку $b = 0$ співвідношення (23) та (25) спрощуються й узгоджуються з раніше одержаними співвідношеннями для напівнеперервних знизу $\xi(t)$.

Теорема 2. *Якщо* $\xi(t)$ — *майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (1), *то генератриси* $d_r(s,\mu)$ *та розподіли* $l_r(\theta_s)$ *визначаються формулами* (11), (12) *через імовірності* $p_k(s)$, *виражені через* z_s *у* (14). *Відповідні граничні генератриси та розподіли* $l_r(\infty)$ *визначаються залежно від знаку* m :

1) *при* $m = 0$ ($z_s \underset{s\to 0}{\to} 1 - 0$, $\hat{z}_s \underset{s\to 0}{\to} 1 + 0$)

$$\mathbf{E}e^{-\mu l_r(\infty)} = 0, \qquad \mathbf{P}\{l_r(\infty) = +\infty\} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad r; \tag{26}$$

2) *при* $m > 0$ *за допомогою значень* $\tilde{p}_k^{>}$, *виражених через* z_0 *в* (23), *встановлюється, що*

$$\mathbf{E}e^{-\mu l_0(\infty)} = \frac{1}{1 + \mu\tilde{p}_0^{>}}, \qquad \mathbf{E}e^{-\mu l_r(\infty)} = 1 - \frac{\tilde{p}_r^{>}}{\tilde{p}_0^{>}}\frac{\mu}{(\tilde{p}_0^{>})^{-1} + \mu}, \quad r \neq 0,$$
$$\mathbf{P}\{l_r(\infty) > 0\} = \frac{\tilde{p}_r^{>}}{\tilde{p}_0^{>}}, \qquad \mathbf{P}\{l_r(\infty) > y\} = \frac{\tilde{p}_r^{>}}{\tilde{p}_0^{>}}e^{-y/\tilde{p}_0^{>}}, \quad y > 0, \quad r \neq 0, \tag{27}$$

при $r = -k \to -\infty$ $\lim_{r\to-\infty} \mathbf{P}\{l_r(\infty) > 0\} = 0$, $\mathbf{P}\{l_r(\infty) = 0\} \underset{r\to-\infty}{\to} 1$;

3) *при* $m < 0$ *за допомогою значень* $\tilde{p}_k^{<}$, *виражених у* (25) *через розподіл абсолютного максимуму* ξ^+, *встановлюється, що*

$$\mathbf{E}e^{-\mu l_k(\infty)} = 1 - \frac{\tilde{p}_k^{<}}{\tilde{p}_0^{<}}\frac{\mu}{(\tilde{p}_0^{<})^{-1} + \mu}, \quad k \neq 0,$$
$$\mathbf{P}\{l_k(\infty) > 0\} = \frac{\tilde{p}_k^{<}}{\tilde{p}_0^{<}}, \qquad \mathbf{P}\{l_k(\infty) > y\} = \frac{\tilde{p}_k^{<}}{\tilde{p}_0^{<}}e^{-y/\tilde{p}_0^{<}}, \quad k \neq 0, \tag{28}$$

при цьому згідно з (25) *для* $k < 0$ *відношення* $\tilde{p}_k^{<}/\tilde{p}_0^{<}$ *не залежать від* k :

$$\frac{\tilde{p}_k^{<}}{\tilde{p}_0^{<}} = \frac{1-b}{1-bq_+}, \qquad \mathbf{P}\{l_k(\infty)=0\} = \frac{bp_+}{1-bq_+} \underset{b\to 0}{\to} 0 \quad \textit{для} \quad k=-r<\infty, \qquad (29)$$

а для $k>0$

$$\mathbf{P}\{l_k(\infty)>0\} = \frac{\tilde{p}_k^{<}}{\tilde{p}_0^{<}} = \frac{p_k^+ + (1-b)\mathbf{P}\{\xi^+>k\}}{1-bq_+},$$

$$\mathbf{P}\{l_k(\infty)>y\} = \frac{\tilde{p}_k^{<}}{\tilde{p}_0^{<}} e^{-y\frac{|m|(1-b)}{1-bq_+}}, \quad y>0, \qquad (30)$$

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{P}\{l_k(\infty)>y\}=0 \quad (y\ge 0), \qquad \mathbf{P}\{l_k(\infty)=0\} \underset{k\to+\infty}{\to} 1.$$

Доведення. Співвідношення (26) – (29) випливають із (11), (12) після граничного переходу з урахуванням знаку m та відповідних граничних значень $\tilde{p}_k$, одержаних у лемах 2, 3. Слід зауважити, що при $m>0$ атомарні ймовірності $\mathbf{P}\{l_r(\infty) = 0\} = 1-\dfrac{\tilde{p}_r}{\tilde{p}_0}$ залежать від $r\neq 0$. При $r\to-\infty$ $\mathbf{P}\{l_r(\infty)=0\}\to 1$, оскільки згідно з (23) $\tilde{p}_{-k}^{>} = O(z_0^k)$ при $r=-k\to-\infty$.

При $m<0$ вони залежать від r лише при $r>0$, при $r<0$ не залежать від r, а при $b=0$ дорівнюють нулю. При $k\to+\infty$ $\mathbf{P}\{l_k(\infty)=0\}\to 1$, оскільки в (25) $p_k^+\to 0$, $\mathbf{P}\{\xi^+>k\}\to 0$ при $k\to+\infty$.

Висновки. Найбільш важливі результати теорем 1, 2 при $m\neq 0$ полягають у тому, що часи перебування у фіксованих станах $k\neq 0$ мають показниковий розподіл (див. допограничні співвідношення (12) при $s>0$ та (27), (28) при $s\to 0$) з ненульовими атомарними ймовірностями. Допограничні параметри показникового розподілу $l_r(\theta_s)$ в (12) виражаються через розподіли $p_k(s)$ у термінах z_s (див. (14)). Граничні параметри згідно з лемою 3 визначаються за допомогою $\tilde{p}_k^{>}$ при $m>0$ та $\tilde{p}_k^{<}$ при $m<0$.

Найбільш цікаві граничні результати для процесу ризику з $m<0$ стосуються часів його перебування $l_r(\infty)$ у критичних станах ризикової („червоної”) зони $r>u$ ($u>0$ — початковий капітал страхової компанії). Для такого процесу ризику згідно з (30) $\tilde{p}_k^{<}$ $(k>0)$ повністю виражається через розподіл ξ^+: $p_r^+ = \mathbf{P}\{\xi^+=r\}$, $r\ge 0$, до того ж для $k\to+\infty$ (див. останні два співвідношення в (30)) час перебування $l_k(\infty)$ стає майже нульовим

$$\mathbf{P}\{l_k(\infty)\ge y\}\to 0, \quad y\ge 0, \quad \text{тобто} \quad \mathbf{P}\{l_k(\infty)=0\}\to 1.$$

Проте згідно з (29) має місце стабільне “відвідування” всіх станів $k\le 0$ з незалежними від k ймовірностями

$$\mathbf{P}\{l_k(\infty)>y\} = \frac{1-b}{1-bq_+}e^{-y\frac{|m|(1-b)}{1-bq_+}}, \quad y\ge 0, \qquad \mathbf{P}\{l_k(\infty)=0\} = \frac{bp_+}{1-bq_+}.$$

У випадку геометрично розподілених вимог ($n=1, c_1=c<1$) ξ^+ мають розподіл (близький до геометричного)

$$p_k^+ = p_+\hat{z}_0^{-r}(1-c\hat{z}_0), \quad k>0, \qquad p_+ = \frac{1-\hat{z}_0^{-1}}{1-c}, \quad \hat{z}_0 = (q_+ + cp_+)^{-1}.$$

При $m = 0$ і $s \to 0$ розподіл $l_k(\theta_s)$ (а отже, і $l_k(t)$ при $t \to \infty$) для будь-якого k стає виродженим (див. (26)). Але якщо покласти $m_\varepsilon = \mathbf{E}\xi_\varepsilon(1) = c\varepsilon(\varepsilon > 0, c \neq 0)$, то в [6] показано, що граничний розподіл „$\varepsilon l_{k,\varepsilon}(\infty)$" при $b = 0$ і $\varepsilon \to 0$ стає показниковим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\{\varepsilon l_{k,\varepsilon}(\infty) > y\} = e^{-|c|y}, \quad y \geq 0. \tag{31}$$

Найлегше всього переконатися у справедливості (31) для $l_{k,\varepsilon}(\infty) = \int_0^\infty I\{\xi_\varepsilon(t) = k\}dt$, якщо $\mathbf{E}\xi_\varepsilon(1) = m_\varepsilon = c\varepsilon < 0$. Тоді на підставі (25) і (29) (враховуючи, що $\tilde{p}^<_{0,\varepsilon} = (1 - bq_+^{(\varepsilon)})[|c|\varepsilon(1-b)]^{-1}$, $q_+^{(\varepsilon)} = \mathbf{P}\{\xi_\varepsilon^+ > 0\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 1$) переконуємось, що для $0 \leq b < 1$ при $k < 0$

$$\mathbf{P}\{l_{k,\varepsilon}(\infty) > y\varepsilon^{-1}\} = \frac{1-b}{1 - bq_+^{(\varepsilon)}} e^{-|c|\varepsilon y/\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} e^{-|c|y} \sim (31).$$

При $k > 0$ із (25) випливає, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{p}^<_{k,\varepsilon}(\tilde{p}^<_{0,\varepsilon})^{-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - b\mathbf{P}\{\xi_\varepsilon^+ > k\}}{1 - bq_+^{(\varepsilon)}} = 1.$$

Тоді згідно з (30) при $k > 0$ співвідношення (31) також залишається правильним.

1. *Гусак Д. В.* Распределение времени пребывания однородного процесса с независимыми приращениями над произвольным уровнем // Докл. УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 14 – 17.
2. *Гусак Д. В.* О пребывании над уровнем сумм независимых случайных величин // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 289 – 295.
3. *Гусак Д. В., Каплан Б. И.* О распределении времени пребывания в фиксированном состоянии для одной схемы блужданий с дискретно распределенными скачками // Аналитические методы в задачах теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 27 – 40.
4. *Гусак Д.В., Розуменко А.М.* Час перебування в фіксованому стані процесів, що задаються сумами випадкового числа дискретно розподілених доданків // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-та математики НАН України, 1994. – С. 74 – 93.
5. *Гусак Д.В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 460 с.
6. *Каплан Б.И.* Асимптотическое поведение времени пребывания в фиксированном состоянии полунепрерывных блужданий на цепи Маркова // Асимптотическое поведение сумм случайных величин на марковских процессах и периодических цепях Маркова. – Киев, 1965. – С. 50 – 59. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики: 85.22).

Одержано 18.11.10,
після доопрацювання — 23.06.11