УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ГОЛОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ ГАМІЛЬТОНОВИХ РІВНЯНЬ РУХУ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ

The Maxwell – Lorenz system of an electromagnetic field interacting with charged particles (point charges) is considered in the Darwin approximation which is characterized by the Lagrangian and Hamiltonian of the particles both uncoupled with the field. The solution of the equation of motion of the particles with the approximated Darwin Hamiltonian is found on a finite time interval with the use of the Cauchy theorem. Components of this solution are represented as holomorphic functions of time.

Рассматривается система Максвелла – Лоренца электромагнитного поля, взаимодействующая с заряженными частицами (точечными зарядами) в приближении Дарвина, в котором лагранжиан и гамильтониан частиц отщеплены от электромагнитного поля. Для уравнения движения частиц с аппроксимированным гамильтонианом Дарвина найдено решение на конечном часовом интервале с помощью теоремы Коши. Его компоненты представлены как голоморфные функции времени.

Вступ. Система Максвелла – Лоренца (МЛ) заряджених релятивістських та нерелятивістських частинок, що взаємодіють з електромагнітним полем, є фундаментом сучасної фізики. Хоч багато важливих фактів про неї викладено в [1] та відомі давно, її математична теорія почала розвиватись нещодавно у роботах [2 – 6]. Успіх КАМ теорії, тобто теорії резонансів, у гравітаційній проблемі багатьох тіл [7, 8] дає надію застосувати потужну техніку сучасної математики до системи МЛ чи спершу до кулонівської системи багатьох тіл. Важливі аспекти цієї техніки представлено в монографії [9] з гравітаційної проблеми багатьох тіл. Ми використовуємо деякі її ідеї в цій статті.

Електродинамічна система МЛ диференціальних рівнянь породжується лагранжіаном, якщо електричне та магнітне поля виражені в термінах електромагнітних потенціалів, що задовольняють умову Лоренца та хвильові рівняння, зачеплені з рівняннями Ньютона – Лоренца. Довести існування розв'язків цих рівнянь важко через те, що їх праві частини містять мірозначні заряд та струм, залежні від координат та швидкостей частинок, які можуть зіштовхуватись. Як уникнути катастрофічних зіткнень — головне питання математичної теорії.

Якщо швидкості частинок малі, то можна розкласти вищезгаданий лагранжіан в ряд за степенями оберненої швидкості світла c. Його нульове наближення збігається з кулонівським лагранжіаном. Доданок з першим степенем c^{-1} збігається з часовою похідною повного заряду системи і є нулем. Доданок з c^{-2} збігається з лагранжіаном Дарвіна, що породжує сили, залежні від швидкостей, і є аналогом гравітаційного лагражіана, виписаного в [10]. Ці сили роблять рівняння руху та асоційований гамільтоніан для частинок складними. Нехтуючи доданками, що залежать від вищих степенів c^{-1} у співвідношенні між імпульсами та швидкостями частинок, тобто використуючи їх звичайне співвідношення, отримуємо наближений гамільтоніан Дарвіна, виписаний в [1], який будемо використовувати в цій статті. В ній ми побудуємо голоморфні (за часом) розв'язки рівнянь руху для цього гамільтоніана, виходячи з теореми Коші. Теорема Коші застосовувалась раніше в [9] для побудови голоморфних розв'язків гравітаційної проблеми багатьох тіл на скінченному часовому інтервалі.

Опишемо коротко будову статті. У п. 1 наведено виведення лагранжіана Дарвіна, як це зроблено в [1] (строге виведення дано в [2] на певному часовому інтервалі), та апроксимованого гамільтоніана Дарвіна. У другому пункті сформульовано загальну теорему 2.1 та доведено її з допомогою теореми Коші. У п. 3 розглянуто кулонівські системи, сформульовано більш змістовний варіант загальної теореми та доведено з її допомогою, що сингулярність розв'язків рівнянь руху породжується зіткненнями між двома частинками з протилежними зарядами.

Зазначимо, що нове виведення наближення Дарвіна з перенормованими масами частинок в [2] справедливе на проміжку часу, на якому немає зіткнень між частинками, та використовує процедуру регуляризації рівнянь руху.

1. Наближення Дарвіна. Заряд та струм частинок, розташованих в $x_j(t) \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, \ldots, n$, з швидкостями $v_j(t) \in \mathbb{R}^3$ в момент часу t є мірами, що задані таким чином:

$$\rho(x,t) = \sum_{j=1}^{n} e_j \delta(x - x_j(t)), \quad j(x,t) = \sum_{j=1}^{n} e_j v_j(t) \delta(x - x_j(t)), \quad v_j(t) = \dot{x}_j(t) = \frac{\partial x}{\partial t},$$

де $\delta(x - x_j)$ — атомарна міра, зосереджена в $x_j = (x_j^s,\, s = 1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Ми будемо використовувати позначення

$$|x|_0 = \max_s |x^s|, \quad (x_k, x_k) = |x_k|^2 = (x_k^1)^2 + (x_k^2)^2 + (x_k^3)^2.$$

Нехай $E = (E_1, E_2, E_3)$ і $H = (H_1, H_2, H_3)$ — відповідно електричне та магнітне поля. Тоді рівняння Максвелла задано таким чином:

$$c^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times E, \qquad (\nabla, H) = 0,$$

$$c^{-1} \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times H - \frac{4\pi}{c} j, \qquad (\nabla, E) = 4\pi\rho,$$

де

$$(\nabla \times H)_s = (\mathrm{rot} H)_s = \sum_{j,l=1}^{3} \epsilon_{sjl} \nabla^{(j)} H_l,$$

$$(\nabla, H) = \mathrm{div} H = \sum_{j=1}^{3} \nabla^{(j)} H_j, \quad \nabla^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x^j},$$

а ϵ_{sjl} — кососиметричний тензор. Споріднені рівняння Ньютона–Лоренца мають вигляд

$$\dot{v}_j(t) = e_j (E + c^{-1} v_j(t) \times H).$$

Енергія системи

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j v_j^2 + \int [E^2(x,t) + H^2(x,t)] dx,$$

де інтегрування проводиться по $\mathbb{R}^3$, зберігається. Для спрощення викладок степенем вектора ми позначаємо інколи суму його компонент в цьому степені. Якщо покласти

$$H = \nabla \times A, \quad E = -\nabla \varphi - c^{-1} \dot{A},$$

де φ, A — відповідно скалярний та векторний потенціали, то легко вивести першу пару рівнянь Максвелла для потенціалів (треба подіяти $\nabla\times$ на обидві частини другого співвідношення), використавши рівності

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0, \quad (\nabla, \nabla \times A) = 0.$$

Якщо має місце умова Лоренца $c^{-1}\dot{\varphi}+(\nabla, A) = 0$, то друга пара рівнянь Максвелла еквівалентна наступній:

$$c^{-2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = 4\pi c^{-1} j, \quad c^{-2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 4\pi\rho, \quad \Delta = \nabla^2.$$

При цьому слід скористатися рівністю

$$\nabla \times \nabla \times A - \nabla(\nabla, A) = -\Delta A.$$

Зазначимо, що електричне та магнітне поля не змінюються, якщо потенціали відображаються в штриховані так (калібрувальне перетворення):

$$\varphi'(x,t) = \varphi(x,t) - c^{-1}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad A'(x,t) = A(x,t) + \nabla f,$$

тобто, потенціали визначені неоднозначно. Для виконання умови Лоренца необхідно, щоб f задовольняла хвильове рівняння.

Лагранжіан МЛ для нерелятивістських та релятивістських частинок визначено таким чином:

$$L = L_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} \int v_j^2(t)dt + \int (E^2(x,t) - H^2(x,t))dxdt,$$

$$L = L_0 - c^2 \sum_{j=1}^{n} m_j \int (1 - c^{-2}v_j^2(t))^{\frac{1}{2}} dt + \int (E^2(x,t) - H^2(x,t))dxdt,$$

$$L_0 = \sum_{j=1}^{n} e_j \int [-\varphi(x_j(t),t) + c^{-1}(v_j(t), A(x_j(t),t))]dt,$$

де інтегрування проводиться, відповідно, по $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^d$. При цьому E, H повинні бути виражені через потенціали φ, A в L_0.

Евристичні аргументи запропоновано в [1] для отримання розв'язків хвильових рівнянь у вигляді

$$\varphi(x,t) = \int |x - x'|^{-1}\rho(x', t - c^{-1}|x - x'|)dx' + \varphi_0(x,t),$$

$$A(x,t) = \frac{1}{c}\int |x - x'|^{-1} j(x', t - c^{-1}|x - x'|)dx' + A_0(x,t),$$

де останні доданки у правих частинах цих рівностей є розв'язками вільних хвильових рівнянь, які можна покласти рівними нулю. При цьому використовується рівність $\Delta|x - x'|^{-1} = -4\pi\delta(x - x')$. Щоб обґрунтувати таке зображення, по суті, необхідно врахувати, що лінійний оператор (даламбертіан) у лівій частині хвильових рівнянь можна обертати на просторі узагальнених функцій з допомогою функції Гріна $G(x,t) = |x|^{-1}\theta(t)\delta(t - c^{-1}|x|)$, де θ дорівнює 1 на $\mathbb{R}^+$ та нулю на доповненні [11].

Далі розкладемо за степенями c^{-1} інтеграл для потенціалів в отриманому зображенні та знехтуємо всіма доданками зі степенями c^{-1} так, щоб у лагранжіані L_0 залишились тільки доданки зі степенями меншими за три. В результаті для скалярного потенціалу отримуємо наближене зображення

$$\varphi(x,t) = \int |x - x'|^{-1}\rho(x',t)dx' + c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho(x',t)dx' +$$
$$+ (2c^2)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int |x - x'|\rho(x',t)dx'.$$

Але другий доданок є часовою похідною від заряду системи та дорівнює нулю, тобто

$$\varphi(x,t) = \sum_{j=1}^{n} e_j \left[|x - x_j(t)|^{-1} + (2c^2)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|x - x_j(t)| \right].$$

Для векторного потенціалу маємо нульове наближення

$$A(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{c} v_j(t)|x - x_j(t)|^{-1}.$$

Зазначимо, що умова Лоренца виконується наближено і рівняння МЛ наближено еквівалентні хвильовим рівнянням для потенціалів.

Скористаємось тепер калібрувальним перетворенням з

$$f = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{2c}\frac{\partial}{\partial t}|x - x_j(t)|.$$

Нові потенціали мають вигляд

$$\varphi'(x,t) = \sum_{j=1}^{n} e_j|x - x_j(t)|^{-1},$$

$$A'(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{c}\left[v_j(t)|x - x_j(t)|^{-1} + 2^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\nabla|x - x_j(t)| \right].$$

З рівностей

$$\nabla|x - x_j(t)| = |x - x_j(t)|^{-1}(x - x_j(t)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla|x - x_j(t)|] = -|x - x_j(t)|^{-1}v_j(t) + \frac{x - x_j(t)}{|x - x_j(t)|^3}(v_j(t), x - x_j(t))$$

випливає

$$A'(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{2c}\left[v_j(t)|x - x_j(t)|^{-1} + \frac{x - x_j(t)}{|x - x_j(t)|^3}(v_j(t), x - x_j(t)) \right].$$

Тепер, якщо підставити ці вирази в рівняння руху Ньютона – Лоренца та в L_0, можна бачити, що вони отримуються з лагранжіана

$$L = L^0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} \int \left[v_j^2(t) + \sigma \frac{v_j^4(t)}{8c^2} \right] dt, \quad \sigma = 0, 1,$$

де

$$L^0 = \sum_{j \neq k=1}^{n} e_k e_j \int \{ -|x_k(t) - x_j(t)|^{-1} + (2c)^{-1} [(v_j(t), v_k(t)) |x_k(t) - x_j(t)|^{-1} +$$

$$+ |x_k(t) - x_j(t)|^{-3} (v_j(t), x_k(t) - x_j(t))(v_k(t), x_k(t) - x_j(t))] \} dt$$

та $\sigma = 0, 1$ відповідає випадкам нерелятивістських та релятивістських частинок. Вираз $\dfrac{v_j^4(t)}{8c^2}$ є результатом розкладу $(1 - c^{-2} v_j^2(t))^{1/2}$ за степенями $c^{-2} v_j^2(t)$. L^0 відрізняється від L_0 на необмежену константу, яка фігурує у виразі для L_0 (доданок у сумі з $k = j$).

Строгу версію апроксимації Дарвіна встановлено в [2] на часовому інтервалі порядку ϵ^{-3} при початковій умові $|v_j(0)| \leq \epsilon c < 1$. При цьому показано, що m_j та σ мають бути перенормовані у виразі для лагранжіана Дарвіна. Нехай

$$H_n^0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{|p_j|^2}{2m_j} + U(x_{(n)}), \quad U(x_{(n)}) = \sum_{j \neq k=1}^{n} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|},$$

$$x_{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

де в подвійній сумі j, k пробігають множину $1, \ldots, n$. Тоді апроксимований гамільтоніан Дарвіна визначено в [1] як

$$H_n(c^{-2}) = \sum_{j=1}^{n} (p_j, v_j) - L, \quad p_j = m_j v_j,$$

і

$$H_n(\eta) = H_n(\eta; x_{(n)}; p_{(n)}) = H_n^0 - \eta\sigma \sum_{j=1}^{n} \frac{|p_j|^4}{8m_j^3} -$$

$$-\eta \sum_{j \neq k=1}^{n} \frac{e_j e_k}{2m_j m_k |x_j - x_k|} [(p_j, p_k) + |x_j - x_k|^{-2} (p_j, x_j - x_k)(p_k, x_j - x_k)]. \quad (1.1)$$

2. Основний результат. Наша мета тепер полягає в побудові розв'язків рівнянь руху з апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна (1.1) з комплексними змінними

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H_n(\eta)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H_n(\eta)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \quad (2.1)$$

Щоб зберегти позначення, які прийняті скрізь, ми використаємо такі позначення $(x, y \in \mathbb{C}^n)$:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^*, \quad |x|^2 = (x, x), \quad x_j, y_j \in \mathbb{C},$$

$$(x,y)_* = (x, y^*) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad |x|_*^2 = (x, x^*),$$

де зірочка у верхньому індексі означає комплексне спряження. Нехай

$$D_m(r;\xi) = \{x_j \colon |x_j - \xi_j| \le r, \quad x_j, \xi_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, m\}.$$

Основним результатом даної статті є дві наступні теореми.

Теорема 2.1. *Нехай* $\{a_l, b_l \in \mathbb{R}^3 \colon |a_j - a_l| \ge r_1, j, l = 1, \ldots, n\}$, $|b_j|_0 \le r_2$, $\kappa_2^{-1} = (1 - \sqrt{6}\kappa)^2 - 12\kappa^2 > 0$. *Тоді існує розв'язок* $(x_j(t), p_j(t))$ (2.1) *для початкових даних* $x_j(0) = a_j, p_j(0) = b_j$ *такий, що*

$$(x_j(t); p_j(t)) \in D_{3n}(r; a) \times D_{3n}(r; b), \quad r = \kappa r_1, \tag{2.1$'$}$$

та $p_j(t)$, $x_j(t)$ *є голоморфними функціями* t *у крузі* $|t| < T = r((n+1)M)^{-1}$, $M = \max(M_1, M_2)$,

$$M_1 = c_1 r_1^{-2} + \eta \left(\frac{r + r_2}{r_1}\right)^2 (\eta_1 + \eta_2 r_1),$$

$$M_2 = m_-^{-1}(r + r_2) + \eta \left[\sigma\eta_3 (r + r_2)^3 + \eta_4 \frac{r + r_2}{r_1}\right],$$

де $m_- = \min\limits_s m_s$, *додатні константи* η_j, c_1 *не залежать від* η, σ *та є додатними поліномами* $\sqrt{\kappa_2}$, κ.

***Зауваження* 2.1.** Для розв'язків (2.1) виконується нерівність

$$|x_j(t) - x_l(t)|_0 \ge |a_j - a_l|_0 - |x_j(t) - a_j|_0 - |x_l(t) - a_l|_0 \ge (1 - 2\kappa) r_1.$$

Це означає, що зіткнень між частинками немає при $\kappa < \dfrac{1}{2}$. Умова обмеженості κ_2 є більш сильною: $\kappa < \dfrac{1}{\sqrt{6}(1+\sqrt{2})}$. З нерівностей $\dfrac{6}{64} < \dfrac{1}{9}$ випливає, що, поклавши $\kappa = \dfrac{1}{8}$, отримаємо $\kappa_2^{-1} > \dfrac{2}{9}$.

Ця теорема випливає з теореми Коші [9] про існування голоморфних розв'язків n-вимірних звичайних диференціальних рівнянь з голоморфним векторним полем та леми 2.1. Теорема Коші формулюється таким чином.

Теорема 2.2. *Нехай система* n*-вимірних звичайних диференціальних рівнянь*

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_{(n)}), \quad j = 1, \ldots, n, \quad x_{(n)} \in \mathbb{R}^n, \quad t \ge t_0, \tag{2.2}$$

визначається функціями f_j, *які є голоморфними функціями змінних* x_j *в* $D_n(r;\xi)$ *та рівномірно обмежені*: $|f_j| \le M$. *Тоді розв'язок* $x_j(t)$ (2.2) *для початкових даних* $\xi_j = x_j(t_0)$ *є голоморфною функцією* t *у крузі* $|t - t_0| < T = r((n+1)M)^{-1}$ *та належить* $D_n(r;\xi)$.

***Зауваження* 2.2.** Ця теорема справедлива, якщо f_j в (2.1) є голоморфними функціями $t, x_{(n)}$ [12]. Можна сподіватись на ослаблення залежності T від n в теоремі 2.1, використовуючи більш сильний варіант теореми Коші з [13], в якому залежність T від n виражається лише через залежність евклідівської норми $f_{(n)}$ від n.

Лема 2.1. *Нехай виконуються умови теореми* 2.1. *Тоді похідні гамільтоніана* $H_n(\eta; x_{(n)}; p_{(n)})$ *по координатах та імпульсах є голоморфними функціями в* $D_{3n}(r; a) \times D_{3n}(r; b)$ *та обмежені відповідно константами* M_1 *і* M_2.

Доведення. Покладемо $\bar{e} = \max\limits_s |e_s|$. Неважко обчислити похідні гамільтонана спершу за координатами, а потім за імпульсами:

$$\frac{\partial H_n(\eta; x_{(n)}; p_{(n)})}{\partial x_j} = \sum_{j \neq k, k=1}^{n} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|_*^3}(x_k - x_j) -$$

$$-\eta \sum_{j \neq k, k=1}^{n} \frac{e_j e_k}{2m_j m_k |x_j - x_k|_*^3}(x_k - x_j)[(p_j, p_k)_* +$$

$$+|x_j - x_k|_*^{-2}(p_j, x_j - x_k)_*(p_k, x_j - x_k)_*] -$$

$$-\eta \sum_{j \neq k, k=1}^{n} \frac{e_j e_k}{2m_j m_k |x_j - x_k|_*}[2|x_j - x_k|_*^{-4}(x_k - x_j)(p_j, x_j - x_k)_*(p_k, x_j - x_k)_* +$$

$$+|x_j - x_k|_*^{-2}(p_j(p_k, x_j - x_k)_* + p_k(p_j, x_j - x_k)_*)],$$

$$\frac{\partial H_n(\eta; x_{(n)}; p_{(n)})}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m_j} - \sigma\eta \frac{|p_j|_*^2 p_j}{2m_j^3} -$$

$$-\eta \sum_{j \neq k, k=1}^{n} \frac{e_j e_k}{2m_j m_k |x_j - x_k|_*}[p_k + |x_j - x_k|_*^{-2}(x_j - x_k)(p_k, x_j - x_k)_*].$$

Ці похідні — раціональні функції і, щоб довести лему, необхідно показати, що вони є обмеженими:

$$|x_k - x_l|_0 \leq |x_k - a_k|_0 + |x_l - a_l|_0 + |a_k - a_l| \leq$$

$$\leq 2\kappa r_1 + |a_k - a_l| \leq \kappa_0 |a_k - a_l|, \quad \kappa_0 = 2\kappa + 1, \tag{2.3}$$

$$|x_k - x_l| \leq \sqrt{3}|x_k - x_l|_0 \leq \kappa_1 |a_k - a_l|, \quad \kappa_1 = \sqrt{3}(2\kappa + 1). \tag{2.4}$$

Покладемо $x_k - a_k + a_l - x_l = x_{k,l}$. Тоді, беручи до уваги нерівність $\frac{3}{49} < \frac{1}{16}$ та рівність $|x|^2 = ||x|_*^2|$, $x \in \mathbb{C}$, легко бачити, що

$$|x_{k,l}|^2 \leq |x_k - a_k|^2 + |x_l - a_l|^2 \leq$$

$$\leq 3|x_k - a_k|_0^2 + 3|x_l - a_l|_0^2 \leq 6\kappa^2 r_1^2 \leq 6\kappa^2 |a_k - a_l|^2.$$

Таким чином, отримуємо уточнену нерівність у формулі (16) в розділі 5.1 в [9]:

$$||x_k - x_l|_*^2| \geq |a_k - a_l|^2 - 2|a_k - a_l||x_{k,l}| - |x_{k,l}|^2 \geq \kappa_2^{-1}|a_k - a_l|^2. \tag{2.5}$$

З допомогою нерівностей (2.3) – (2.5) оцінимо всі перші похідні гамільтоніана. Враховуючи $||x_j - x_k|_*^3| = |(|x_j - x_k|_*^2)^{3/2}| = ||x_j - x_k|_*^2|^{3/2}$, отримуємо

$$\frac{|x_j - x_k|_0}{||x_j - x_k|_*^3|} \leq \kappa_0 \kappa_2^{3/2} |a_k - a_j|^{-2} \leq \kappa_0 \kappa_2^{3/2} r_1^{-2}. \tag{2.6}$$

Далі

$$|(p_j, p_k)_*| \leq |p_j||p_k| = |p_j - b_j + b_j||p_k - b_k + b_k| \leq 3(r + r_2)^2. \tag{2.7}$$

Використовуючи (2.4), (2.5), маємо

$$|(p_k, x_j - x_k)_*| \leq |p_j||x_j - x_k| \leq \sqrt{3}\kappa_1(r + r_2)|a_j - a_k|, \tag{2.8}$$

$$||x_j - x_k|_*^{-2}||(p_j, x_j - x_k)_*||(p_k, x_j - x_k)_*| \leq 3\kappa_1^2\kappa_2(r + r_2)^2, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &||x_j - x_k|_*^{-2}||(p_j(p_k, x_j - x_k)_* + p_k(p_j, x_j - x_k)_*)|_0 \leq \\ &\leq ||x_j - x_k|_*^{-2}||p_j|_0|(p_k, x_j - x_k)_*| + |p_k|_0|(p_j, x_j - x_k)_*| \leq \\ &\leq 3\kappa_1\kappa_2\frac{(r + r_2)^2}{r_1}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

З рівності $||x_j - x_k|_*^{-4}| = ||x_j - x_k|_*^2|^{-2}$ та нерівностей (2.3), (2.5), (2.8) випливає

$$\begin{aligned} &||x_j - x_k|_*^{-4}||(x_k - x_j)(p_j, x_j - x_k)_*(p_k, x_j - x_k)_*|_0 \leq \\ &\leq ||x_j - x_k|_*^2|^{-2}|x_k - x_j|_0|(p_j, x_j - x_k)_*(p_k, x_j - x_k)_*| \leq \\ &< 3\kappa_0(\kappa_1\kappa_2)^2\frac{(r + r_2)^2}{|a_j - a_k|} \leq 3\kappa_0(\kappa_1\kappa_2)^2\frac{(r + r_2)^2}{r_1}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$||x_j - x_k|_*^{-2}||x_j - x_k|_0|(p_k, x_j - x_k)_*| \leq \sqrt{3}\kappa_0\kappa_1\kappa_2(r + r_2), \tag{2.12}$$

$$||x_j - x_k|_*^{-1}||p_k|_0 = ||x_j - x_k|_*^2|^{-\frac{1}{2}}|p_k|_0 \leq \sqrt{\kappa_2}|a_j - a_k|^{-1}(r + r_2) \leq \sqrt{\kappa_2}\frac{(r + r_2)}{r_1}. \tag{2.13}$$

Оцінки (2.5) – (2.13) дозволяють отримати оцінки для частинних похідних гамільтоніана в $D_{3n}(r; a) \times D_{3n}(r; b)$. Враховуючи (2.6), (2.7), (2.9), (2.11), бачимо, що два перших доданки в перших квадратних дужках та перший доданок у других квадратних дужках у виразі для похідної по координаті гамільтоніана обмежені виразом, пропорційним $\dfrac{(r + r_2)^2}{r_1^2}$ з коефіцієнтом пропорційності

$$\eta_1 = \frac{3n\bar{e}^2}{2m_-^2}[\kappa_0\kappa_2^{3/2}(1 + \kappa_1^2\kappa_2) + 2\kappa_0\kappa_1^2\kappa_2^{5/2}].$$

З (2.10) випливає, що останній доданок у других квадратних дужках обмежений виразом, пропорційним $\dfrac{(r + r_2)^2}{r_1}$ з коефіцієнтом пропорційності $\eta_2 = \dfrac{3n\bar{e}^2}{2m_-^2}\kappa_1\kappa_2$. З нерівностей (2.6) видно, що перший доданок у виразі для похідної по координаті гамільтоніана обмежений виразом, пропорційним $\dfrac{(r + r_2)^2}{r_1}$ з коефіцієнтом пропорційності $c_1 = n\bar{e}^2\kappa_0\kappa_2^{3/2}$. Отже, похідні гамільтоніана по координатах рівномірно обмежені M_1.

З нерівностей (2.5), (2.12), (2.13) та

$$\sqrt{||p_k|_*^2|} \leq |p_k| \leq |p_k - b_k| + |b_k| \leq 2\sqrt{3}(r + r_2), \quad |p_k|_0 \leq r + r_2,$$

випливає, що похідні гамільтоніана по імпульсах рівномірно обмежені M_2 та

$$\eta_3 = \frac{6}{m_-^3}, \quad \eta_4 = \frac{n\bar{e}^2}{2m_-^2}(\sqrt{\kappa_2} + \sqrt{3}\kappa_0\kappa_1\kappa_2).$$

Лему доведено.

***Доведення теореми* 2.1** безпосередньо випливає з теореми Коші та леми 2.1. При цьому необхідно ототожнити (2.1) з (2.2) та замінити n на $6n$, а також покласти $t_0 = 0$, $\xi = (a, b)$.

3. Обмеження потенціальної енергії. У цьому пункті сформулюємо три теореми, які є наслідками теореми 2.1 і в яких ми накладаємо умови на початкові значення координат та імпульсів a_k, b_k з допомогою умов на потенціальні енергії в початковий момент U^+, U^- відповідно, зарядів одного та різного знаків, а також зафіксуємо значення гамільтоніана $H_n(\eta)$. При цьому виразимо r_1, r_2 через константи C, $|h|$ так, що

$$\max(U^+(a_{(n)}), U^-(a_{(n)})) \le C, \quad H_n(\eta) = h \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Ці три теореми є аналогами твердження, доведеного у розділі 5 монографії [9]. Спершу ми накладемо першу умову в (3.1).

Теорема 3.1. *Нехай виконується нерівність* (3.1). *Тоді справедливі висновки теореми* 2.1, *якщо у виразах для* M_1, M_2 *та* (2.1′) *покласти* $r_1 = \dfrac{e_-^2}{C}$.

Доведення досить просте і виводиться з однієї нерівності. Дійсно, нехай $\rho = \min\limits_{1\le j<k\le n} |a_j - a_k|$. Тоді для пари, для якої цей мінімум досягається, виконується нерівність

$$\frac{e_-^2}{\rho} \le \frac{|e_j e_k|}{|a_j - a_k|} \le \max(U^+, U^-) \le C. \tag{3.2}$$

А це означає, що $r_1 = \dfrac{e_-^e}{C}$.

Теорема 3.2. *Нехай виконується* (3.1), *а також* $m_+ = \max\limits_j m_j$, $e_- = \min\limits_j e_j$. *Тоді для релятивістської системи* ($\sigma = 1$, $\eta = c^{-2}$) *виконується* $|b_j|_0 \le |b_j| \le \sqrt{R}$, *де*

$$R = (2\alpha)^{-1}(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}), \quad \alpha = \frac{1}{8m_+^3c^2},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{n}}{2m_-} + \frac{n\sqrt{n}\bar{e}^2}{c^2m_-^2e_-^2}C, \quad \gamma = C + |h|,$$

і справедливі висновки теореми 2.1, *якщо у* (2.1′) *та виразах для* M_1, M_2 *покласти* $r_1 = \dfrac{e_-^2}{C}$, $r_2 = \sqrt{R}$.

Доведення. З (3.1), (3.2) отримуємо

$$|h| \ge \alpha \sum_{j=1}^n |b_j|^4 - \frac{1}{2m_-}\sum_{j=1}^n |b_j|^2 - C - \eta\frac{\bar{e}^2}{\rho m_-^2}\left(\sum_{j=1}^n |b_j|\right)^2.$$

З нерівностей (3.2) і

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^4 \right)^{1/2}, \quad \sum_{j=1}^{n} |b_j| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \right)^{1/2}$$

(ми застосовуємо тричі нерівність Шварца) випливає

$$\alpha y^2 - \beta y - \gamma \leq 0, \quad y^2 = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^4,$$

тобто $y \leq R$ та $|b_j|_0 \leq |b_j| \leq \sqrt{R}$.

Теорему доведено.

Теорема 3.3. *Нехай виконується* (3.1) *і* $\dfrac{1}{2m_-} > \eta \dfrac{n\bar{e}^2 C}{e_-^2 m_-^2}$. *Тоді для нерелятивістської системи* $(\sigma = 0)$ *виконується нерівність* $|b_j|_0 \leq |b_j| \leq \sqrt{R}$, *де*

$$R = (|h| + C) \left(\frac{1}{2m_-} - \eta \frac{n\bar{e}^2 C}{e_-^2 m_-^2} \right)^{-1}$$

і справедливі висновки теореми 2.1, *якщо у* $(2.1')$ *та виразах для* M_1, M_2 *покласти* $r_1 = \dfrac{e_-^2}{C}$, $r_2 = \sqrt{R}$.

Доведення. Використовуючи (3.2), отримуємо

$$|h| \geq \frac{1}{2m_-} \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - C - \eta \frac{\bar{e}^2 C}{e_-^2 m_-^2} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j| \right)^2.$$

Застосовуючи нерівність Шварца до другої суми, маємо

$$|h| + C \geq \left(\frac{1}{2m_-} - \eta \frac{n\bar{e}^2 C}{e_-^2 m_-^2} \right) \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Отже,

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq R^2,$$

а це і доводить теорему.

***Зауваження* 3.1.** Для кулонівської системи $\eta = 0$ та $R = \dfrac{|h| + C}{2m_-}$.

Наслідком теорем 3.1 – 3.3 є наступне твердження.

Твердження 3.1. *Нехай* $T < t_1$, *де число* T *визначено в теоремі* 3.1 *і при* $t = t_1$ *хоча б одна компонента розв'язку* (2.1) *є неголоморфною, а при* $t < t_1$ *— голоморфною. Тоді*

$$\lim_{t \to t_1} \min_{1 \leq j < k \leq n} ||x_j(t) - x_k(t)|| = 0.$$

Доведення. Нехай $(t_n < t_1, n \geq 2)$ — послідовність, яка збігається знизу до t_1. Встановимо, що або функції U^-, U^+ є необмеженими, або необмеженою є лише одна з цих функцій у момент t_1. Для кулонівської системи необмеженість лише U^+ виключається з умови збереження енергії. Дійсно, з теореми Коші випливає, що якщо U^-, U^+ є обмеженими в момент t_1, то функції U^-, U^+ рівномірно обмежені на послідовності (t_n) та t_1 належить інтервалу $[t_n, t_n + T]$ при достатньо великому n, оскільки T рівномірно обмежена по n. Тоді згідно з теоремою Коші розв'язок (2.1) з початковою умовою в t_n буде голоморфним на інтервалі $[t_n, t_n + T]$. А це суперечить припущенню про обмеженість U^-, U^+ в момент t_1 і доводить твердження.

Автор висловлює подяку проф. І. О. Парасюку за обговорення результатів статті та цінну пораду, що сприяла формулюванню теореми 3.2.

1. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
2. *Kunze M., Spohn H.* Slow motion of charges interacting through the Maxwell field // arXiv: math-phys/0001002v1, 3 January.
3. *Komech A., Spohn H.* Long time asymptotics for the coupled Maxwell – Lorenz equations // Communs Part. Different. Equat. – 2000. – **25**, № 3/4. – P. 559 – 584.
4. *Bauer G., Durr D.* The Maxwell – Lorenz system of a rigid charge distribution // Ann. Inst. H. Poincare. – 2001. – **2**. – P. 179 – 196.
5. *Spohn H.* Dynamics of charged particles and their radiation field. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
6. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* On scattering of solitons for Maxwell equation coupled to a particle // arXiv: math-phys/087.1072v1, 12 July 20008.
7. *Арнольд В.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Укр. мат. журн. – 1963. – **18**, № 1. – P. 91 – 192.
8. *Cherchia L., Pusateri F.* Analytic Lagrangian tori for the planetary many-body problem // Ergod. Theory and Dynam. Systems. – 2009. – **29**. – P. 849 – 873.
9. *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. – М.; Ижевск, 2001. — 384 с.
10. *Treder H.-J.* Die relativitat der Tragheit. – Berlin: Acad. Verlag, 1972.
11. *Владимиров В.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
12. *Голубев В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – 436 с.
13. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

Одержано 23.06.10