УДК 517.9

С. З. Курбаншоев

Построение интегральных многообразий систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр

В статье исследуются некоторые аналитические свойства нелинейных проекторов [1]. Формулируются условия существования проекторов и находится область их аналитичности.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений m-го порядка, содержащую малый параметр

$$dX/dt = A(t)X + \mu F(t, X), \tag{1}$$

где X — вектор с проекциями $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Полагаем, что вектор-функция $F(t, X)$ является голоморфной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$— проекций вектора X, непрерывной по t в области D

$$\|X\| \equiv \max_{1\leqslant j\leqslant m} |x_j| \leqslant \rho, \quad -\infty < t < \infty. \tag{2}$$

Разложение вектор-функции $F(t, X)$ в ряды по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_m$ начинается с членов не ниже второго порядка. Следовательно, функция $F(t, X)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(t, X_1) - F(t, X_2)\| \leqslant \beta \|X_1 - X_2\|. \tag{3}$$

Предполагаем, что система линейных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = A(t)X, \quad -\infty < t < \infty, \tag{4}$$

в которой элементы матриц $A(t)$ — ограниченные и непрерывные по t функции, экспоненциально дихотомична [2] на оси t, т. е. ее матрица Грина $G(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\|G(t, \tau)\| \leqslant ce^{-\lambda|t-\tau|}, \quad \lambda > 0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Если для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) выполнены все указанные выше условия, то при выполнении неравенства*

$$\beta < \lambda^2 - \nu^2/(2\lambda c\,|\mu|\,(1 + c)) \tag{6}$$

для комплексных переменных X в области D_1

$$\|X\| < \rho_1(1 + c)^{-1}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{7}$$

где

$$\rho \equiv \min\{\lambda/(2c\,|\mu|\,(1 + c)), \rho\}, \tag{8}$$

существуют нелинейный оператор Грина $H(t, \tau, \mu, X)$, являющийся ограниченным при $-\infty < t, \tau < \infty$ решением системы нелинейных интегральных *уравнений*

$$H(t, \tau, \mu, X) = G(t, \tau) X + \mu \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) F(s, H(s, \tau, \mu, X)) \, ds. \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) *можно найти для* $-\infty < t, \tau < \infty$ *методом последовательных приближений. Они равномерно сходятся в области* D_1. *При этом нелинейный оператор Грина* $H(t, \tau, \mu, X)$ *удовлетворяет в области* D_1 *условиям*

$$\| H(t, \tau, \mu, X) \| \leqslant (1 + c) \| X \| \exp\{-\nu |t - \tau|\}, \qquad (10)$$

$$\| H(t, \tau, \mu, X) - G(t, \tau) X \| \leqslant cq(1 - q)^{-1} \| X \| \exp\{-\nu |t - \tau|\} \qquad (11)$$

и будет голоморфным в этой области.

Доказательство. Согласно [1] нелинейный оператор Грина $H(t, \tau, \mu, X)$ определяется как ограниченное на всей оси t решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\partial H(t, \tau, \mu, X)/\partial t = A(t) H(t, \tau, \mu, X) + F(t, H(t, \tau, \mu, X)) + X\delta(t - \tau), \qquad (12)$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака.

Систему уравнений (12) можно заменить эквивалентными уравнениями

$$\begin{gathered} \partial H(t, \tau, \mu, X)/\partial t = A(t) H(t, \tau, \mu, X) + F(t, H(t, \tau, \mu, X)), \quad t \neq \tau, \\ H(\tau + 0, \tau, \mu, X) - H(\tau - 0, \tau, \mu, X) = X \end{gathered} \qquad (13)$$

с дополнительным условием

$$\lim_{|t-\tau| \to \infty} H(t, \tau, \mu, X) = 0. \qquad (14)$$

Из первой системы уравнений (13) вытекает, что при $t \neq \tau$ оператор Грина совпадает с решением в форме Коши с начальным значением $X(\tau) = X_1$ при $t > \tau$ и начальным значением $X(\tau) = X_2$ при $t < \tau$, где

$$X_1 = H(\tau + 0, \tau, \mu, X), \quad X_2 = H(\tau - 0, \tau, \mu, X), \quad X = X_1 - X_2. \qquad (15)$$

При этом $X_1(t) \in G_1$, $X_2(t) \in G_2$ образуют интегральные многообразия решений, равномерно экспоненциально притягивающихся к нулевому решению соответственно при $t - \tau \to \pm\infty$.

Пусть B — множество непрерывных по t, τ, μ, X вектор-функций $Z(t, \tau, \mu, X)$. Введем норму

$$\| Z(t, \tau, \mu, X) \|_0 = \sup_{t, \tau} \| Z(t, \tau, \mu, X) \| e^{\nu |t - \tau|}, \quad 0 \leqslant \nu < \lambda. \qquad (16)$$

Тогда [3] множество B с нормой (16) будет банаховым пространством B. Полагая в системе уравнений (9) $Z(t, \tau, \mu, X) = H(t, \tau, \mu, X) - G(t, \tau) X$, придем к системе интегральных уравнений

$$Z(t, \tau, \mu, X) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) F(s, G(s, \tau) X + Z(s, \tau, \mu, X)) \, ds. \qquad (17)$$

Решение по методу последовательных приближений сходится в пространстве B, если нелинейный интегральный оператор R

$$RZ(t, \tau, \mu, X) \equiv \mu \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) F(s, G(s, \tau) X + Z(s, \tau, \mu, X)) \, ds \qquad (18)$$

— оператор сжатия.

Оценивая в области D норму разности, получаем

$$\| RZ_1(t, \tau, \mu, X) - RZ_2(t, \tau, \mu, X) \|_0 \leqslant q \| Z_1(t, \tau, \mu, X) - Z_2(t, \tau, \mu, X) \|, \qquad (19)$$

где

$$q = \sup_{t, \tau} e^{\nu |t - \tau|} |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} c\beta e^{-\lambda |t - s|} e^{-\nu |s - \tau|} ds = 2c |\mu| \beta\lambda/(\lambda^2 - \nu^2).$$

Условие $q < 1$ будет выполнено при условии (6). Установим оценку для решения интегральных уравнений (17), выраженную через $H_1(t, \tau, \mu, X) \equiv G(t, \tau) X$.

Из теоремы Банаха [3] следует, что выполнена оценка

$$\| H(t, \tau, \mu, X) \|_0 \leqslant \| H_1(t, \tau, \mu, X) \|_0 \frac{1}{1-q} =$$

$$= \frac{1}{1-q} \sup_{t,\tau} \| G(t, \tau) X \| e^{(\nu-\lambda)|t-\tau|} \leqslant \frac{c}{1-q} \| X \|. \tag{20}$$

В силу условия (6) $c/(1-q) = c(\lambda^2 - \nu^2)/(\lambda^2 - \nu^2 - 2c|\mu|\beta) < 1 + c$. Это доказывает справедливость неравенства (10).

Поскольку в силу условия (5)

$$\| G(t, \tau) \|_0 \leqslant c \| X \|, \tag{21}$$

то получаем неравенство $\| H(t, \tau, \mu, X) - G(t, \tau) X \| \leqslant cq(1-q)^{-1} \| X \|$, из которого вытекает справедливость неравенства (11). Из условий (7), (10) следует, что

$$\| H_n(t, \tau, \mu, X) \| < \rho_1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \| H(t, \tau, \mu, X) \| < \rho_1. \tag{22}$$

Отметим, что при $\nu = 0$ условием сходимости будет неравенство

$$\beta < \lambda/(2|\mu| c(1+c)). \tag{23}$$

Из условий (10), (11) следует, что

$$\lim_{|t-\tau| \to \infty} H(t, \tau, \mu, X) = 0 \tag{24}$$

и

$$\| H_n(t, \tau, \mu, X) \| < (1 + c) \| X \| \exp\{-\nu |t - \tau|\}, \tag{25}$$

$$\| H_n(t, \tau, \mu, X) - G(t, \tau) X \| < cq(1-q)^{-1} \| X \| \exp\{-\nu |t - \tau|\}. \tag{26}$$

Из равномерной сходимости по t, τ, μ, X интегралов в правой части равенства

$$H_{n+1}(t, \tau, \mu, X) = G(t, \tau) X + \mu \int_{-\infty}^{\tau} G(t, s) F(s, H_n(s, \tau, \mu, X)) \, ds +$$

$$+ \mu \int_{\tau}^{t} G(t, s) F(s, H_n(s, \tau, \mu, X)) \, ds + \mu \int_{t}^{\infty} G(t, s) F(s, H_n(s, \tau, \mu, X)) \, ds,$$

а также из оценок (25), (26) следует голоморфная зависимость от X в области (7) векторов $H_n(t, \tau, \mu, X)$ при $t \neq \tau$. Последовательность $H_n(t, \tau, \mu, X)$ сходится равномерно при всех t, τ, μ, X к единственному ограниченному решению $H(t, \tau, \mu, X)$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса [4] в области (7) вектор-функция $H(t, \tau, \mu, X)$ будет голоморфно зависеть от X при любых $t \neq \tau$. Это окончательно доказывает справедливость теоремы 1.

Отметим, что при $\rho \to 0$ постоянная Липшица $\beta(\rho) \to 0$. Следовательно, условие (7) всегда может быть выполнено при достаточно малых значениях $\rho > 0$.

2. Нелинейные проекторы $P_k(t, \mu, X)$, $k = 1, 2$, определяются по формулам [1]

$$P_1(t, \mu, X) = H(t+0, t, \mu, X), \quad P_2(t, \mu, X) = -H(t-0, t, \mu, X). \tag{27}$$

Можно доказать, что нелинейные проекторы удовлетворяют условиям

$$P_k(t, P_s(t, \mu, X)) = \delta_{ks} P_k(t, \mu, X), \ \delta_{ks} = 0, \quad k \neq s, \quad \delta_{kk} = 1, \quad k, s = 1, 2,$$

$$P_1(t, \mu, X) + P_2(t, \mu, X) \equiv X. \tag{28}$$

Размерность интегральных многообразий G_1, G_2 [5] равна числу независимых функций от X в совокупности проекций векторов $P_k(t, \mu, X)$, $k = 1, 2$, $P_1(t, \mu, X) \in G_1$, $-P_2(t, \mu, X) \in G_2$.

Уравнения, определяющие многообразие G_1, будут иметь вид $X = P_1(t, \mu, X)$, а уравнения, определяющие многообразие G_2,— вид $X = -P_2(t, \mu, X)$.

Пусть у системы уравнений (4) существует интегральное многообразие размерности q решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$, и интегральное многообразие размерности $p = m - q$ решений, экспоненциально стремящихся к нулю при $t \to -\infty$. Тогда и система нелинейных уравнений (1) будет иметь интегральное многообразие G_1 решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$, и имеющее размерность q, а также интегральное многообразие G_2 решений, стремящихся к нулю при $t \to -\infty$ и имеющее размерность p.

Окончательный вывод сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда в области (7) существуют нелинейные проекторы $P_k(t, \mu, X)$, определяемые по формулам (27), являющиеся голоморфными вектор-функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и удовлетворяющие условию $\| P_k(t, \mu, X) \| \leqslant (1 + c) \|X\|$, $k = 1, 2$. Последнее неравенство следует из формулы (10) при $t = \tau$.*

Пример. Рассмотрим систему уравнений $dx_1/dt = x_1 - 2\mu x_2^3$, $dx_2/dt = -x_1 + 3\mu x_1^2$. Построим интегральные многообразия G_1, G_2. При $\mu = 0$ уравнения многообразий имеют вид $x_2 = 0$; $x_1 = 0$. Ищем уравнение интегрального многообразия G_1 в виде разложения $x_2 = \mu\psi_1(x_1) + \mu^2\psi_2(x_1) + \mu^3\psi_3(x_1) + \ldots$. При этом находим уравнение многообразия G_1:

$$x_2 = \mu\frac{7x_1^2}{3} + \mu^2\frac{27^4x_1^4}{3^5} + \mu^3\frac{2^37^3x_1^{12}}{3^9} + \mu^4\frac{2^47^2x_1^{17}}{3^{12}} + \ldots .$$

Аналогично находим уравнение интегрального многообразия G_2

$$x_1 = \mu\frac{7x_2^2}{3} + \mu^2\frac{27^4x_2^4}{3^5} + \mu^3\frac{2^37^3x_2^{12}}{3^9} + \mu^4\frac{2^47^2x_2^{17}}{3^{12}} + \ldots .$$

Из этих уравнений получаем аналитическое выражение для нелинейных проекторов

$$P_1(X) = \begin{pmatrix} \mu\dfrac{7x_2^2}{3} - \mu^2\dfrac{98x_1^2x_2}{3^2} + \mu^3\dfrac{343x_1^4}{3^3} + \ldots \\ x_2 + \mu\dfrac{7x_1^2}{3} - \mu^2\dfrac{98x_1x_2^2}{3^2} + \mu^3\dfrac{343x_2^4}{3^3} + \ldots \end{pmatrix},$$

$$P_2(X) = \begin{pmatrix} x_1 - \mu\dfrac{7x_2^2}{3} + \mu^2\dfrac{98x_1^2x_2}{3^2} - \mu^3\dfrac{343x_1^4}{3^3} + \ldots \\ -\mu\dfrac{7x_1^2}{3} + \mu^2\dfrac{98x_1x_2^2}{3^2} - \mu^3\dfrac{343x_2^4}{3^3} + \ldots \end{pmatrix}.$$

Ряды, определяющие нелинейные проекторы $P_k(X)$, $k = 1, 2$, сходятся в силу оценки (7) при условии $\max\limits_j |\mu x_j| < 1/32$, $j = 1, 2$.

1. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функции Ляпунова.— Киев : Наук. думка, 1981.— 412 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
3. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ.— М. : Наука, 1967.— 415 с.
4. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1977.— 444 с.
5. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

Душанбинский
педагогический институт

Поступила в редакцию
31.03.82