УДК 517.43

М. Н. Феллер

Бесконечномерные самосопряженные дифференциальные операторы Лапласа — Леви

В бесконечномерном пространстве не существует меры типа меры Лебега, а в пространстве с иной мерой лапласиан Леви [1] не является формально самосопряженным выражением. В этой статье он симметризуется и рассматриваются порожденные симметризованным дифференциальным выражением Лапласа—Леви операторы в гильбертовом пространстве функций бесконечного числа переменных. Симметризованный лапласиан Леви обладает необычными свойствами — на функциях из естественных областей определения оператора Лапласа — Леви [2] он равен нулю. Поэтому строится система полиномов таких, что применение к полиному симметризованного лапласиана Леви нетривиально. При этом показывается, что оператор, построенный по симметризованному варыжению Лапласа — Леви, существенно самосопряжен.

1. Симметризованный лапласиан Леви на функциях из области определения оператора Лапласа — Леви. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство, $\mathfrak{L}_2(H)$ — гильбертово пространство скалярных функций на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором K и нулевым средним, K-ядерный положительно-определенный оператор такой, что $\|x\|_H \leqslant \|\mathrm{K}^{-1/2}x\|_H$, $x \in D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$, $\|F\|^2_{\mathfrak{L}_2(H)} = \int\limits_H F(x)^2 \mu(dx)$, $H_{+1} \subset H_0 \subset H_{-1}$, $H_0 \equiv H$, $H_{+1} \equiv H_+$, $H_{-1} \equiv H_-$, — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств $\{H_\beta\}$, $-\infty < \beta < \infty$, с порождающим оператором $T = \mathrm{K}^{-1/2}$, $(x, y)_{H_\beta} = (T^\beta x, T^\beta y)_H$, $x, y \in H_\beta$.

Известно, что в конечномерном случае лапласиан $\Delta_n u(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ тесно связан с формой Дирихле $\int\limits_{R_n} \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} dx_1 \ldots dx_n$.

Поэтому в $\mathfrak{L}_2(H)$ для лапласиана Леви

$$\Delta U(x) = 2 \lim_{\rho\to 0} \frac{\mathfrak{M} U(x+\rho h) - U(x)}{\rho^2},$$

где $\mathfrak{M}\Phi$ — среднее значение функции $\Phi(h)$ по сфере $\|h\|^2_H = 1$, естественно определить симметризованное бесконечномерное дифференциальное выражение Δ_C как выражение, ассоциированное с формой $\int\limits_H \mathfrak{M}\{(U'(x), h)_H \times (V'(x), h)_H\} \mu(dx)$. Равенство, определяющее Δ_C, имеет вид

$$(\Delta_C U, V)_{\mathfrak{L}_2(H)} = \int\limits_H \mathfrak{M}\{(U'(x), h)_H (V'(x), h)_H\} \mu(dx).$$

Полагая, что функции $U(x)$, $V(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 из [2] и интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_H (U'(x), h)_H (V'(x), h)_H \mu(dx) =$$
$$= \int\limits_H \{(U'(x), h)_H (x, h)_{H_+} - (U''(x)h, h)_H\} V(x) \mu(dx).$$

Если существуют $\mathfrak{M}\{(U'(x), h)_H (x, h)_{H_+} - (U''(x) h, h)_H\}$, $\mathfrak{M}\{(U'(x), h)_H \times \times (V'(x), h)_H\}$ и допустима перестановка интеграла и среднего, то $(\Delta_C U, V)_{\mathfrak{L}_2(H)} = (\mathfrak{M}\{-(U''(x) h, h)_H + (U'(x), h)_H (x, h)_{H_+}\}, V)_{\mathfrak{L}_2(H)}$. Отсюда, симметризованный лапласиан Леви определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_C U(x) = \mathfrak{M}\{-(U''(x) h, h)_H + (U'(x), h)_H (x, h)_{H_+}\}. \tag{1}$$

Если же и лапласиан Леви существует, то, учитывая лемму 1 из [2], имеем

$$\Delta_C U(x) = -\Delta U(x) + \mathfrak{M}\{(U'(x), h)_H (x, h)_{H_+}\}. \tag{2}$$

Ясно, что выражение Δ_C формально самосопряжено.

Пространство $\mathfrak{L}_2(H)$ содержит полные ортонормированные системы. Такие системы строились в работах [3—5] и др. Однако лапласиан Леви и симметризованный лапласиан Леви в силу существенной бесконечномерности не подходят к функциям из систем, приведенных в этих работах. В работе [2] построена полная ортонормированная система полиномов в $\mathfrak{L}_2(H)$ $\mathrm{P}_0(x) = 1$, $\mathrm{P}_{\gamma_{1q}}(x) = \Phi_{1q}(x)$, $\mathrm{P}_{\gamma_{mq}}(x) = \Phi_{mq}(x) + \sum_{k=1}^{[m/2]} \Psi_{m-2k,q}(x)$, $m = 2, 3, \ldots$, где $\Phi_{mq}(x) = ((m!)^{-1/2}\gamma_{mq}, \otimes x^m)_{\otimes H^m} \in \mathfrak{L}_2(H)$, $(\gamma_{mq}, \underbrace{x \otimes \ldots \otimes w}_{m})_{\otimes H^m}$ — симметричная m-линейная форма, $\{\gamma_{mq}\}_{q=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система элементов в $\otimes H_-^m$,

$$\Psi_{m-2,q}(x) = -\frac{1}{(m-2)!}\int_H d^{m-2}\Phi_{mq}(y; \underbrace{x, \ldots, x}_{(m-2)})\,\mu(dy), \qquad \Psi_{m-2\nu,q}(x) =$$

$$= -\frac{1}{(m-2\nu)!}\int_H \left[d^{m-2\nu}\Phi_{mq}(y; \underbrace{x, \ldots, x}_{(m-2\nu)}) + \sum_{k=1}^{\nu-1} d^{m-2\nu}\Psi_{m-2k}(y; \underbrace{x, \ldots, x}_{(m-2\nu)}) \right] \mu(dy), \quad \nu = 2, \ldots, [m/2]; \qquad d^0 F \equiv F. \tag{3}$$

Показано, что если в качестве ядер форм $\Phi_{mq}(x)$ выбрать ядра $(m!)^{-1/2} a_{mq}$, $\mathrm{P}_{a_{mq}} \equiv \mathscr{P}_{mq}$, $\{a_{mq}\}_{q=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система элементов в $\otimes H_-^m$ таких, что

$$\begin{gathered} a_{2n,q} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu_{2n,q}\mu_{2n-2,q}\ldots\mu_{2p,q} \otimes \delta^{n-p+1} \widetilde{\otimes s}_{2p-2,q}}{(n-p+1)!} + \tilde{s}_{2n,q}, \quad \tilde{s}_{0q} \equiv 1, \\ a_{2n-1,q} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu_{2n-1,q}\mu_{2n-3,q}\ldots\mu_{2p-1,q} \otimes \delta^{n-p} \widetilde{\otimes s}_{2p-1,q}}{(n-p)!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\delta \in H_- \otimes H_-$ — ядро, соответствующее единичному оператору, $\{s_{mq}\}_{q=1}^{\infty}$ — полная последовательность элементов в $\otimes H_-^m$ таких, что $s_{mq} \in \in \otimes H_+^m$, «$\sim$» обозначает операцию симметризации, то $\Delta\mathscr{P}_0 = 0$, $\Delta\mathscr{P}_{1q}(x) = 0$, $\Delta\mathscr{P}_{mq}(x) = 2[m(m-1)]^{-1/2}\mu_{mq}\mathscr{P}_{m-2,q}(x)$, $m = 2, 3, \ldots$.

Покажем, что на полиномах $\mathscr{P}_{mq}(x)$, $m, q = 1, 2, \ldots$, симметризованный лапласиан Леви равен нулю почти для всех $x \in H$. Согласно (4)

$$\Phi_{2n,q}(x) = (2n!)^{-1/2}\left[\frac{\mu_{2n,q}\ldots\mu_{2q}\|x\|_H^{2n}}{n!} + \right.$$

$$+\frac{\mu_{2n,q}\ldots\mu_{4q}\|x\|_H^{2(n-1)}(\widetilde{s}_{2q},\,x\otimes x)_{H\otimes H}}{(n-1)!}+\ldots$$

$$\ldots+\mu_{2n,q}\|x\|_H^2(\widetilde{s}_{2n-2,q},\otimes x^{2n-2})_{\otimes H^{2n-2}}+(\widetilde{s}_{2n,q},\otimes x^{2n})_{\otimes H^{2n}}\Bigg].$$

Для функций $H_{l\nu}(x)=\|x\|_H^{2l}(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu}$ в силу леммы 1 из [2] $\Delta H_{l\nu}(x)=$ $=\mathfrak{M}\{(H''_{l\nu}(x)h,h)_H\}=2l\|x\|_H^{2(l-1)}(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu}$. Согласно (2)

$$\Delta_C H_{l\nu}(x)=-2l\nu\|x\|_l^{2(l-1)}(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu}+2l\|x\|_H^{2(l-1)}(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu}\mathfrak{M}\{(x,$$

$$h)_H(x,h)_{H_+}\}+\nu\|x\|_H^{2l}\mathfrak{M}\{(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^{\nu-1}\otimes h)_{\otimes H^\nu}(x,h)_{H_+}\}.$$

Но $\mathfrak{M}\{(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^{\nu-1}\otimes h)_{\otimes H^\nu}(x,h)_{H_+}\}=0$, так как $\widetilde{s}_{\nu q}\in\otimes H_+^\nu$, а $\mathfrak{M}\{(x,$ $h)_H(x,h)_{H_+}\}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(x,f_i)_H(x,f_i)_{H_+}$ для произвольного базиса $\{f_i\}_1^\infty$ в H, $f_i\in H_+$. Поэтому $\Delta_C H_{l\nu}(x)=2l\|x\|_H^{2(l-1)}(\widetilde{s}_{\nu q},\otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu}\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x)$, где

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i(x),\ \ \xi_i(x)=(x,f_i)_H(x,f_i)_{H_+}-1.$$

Покажем, что последовательность $\sigma_n(x)$ сходится почти всюду на H к 0. Пусть $f_i=e_i$, $\{e_i\}_1^\infty$ — канонический базис — ортобазис из собственных векторов оператора T, нормированных в H, $Te_k=\lambda_k e_k$, $k=1,2,\ldots$. Тогда $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(Tx,e_i)_H^2-1$ и, как следует из теоремы о поверхностях полной меры из [6], $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(Tx,e_i)_H^2-1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy-1=0$ почти для всех $x\in H$. Пусть $\{f_i\}_1^\infty$ — произвольный базис в H, $f_i\in H_+$.

Тогда в силу усиленного закона больших чисел для зависимых случайных величин (см., напр., [7]) почти для всех $x\in H$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x)=0$. Таким образом, $\Delta_C H_{l\nu}(x)=0$ почти для всех $x\in H$. Поэтому почти всюду на H $\Delta_C\Phi_{2n,q}(x)=0$. Если $m=2n+1$, то аналогично имеем, что почти всюду на H $\Delta_C\Phi_{2n+1,q}(x)=0$. Отсюда, согласно (3) $\Delta_C\mathscr{P}_{mq}(x)=0$ почти для всех $x\in H$.

2. Лапласиан Леви на функциях из области определения симметризованного оператора Лапласа — Леви. Построим в $\mathfrak{L}_2(H)$ полную ортонормированную систему полиномов $Q_0(x)$, $Q_{mq}(x)$, $m,q=1,2,\ldots$, таких, что $\Delta_C Q_{mq}(x)$ существует и принадлежит $\mathfrak{L}_2(H)$.

Пусть корреляционный оператор K меры μ такой, что $K^{1/2}\chi^{1/2}(K^{-1/2})$ — оператор Гильберта — Шмидта, где $\xi=\chi^2(\eta)$ — функция, обратная для $\eta=\lambda(\xi)$, $\lambda(\xi)$ — некоторая монотонно возрастающая непрерывная при $\xi>0$ функция такая, что $\lambda(k)=\lambda_k$.

Выберем в качестве ядер форм $\Phi_{mq}(x)$ ядра специального вида $(m!)^{-1/2}\alpha_{mq}$, $P_{\alpha_{mq}}\equiv Q_{mq}$, $\{\alpha_{mq}\}_{q=1}^\infty$ — полная ортонормированная система элементов в $\otimes H_-^m$ таких, что

$$\alpha_{2n,q}=\sum_{p=1}^n\frac{\nu_{2n,q}\nu_{2n-2,q}\ldots\nu_{2n,q}\otimes\sigma^{n-p+1}\widetilde{\otimes}\,s_{2p-2,q}}{(n-p+1)!}+\widetilde{s}_{2n,q},\quad\widetilde{s}_{0q}\equiv1,$$

$$\alpha_{2n-1,q} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\nu_{2n-1,q}\nu_{2n-3,q} \ldots \nu_{2p-1,q} \otimes \sigma^{n-p} \widetilde{\otimes} s_{2p-1}}{(n-p)!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\sigma = \sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T) g_j, g_k)_H\, g_j \otimes g_k$, $\{g_k\}_1^\infty$ — любой фиксированный ортонормированный базис в H, $g_k \in H_+$, $\{s_{mq}\}_1^\infty$ — полная последовательность элементов в $\otimes H_-^m$ таких, что $s_{mq} \in \otimes H_+^m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Поскольку по условию $T^{-1}\chi^{1/2}(T)$ — оператор Гильберта — Шмидта, то $\Phi_{mq}(x) \in \mathfrak{L}_2(H)$.

Согласно лемме 2 из [2], система полиномов Q_0, Q_{mq}, m, $q = 1, 2, \ldots$, образует ортонормированный базис в $\mathfrak{L}_2(H)$.

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ совокупность всевозможных линейных комбинаций $A_0 Q_0 + \sum_{m,q=1}^{N} A_{mq} Q_{mq}$.

Теорема 1. *Симметризованный лапласиан Леви на $\mathfrak{Q}$ существует и $\Delta_C Q_{mq}(x) \in \mathfrak{L}_2(H)$.*

Доказательство. Для произвольного базиса $\{f_k\}_1^\infty$ в H, $f_k \in H_+$, согласно (5) имеем

$$\Phi_{2n,q}(x) = (2n!)^{-1/2} (\alpha_{2n,q}, \otimes x^{2n})_{\otimes H^{2n}} = (2n!)^{-1/2} \left[\frac{\nu_{2n,q} \ldots \nu_{2q} \{G(x)\}^n}{n!} + \right.$$

$$+ \frac{\nu_{2n,q} \ldots \nu_{4q} \{G x)\}^{n-1} (\widetilde{s}_{2q}, x \otimes x)_{H \otimes H}}{(n-1)!} + \ldots + \nu_{2n,q} G(x) (\widetilde{s}_{2n-2,q},$$

$$\left. \otimes x^{2n-2})_{\otimes H^{2n-2}} + (\widetilde{s}_{2n,q}, \otimes x^{2n})_{\otimes H^{2n}} \right],$$

$$G(x) = \sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T) f_j, f_k)_H (x, f_j)_H (x, f_k)_H.$$

Для функций $Z_{l\nu}(x) = G(x)^l (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu}$

$$(Z'_{l\nu}(x), h)_H = 2lG(x)^{l-1} (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi(T) x, f_k)_H (h, f_k)_H +$$

$$+ \nu G(x)^l (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-1} \otimes h)_{\otimes H^\nu},$$

$$(Z''_{l\nu}(x) h, h)_H = 4l(l-1) G(x)^{l-2} (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T) x, f_k)_H (\chi(T) x, f_j)_H \times$$

$$\times (h, f_k)_H (h, f_j)_H + 2lG(x)^{l-1} (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T) f_j, f_k)_H (h, f_j)_H (h, f_k)_H +$$

$$+ 4l\nu G(x)^{l-1} (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-1} \otimes h)_{\otimes H^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi(T) x, f_k)_H (h, f_k)_H +$$

$$+ \nu(\nu-1) G(x)^l (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-2} \otimes h \otimes h)_{\otimes H^\nu}. \tag{6}$$

Согласно (1) $\Delta_C Z_{l\nu}(x) = -2lG(x)^{l-1} (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \mathfrak{M} p(x, h) + 4l(l-1) \times \times G(x)^{l-2} (\widetilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \mathfrak{M} q(x, h)$, где

$$p(x, h) = \sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T) f_j, f_k)_H (h, f_j)_H (h, f_k)_H - (x, h)_{H_+} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (\chi(T)x, f_k)_H (h, f_k)_H, \qquad q(x,h) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T)x, f_j)_H (\chi(T)x, f_k)_H (h, f_j)_H (h, f_k)_H.$$

Покажем, что последовательности $\mathfrak{M}_n p(x,h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [(\chi(T) f_i, f_i)_H - (T^2 x, f_i)_H (\chi(T)x, f_i)_H]$ и $\mathfrak{M}_n q(x,h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\chi(T)x, f_i)_H^2$, где $\mathfrak{M}_n \Phi(h)$ — среднее по n-мерной сфере, полученной пересечением $\|h\|_H^2 = 1$ и плоскости первых n векторов ортонормированного базиса, от сужения функции $\Phi(h)$ на эту плоскость, сходятся в $\mathfrak{L}_2(H)$. Действительно,

$$\int_H [\mathfrak{M}_n p(x,h)]^2 \mu(dx) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} [(T^{-1}\chi(T) f_k, T^{-1}\chi(T) f_j)_H (Tf_k, Tf_j)_H +$$

$$+ (\chi(T) f_k, f_j)_H^2] \text{ и для } m < n \int_H [\mathfrak{M}_n p(x,h) - \mathfrak{M}_m p(x,h)]^2 \mu(dx) =$$

$$= \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} (\chi^2(T) f_k, f_j)_{H_-} (f_k, f_j)_{H_+} - \frac{(n-m)}{n^2 m} \sum_{j,k=1}^{n} (\chi^2(T) f_k, f_j)_{H_-} (f_k,$$

$$f_j)_{H_+} + \frac{(n-m)}{nm^2} \sum_{j,k=1}^{n,m} (\chi^2(T) f_k, f_j)_{H_-} (f_k, f_j)_{H_+} - \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} (\chi^2(T) f_k,$$

$$f_j)_{H_-} (f_k, f_j)_{H_+} + \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} (\chi(T) f_k, f_j)_H^2 - \frac{(n-m)}{n^2 m} \sum_{j,k=1}^{n} (\chi(T) f_k, f_j)_H^2 +$$

$$+ \frac{(n-m)}{nm^2} \sum_{j,k=1}^{n,m} (\chi(T) f_k, f_j)_H^2 - \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} (\chi(T) f_k, f_j)_H^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Это следует из того, что

$$\frac{1}{n^3} \sum_{j,k=1}^{n} (T^{-2}\chi^2(T) f_k, f_j)_H (T^2 f_k, f_j)_H \leqslant \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (\chi^2(T) f_k, f_k)_H =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (P\chi^2(T) P f_k, f_k)_H = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (P\chi^2(T) P \varphi_k, \varphi_k)_H =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (\chi^2(T) e_{n_k}, e_{n_k})_H = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \chi^2(\lambda_{n_k}),$$

где P — ортопроектор на подпространство с базисом f_k, $k = 1, \ldots, n$, φ_h — собственные векторы оператора $P\chi^2(T) P$, $P\varphi_k = e_{n_k}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \chi^2(\lambda_{n_k}) = 0$

по лемме Кронекера, так как $\chi^2(\xi)$ — монотонная функция и, начиная с некоторого $k > N$, $\chi^2(\lambda_{n_k}) \leqslant \chi^2(\lambda_k) = k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi^2(\lambda_{n_k})}{k^3} < \infty$. Аналогично и $\frac{1}{n^3} \sum_{j,k=1}^{n} (\chi(T) f_k, f_j)_H^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Если $f_i = e_i$, то $\int_H [\mathfrak{M}_n p(x,h)]^2 \mu(dx) =$

$$= \int_H \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\,(1 - \lambda_k^2 (x, e_k)_H^2) \right]^2 \mu(dx) = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \text{ и } \|\mathfrak{M}\rho(x, h)\|_{\mathfrak{L}_2(H)} = 1.$$

Подобным образом получим и сходимость последовательности $\mathfrak{M}_n q(x, h)$ в $\mathfrak{L}_2(H)$, необходимо лишь учесть, что

$$\int_H [\mathfrak{M}_n q(x, h)]^2 \mu(dx) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| T^{-1} \chi(T) f_i \|_H^2 \right]^2 +$$

$$+ \frac{2}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} (T^{-1} \chi(T) f_i, T^{-1} \chi(T) f_k)_H^2.$$

Если $f_i = e_i$, то $\int_H [\mathfrak{M}_n q(x, h)]^2 \mu(dx) = \int_H \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k (x, e_k)_H^2 \right]^2 \mu(dx) =$

$$= \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda_k^2} \right]^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\lambda_k^4} \text{ и } \| \mathfrak{M} q(x, h) \|_{\mathfrak{L}_2(H)} = 0.$$

Таким же образом находим, что последовательности $G(x)^{l-1} (\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \mathfrak{M}_n p(x, h)$ и $G(x)^{l-2} (\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \mathfrak{M}_n q(x, h)$ сходятся в $\mathfrak{L}_2(H)$. Поэтому $\Delta_C \Phi_{2n,q}(x) \in \mathfrak{L}_2(H)$. Если $m = 2n + 1$, то аналогично имеем, что $\Delta_C \Phi_{2n+1,q}(x) \in \mathfrak{L}_2(H)$. Согласно (3) $\Delta_C Q_{mq}(x) \in \mathfrak{L}_2(H)$.

Определим оператор Δ_S в $\mathfrak{L}_2(H)$ со всюду плотной областью определения D_{Δ_S}, полагая $\Delta_S U = \Delta_C U$, $D_{\Delta_S} = \mathfrak{D}$.

Теорема 2. *Оператор Δ_S имеет положительное самосопряженное расширение в $\mathfrak{L}_2(H)$.*

Доказательство. Δ_S — симметрический оператор, поскольку D_{Δ_S} плотна в $\mathfrak{L}_2(H)$, а, интегрируя по частям, имеем $(\Delta_S U, V)_{\mathfrak{L}_2(H)} = (U, \Delta_S V)_{\mathfrak{L}_2(H)}$ $\forall U, V \in D_{\Delta_S}$. Оператор Δ_S — положителен. Как положительный оператор Δ_S допускает положительное самосопряженное расширение.

Покажем, что лапласиан Леви равен бесконечности на полиномах $Q_{mq}(x)$, $m = 2, 3, \ldots$; $q = 1, 2, \ldots$. В силу (6) и леммы 1 из [2]

$$\Delta Z_{l\nu}(x) = \mathfrak{M} \Big\{ 2lG(x)^{l-1} (\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} \sum_{i,k=1}^{\infty} (\chi(T) f_j, f_k)_H (h, f_j)_H (h, f_k)_H +$$

$$+ 4l(l-1) G(x)^{l-2} (\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^\nu)_{\otimes H^\nu} q(x, h) +$$

$$+ 4l\nu G(x)^{l-1} (\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-1} \otimes h)_{\otimes H^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi(T) x, f_k)_H (h, f_k)_H +$$

$$+ \nu(\nu-1) G(x)^l (\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-2} \otimes h \otimes h)_{\otimes H^\nu} \Big\}.$$

Но

$$\mathfrak{M}q(x, h) \in \mathfrak{L}_2(H), \mathfrak{M}\left\{(\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-1} \otimes h)_{\otimes H^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (\chi(T)x, f_k)_H (h, f_k)_H\right\} = 0,$$

$$\mathfrak{M}\{(\tilde{s}_{\nu q}, \otimes x^{\nu-2} \otimes h \otimes h)_{\otimes H^\nu}\} = 0,$$

а

$$\mathfrak{M}\left\{\sum_{j,k=1}^{\infty} (\chi(T) f_i, f_k)_H (h, f_j)_H (h, f_k)_H\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\chi(T) f_i, f_i)_H =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi(\lambda_{n_i}) = \infty,$$

поскольку $\chi(\lambda_{n_i}) \to \infty$ при $n_i \to \infty$, ибо $\chi(\lambda_i) = \sqrt{i} \to \infty$ при $i \to \infty$. Поэтому $\Delta\Phi_{2n,q}(x) = \infty$. Аналогично имеем, что $\Delta\Phi_{2n+1,q}(x) = \infty$. Согласно (3) равно бесконечности и $\Delta Q_{mq}(x)$.

3. Существенная самосопряженность.

Теорема 3. *Оператор Δ_S существенно самосопряжен в $\mathfrak{L}_2(H)$.*

Доказательство. Оператор $A = \Delta_S + E$, E — единичный оператор, имеет область определения $D_A = D_{\Delta_S}$ и положительно определен.

Его область значений R_A всюду плотна в $\mathfrak{L}_2(H)$. Действительно, R_A — всюду плотна в D_A, так как система $F_0 = AQ_0$, $F_{mq} = AQ_{mq}$, $m, q = 1, 2, \ldots$, полна в D_A: пусть $\exists U \in D_A$ $(U, F_0)_{\mathfrak{L}_2(H)} = 0$, $(U, F_{mq})_{\mathfrak{L}_2(H)} = 0$, $m, q = 1, 2, \ldots$, тогда $(U, F_{mq})_{\mathfrak{L}_2(H)} = (U, AQ_{mq})_{\mathfrak{L}_2(H)} = (AU, Q_{mq})_{\mathfrak{L}_2(H)} = 0$, $(AU, Q_0) = 0$, а отсюда, в силу полноты системы Q_0, Q_{mq}, $m, q = 1, 2, \ldots$, следует, что $AU = 0$, и поскольку $AU = 0$ лишь при $U = 0$, то $U = 0$. Но $D_A = \mathfrak{Q}$ и всюду плотна в $\mathfrak{L}_2(H)$, поэтому R_A всюду плотна в $\mathfrak{L}_2(H)$.

Как положительно определенный оператор со всюду плотной областью значений оператор A существенно самосопряжен. А тогда и оператор $\Delta_S = A - E$ существенно самосопряжен [8].

В заключение заметим, что операторы, подобные оператору Лапласа — Леви [2], порождаются и лапласианом Леви и введенным в [9—11] бесконечномерным эллиптическим дифференциальным выражением. Разумеется и существенно самосопряженные операторы порождаются не только симметризованным лапласианом Леви, но и введенным в [12] бесконечномерным симметризованным эллиптическим дифференциальным выражением.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа.— М.: Наука, 1967.— 510 с.
2. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные дифференциальные операторы Лапласа—Леви. Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 1, с. 69—79.
3. *Cameron R. H., Martin W. T.* The ortogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier—Hermite functionals.— Ann. Math., 1947, **48**, N 2, p. 385—392.
4. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 160 с.
5. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Интегрирование по частям по мерам в функциональном пространстве, I.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1977, вып. 17, с. 51—61.
6. *Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь.* Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.— М. : Наука, 1967.— 192 с.
7. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1956.— 606 с.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
9. *Феллер М. Н.* О бесконечномерных эллиптических операторах.— Докл. АН СССР, 1972, **205**, № 1, с. 36—39.
10. *Феллер М. Н.* О разрешимости бесконечномерных эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1974, **214**, № 1, с. 59—62.
11. *Феллер М. Н.* О разрешимости бесконечномерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами.— Мат. заметки, 1979, **25**, № 3, с. 419—424.
12. *Феллер М. Н.* О разрешимости бесконечномерных самосопряженных эллиптических уравнений.— Докл. АН СССР, 1975, **221**, № 5, с. 1046—1049.

Украинское научно-производственное деревообрабатывающее объединение

Поступила в редакцию 09.06.81