1983 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 35, № 2

УДК 517.9

Ю. В. Теплинский

Об инвариантных торах линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве m

В исследовании колебательных решений дифференциальных систем большую роль играют методы теории интегральных многообразий, в частности метод функции Грина задачи об инвариантных торах, развитый в работах [1, 2]. В последнее время отмеченный метод применялся для исследования дифференциальных систем различного вида, в том числе и счетных систем с конечным числом угловых переменных [3, 4].

В предлагаемой статье метод функции Грина применяется для построения инвариантных торов линейных систем дифференциальных уравнений общего вида в пространстве ограниченных числовых последовательностей, к рассмотрению которых приводит ряд задач теории нелинейных колебаний и теоретической физики.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dh/dt = P(\varphi)h + c(\varphi), \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$, $h = (h_1, h_2, \ldots)$, $a(\varphi)$, $C(\varphi)$ — 2π-периодические по φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ вектор-функции, $p(\varphi)$ — 2π-периодическая по φ_i бесконечная матрица. Договоримся в дальнейшем использовать следующие согласованные нормы матрицы $P = [p_{ij}]_1^\infty$ и вектора h: $\|P\| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |p_{ij}|$, $\|h\| = \sup\{|h_1|, |h_2|, \ldots\}$. Множество ограниченных 2π-периодических по φ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ функций и матриц, удовлетворяющих условию Липшица по φ на счетномерном кубе периодов Γ_∞, будем обозначать $C_{\mathrm{Lip}}(\Gamma_\infty)$.

При условии, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi} |p_{sj}(\varphi)| \leqslant p^0 = \mathrm{const} < \infty$, $s = 1, 2, \ldots,$ матрица $P(\varphi)$ — линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{m}$ ограниченных числовых последовательностей и зависящий от φ как от параметра. В работе [5] показано, что если

$$\|a(\varphi) - a(\bar\varphi)\| \leqslant \alpha \|\varphi - \bar\varphi\|, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0, \quad \|a(\varphi)\| \leqslant A < \infty, \tag{2}$$

где φ, $\bar\varphi \in \Phi = \{\varphi \in \mathbf{m}, \|\varphi\| \leqslant M\}$, то первое уравнение системы (1) имеет единственное решение в каждой точке $t_0 \in R = (-\infty, \infty)$, $\varphi_0 \in \Phi$, существующее при любом $t \in R$. Обозначим это решение $\varphi = \varphi_t(\varphi)$, $\varphi_\tau(\varphi) = \varphi$, где $\tau \in R$, $\varphi \in \Phi$ — произвольные постоянные.

Непрерывное отображение $h = u(\varphi)$ области $\Phi \subset \mathbf{m}$ в пространство $\mathbf{m}$, имеющее вид $h_i = u_i(\varphi)$, $i = 1, 2, \ldots,$ 2π-периодическое по φ_j, $j = 1, 2, \ldots,$ ограниченное по норме, назовем инвариантным тором системы уравнений (1), если справедливо равенство

$$du(\varphi_t(\varphi))/dt = P(\varphi_t(\varphi))\, u(\varphi_t(\varphi)) + c(\varphi_t(\varphi))$$

для всех $t \in R$ и любого решения $\varphi_t(\varphi)$ первого уравнения системы (1).

Теорема 1. *Пусть система уравнений (1) такова, что:*

1. $P(\varphi)$, $a(\varphi)$, $c(\varphi)$ *принадлежат пространству* $C_{\mathrm{Lip}}(\Gamma_\infty)$ *с коэффициентами соответственно* β, α, η.

2. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi \in \Phi} |p_{sj}(\varphi)| \leqslant p^0 < \infty$, $s = 1, 2, \dots$.

3. *Существует функция Грина задачи об инвариантных торах* $G_0(\tau, \varphi)$, *удовлетворяющая неравенству* $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant N \exp\{-\gamma|\tau|\}$, $\tau \in R$, N, $\gamma > 0$, *где* N, $\gamma = \mathrm{const}$, *не зависящие от* φ, τ.

Тогда для $\gamma/\alpha > \nu/(\nu+1)$ *у системы уравнений (1) будет существовать инвариантный тор* Γ, *удовлетворяющий условию Гельдера по* φ *с показателем* $\nu/(\nu+1)$, $\nu > 0$. *При* $\gamma > \alpha$ *этот тор липшицев.*

Доказательство. В условиях теоремы для системы уравнений

$$dh/dt = P(\varphi_t(\varphi))\, h + c(\varphi_t(\varphi)) \tag{3}$$

справедлива теорема единственности решения в области $\Phi \subset m$, $t \in R$, а также существует матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ однородной системы $dh/dt = P(\varphi_t(\varphi))h$ [4, 5]. Из единственности решения первого уравнения системы (1) следует, что $\varphi_t(\varphi_\tau(\varphi)) = \varphi_{t+\tau}(\varphi)$ при любых τ, $t \in R$, что приводит к справедливости равенства $\Omega_\tau^t(\varphi_z(\varphi)) = \Omega_{\tau+z}^{t+z}(\varphi)$, $z, t, \tau \in R$. Это позволяет сконструировать функцию Грина по аналогии с [1] и получить представление для инвариантного тора Γ системы уравнений (1):

$$h = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi)\, c(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau.$$

Поскольку $G_t(\tau, \varphi)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях системы уравнений (3), то

$$d/dt\,(G_t(\tau, \varphi) - G_t(\tau, \bar\varphi)) = P(\varphi_t(\varphi))\,(G_t(\tau, \varphi) - G_t(\tau, \bar\varphi)) + {}$$
$$+ [P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_t(\bar\varphi))]\, G_t(\tau, \bar\varphi)_0.$$

Отсюда следует равенство

$$G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(t_1, \varphi)\,[P(\varphi_{t_1}(\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(\bar\varphi))]\, G_{t_1}(\tau, \bar\varphi)\, dt_1.$$

Принимая во внимание липшицевость матрицы $P(\varphi)$, для всякого положительного ν имеем $\|P(\varphi) - P(\bar\varphi)\|^\nu \leqslant \beta^\nu \|\varphi - \bar\varphi\|^\nu$, $\beta > 0$. Так как $\|P(\varphi) - P(\bar\varphi)\| \leqslant 2p^0$, то

$$\|P(\varphi) - P(\bar\varphi)\| \leqslant K \|\varphi - \bar\varphi\|^{\nu/(\nu+1)}, \quad K = (2p^0\beta^\nu)^{1/(\nu+1)}. \tag{4}$$

Аналогично получаем оценку

$$\|c(\varphi) - c(\bar\varphi)\| \quad K_1 \|\varphi - \bar\varphi\|^{\nu/(\nu+1)}, \quad K_1 = (2C\eta^\nu)^{1/(\nu+1)}, \quad \|c(\varphi)\| \leqslant C < \infty. \tag{5}$$

Из условия (2) следует, что

$$\|\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\bar\varphi)\| \leqslant \exp\{\alpha|t|\}\, \|\varphi - \bar\varphi\|, \quad t \in R. \tag{6}$$

Учитывая соотношения (4), (5), (6), имеем

$$\|u(\varphi) - u(\bar\varphi)\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \bar\varphi)\|\, \|c(\varphi_\tau(\varphi)) - c(\varphi_\tau(\bar\varphi))\|\, d\tau + {}$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar\varphi)\|\, \|c(\varphi_\tau(\varphi))\|\, d\tau \leqslant K^{(1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{(-\gamma + (\alpha\nu)/$$
$$(\nu+1)|t_1|\}\, \|\varphi - \bar\varphi\|^{\nu/(\nu+1)} dt_1 + K^{(2)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{(-\gamma + \alpha\nu/(\nu+1)|t_1|\} \times$$
$$\times \|\varphi - \bar\varphi\|^{\nu/(\nu+1)} dt_1 \leqslant K^{(0)} \|\varphi - \bar\varphi\|^{\nu/\nu+1}, \quad K^{(0)} = \mathrm{const} < \infty,$$

где $\nu > 0$ выбирается из условия $\gamma/\alpha > \nu/(\nu+1)$. Если $\gamma > \alpha$, то оценка разности $u(\overline{\varphi}) - u(\varphi)$ приводит к неравенству $\| u(\varphi) - u(\overline{\varphi}) \| \leqslant K \| \varphi - \overline{\varphi} \|$, что заканчивает доказательство теоремы.

Наряду с системой уравнений (3) рассмотрим m-укороченную по φ систему вида

$$dh/dt = P(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))\, h + c(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi})), \tag{7}$$

где $\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, 0, 0, \ldots)$, $\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}) = \{\varphi_1(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, 0, 0, \ldots), \ldots\}$. Проведя над системой уравнений (7) укорочение по переменной h до k-го порядка, получим m, k-укороченную систему вида

$$d\xi_s^{(k)}/dt = \sum_{i=1}^{k} p_{si}(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))\, \xi_i^{(k)} + c_s(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi})), \quad s = \overline{1, k}, \tag{8}$$

которая конечномерна. Матрицант и инвариантный тор системы уравнений (7) обозначим символами $\Omega_\tau^t(\overset{(m)}{\varphi})$, $\Gamma^{(m)}$, а системы (8) — соответственно $\overset{(k)}{\Omega}{}_\tau^t(\overset{(m)}{\varphi})$, $\Gamma_{(k)}^{(m)}$.

Говорят, что функция $f(\varphi)$ удовлетворяет усиленным условиям Коши — Липшица по φ с коэффициентом $\varepsilon(m)$, если

$$\| f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi'_{m+1}, \ldots) - f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi''_{m+1}, \ldots) \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(m) \sup \{ |\varphi'_{m+1} - \varphi''_{m+1}|, \ldots \},$$

причем $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

В пространстве $C_{\mathrm{Lip}}(\Gamma_\infty)$ выделим подпространство $C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(\Gamma_\infty)$, элементы которого удовлетворяют усиленным условиям Коши — Липшица по φ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что*:

1. $P(\varphi)$, $a(\varphi)$, $c(\varphi)$ *принадлежат пространству* $C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(\Gamma_\infty)$ *с коэффициентами соответственно* $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$, $\delta(m)$.

2. $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi \in \Phi} |p_{sj}(\varphi)| \leqslant \sigma(n)$, $\sigma(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, $s = 1, 2, \ldots$.

3. $\| \overset{(k)}{\Omega}{}_\tau^t(\varphi) \| \leqslant N \exp\{-\gamma(t-\tau)\}$, N, $\gamma > 0$, $t > \tau$, *причем* γ *и* N *не зависят от* k *и* φ.

4. $\gamma > \alpha(0) + 1$.

Тогда система уравнений (1) *будет иметь инвариантный тор* Γ, *принадлежащий пространству* $C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(\Gamma_\infty)$ *и представимый в виде* $\Gamma = \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ m\to\infty}} \Gamma_{(k)}^{(m)}$.

Доказательство. Инвариантный тор $\Gamma_{(k)}^{(m)}$ системы уравнений (8) существует и имеет вид

$$u_{(k)}(\overset{(m)}{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{(k)}(0, \tau, \overset{(m)}{\varphi})\, \overset{(k)}{c}(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))\, d\tau,$$

где $\overset{(k)}{c}(\varphi) = \{c_1(\varphi), \ldots, c_k(\varphi)\}$ Учитывая условие 3 сформулированной теоремы, функции Грина задачи об инвариантных торах систем уравнений (7) и (8) записываем соответственно в виде

$$G_0(\tau, \overset{(m)}{\varphi}) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\overset{(m)}{\varphi}) & \text{при } \tau < 0; \\ 0 & \text{при } \tau > 0, \end{cases} \qquad G_{(k)}(0, \tau, \overset{(m)}{\varphi}) = \begin{cases} \overset{(k)}{\Omega}{}_\tau^0 & \text{при } \tau < 0, \\ 0 & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Условие 2 теоремы приводит к тому, что правая часть системы уравнений (7) удовлетворяет условию

$$\left|\sum_{l=n+1}^{\infty} p_{sl}(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))\, h'_l - \sum_{l=n+1}^{\infty} p_{sl}(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))\, h''_l\right| \leqslant K\sigma(n) \sup\{|h'_{n+1} - h''_{n+1}|, \ldots\},$$

$s = 1, 2, \ldots$, где $\sigma(n) \to 0$ при $n \to \infty$, а $(h_1, \ldots, h_n, h'_{n+1}, \ldots)$, $(h_1, \ldots, h_n, h''_{n+1}, \ldots)$ — точки, принадлежащие пространству $\mathbf{m}$.

В таком случае, применяя теорему об укорочении [5], имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_s^{(k)}(t, \overset{(m)}{\varphi}) = h_s(t, \overset{(m)}{\varphi})$, $s = 1, 2, \ldots$, где $h(t, \overset{(m)}{\varphi})$ — решение системы уравнений (7). Тогда покоординатно будет выполняться равенство

$$\lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\Omega}{}^t_\tau(\overset{(m)}{\varphi}) = \Omega^t_\tau(\overset{(m)}{\varphi}). \tag{9}$$

Поскольку $\overset{(k)}{\Omega}{}^t_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, \overset{(k)}{c}(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))$ — решение системы уравнений (8) с начальными условиями $t = \tau$, $c_1(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))$, $c_2(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi})), \ldots, c_k(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))$, а вектор-функция $\Omega^t_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, c(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))$ — решение системы (7) с начальными условиями $t = \tau$, $c_1(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))$, $c_2(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi})), \ldots, c_k(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi})), \ldots$, можно еще раз использовать теорему об укорочении, т. е. убедиться в справедливости соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\Omega}{}^t_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, \overset{(k)}{c}(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi})) = \Omega^t_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, c(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi})).$$

Принимая во внимание интегральное представление инвариантных торов систем уравнений (7) и (8), а также теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \overset{(k)}{\Omega}{}^0_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, \overset{(k)}{c}(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, c(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))\, d\tau,$$

$$\Gamma^{(m)} = \lim_{k\to\infty} \Gamma^{(m)}_{(k)}, \tag{10}$$

где предельный переход осуществлен покоординатно.

Если в равенстве (9) вместо $\overset{(m)}{\varphi}$ поставить φ, то оно остается справедливым, а это значит, что для матрицанта $\Omega^t_\tau(\varphi)$ системы уравнений (3) имеет место оценка

$$\|\Omega^t_\tau(\varphi)\| \leqslant N \exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \quad \gamma,\ N > 0, \quad \tau < t,$$

приводящая к соотношению

$$\Omega^0_\tau(\varphi) - \Omega^0_\tau(\overset{(m)}{\varphi}) = \int_\tau^0 \Omega^0_{t_1}(\varphi)\, [P(\varphi_{t_1}(\varphi)) - P(\varphi_{t_1}(\overset{(m)}{\varphi}))]\, \Omega^{t_1}_\tau(\overset{(m)}{\varphi})\, dt_1. \tag{11}$$

Введем обозначение $\bar{\varphi}_t(\varphi) = \{\varphi_1(t, \varphi), \ldots, \varphi_m(t, \varphi), 0, 0, \ldots\}$, $\bar{\bar{\varphi}}_t(\varphi) = \{0, 0, \ldots, 0, \varphi_{m+1}(t, \varphi), \ldots\}$ и оценим разность $L = P(\varphi_t(\varphi)) - P(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))$. Имеем:

$$\|L\| \leqslant \|P(\varphi_t(\varphi)) - P(\bar{\varphi}_t(\varphi) + \bar{\bar{\varphi}}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\| + \|P(\bar{\varphi}_t(\varphi) + \bar{\bar{\varphi}}_t(\overset{(m)}{\varphi})) - P(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(m) \exp\{\alpha(0)|t|\} \cdot \Delta_m\varphi + \varepsilon(0)\, \|\overline{\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\overset{(m)}{\varphi})}\|,$$

$$\Delta_m\varphi = \sup\{|\varphi_{m+1}|, |\varphi_{m+2}|, \ldots\}.$$

Далее находим, что

$$V(t)=\|\overline{\varphi_t(\varphi)-\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi})}\|\leqslant\int_\tau^t\{\|a(\varphi_s(\varphi))-a(\overline{\varphi}_s(\varphi)+\overset{=}{\varphi}_s(\overset{(m)}{\varphi}))\|+\|a(\overline{\varphi}_s(\varphi)+$$

$$+\overset{=}{\varphi}_s(\overset{(m)}{\varphi}))-a(\varphi_s(\overset{(m)}{\varphi}))\|\}\,ds\leqslant\int_\tau^t\{\alpha(m)\|\varphi_t(\varphi)-\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi})\|+$$

$$+\alpha(0)\|\overline{\varphi_s(\varphi)-\varphi_s(\overset{(m)}{\varphi})}\|\}\,ds.$$

Согласно лемме Гронуолла — Беллмана [6] справедливо неравенство $\|\varphi_t(\varphi)-\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi})\|\leqslant\exp\{\alpha(0)|t-\tau|\}\Delta_m\varphi$. Отсюда для $V(t)$ получаем оценки

$$V(t)\leqslant\int_\tau^t\{\alpha(0)V(s)+\alpha(m)\exp\{\alpha(0)|s-\tau|\}\Delta_m\varphi\}\,ds. \tag{12}$$

В таком случае при $t>\tau$ нетрудно убедиться в справедливости неравенства $V(t)\leqslant\alpha(m)\exp\{\alpha(0)(t-\tau)\}(t-\tau)\Delta_m\varphi$. Тогда

$$\|L\|\leqslant\varepsilon(m)\exp\{\alpha(0)|t|\}\Delta_m\varphi+\varepsilon(0)\alpha(m)\exp\{(\alpha(0)+1)\times$$

$$\times(t-\tau)\}\Delta_m\varphi,\quad t>\tau.$$

Воспользовавшись представлением (11), получаем оценку

$$\|\Omega_\tau^0(\varphi)=\Omega_\tau^0(\overset{(m)}{\varphi})\|\leqslant\left[\frac{N\varepsilon(m)}{\alpha(0)}\exp\{(\gamma-\alpha(0))\tau\}+\right.$$

$$\left.+\frac{N\varepsilon(0)\alpha(m)}{\alpha(0)+1}\exp\{(\gamma-\alpha(0)-1)\tau\}\right]\Delta_m\varphi,$$

которая при $\gamma>\alpha(0)+1$ приводит к неравенству $\|\Omega_\tau^0(\varphi)-\Omega_\tau^0(\overset{(m)}{\varphi})\|\leqslant$ $\leqslant\zeta(m)M$, где $\zeta(m)=N\left(\frac{\varepsilon(m)}{\alpha(0)}+\frac{\varepsilon(0)\alpha(m)}{\alpha(0)+1}\right)$ стремится к нулю при $m\to$ $\to\infty$. Последнее означает, что равномерно по норме $\lim\limits_{m\to\infty}\Omega_\tau^0(\overset{(m)}{\varphi})=\Omega_\tau^0(\varphi)$.

Учитывая, что функция $c(\varphi)\in C_{\widetilde{Lip}}(\Gamma_\infty)$ с коэффициентом $\delta(m)$, и повторяя предыдущие рассуждения, получаем оценку

$$\|c(\varphi_t(\varphi))-c(\varphi_t(\overset{(m)}{\varphi}))\|\leqslant[\exp\{\alpha(0)|t|\}\delta(m)+\delta(0)\alpha(m)\exp\{(\alpha(0)+$$

$$+1)(t-\tau)\}]\Delta_m\varphi,\quad t>\tau.$$

Пусть $\|c(\varphi)\|\leqslant C=\mathrm{const}<\infty$. Поскольку разность $u(\varphi)=u(\overset{(m)}{\varphi})$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(\varphi)-u(\overset{(m)}{\varphi})\|\leqslant\int_{-\infty}^0\{\|\Omega_\tau^0(\varphi)-\Omega_\tau^0(\overset{(m)}{\varphi})\|\,\|c(\varphi_\tau(\varphi))\|\}\,d\tau+\int_{-\infty}^0\|\Omega_\tau^0(\overset{(m)}{\varphi})\|\times$$

$$\times\|c(\varphi_\tau(\varphi))-c(\varphi_\tau(\overset{(m)}{\varphi}))\|\,d\tau\leqslant NC\int_{-\infty}^0\left[\frac{\varepsilon(m)}{\alpha(0)}\exp\{(\gamma-\alpha(0))\tau\}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon(0)\alpha(m)}{\alpha(0)+1}\exp\{[\gamma-(\alpha(0)+1)]\tau\}\right]\Delta_m\varphi d\tau+\int_{-\infty}^0 N\exp\{\gamma\tau\}[\delta(m)\exp\{\alpha(0)\times$$

$$\times|\tau|\}+\delta(0)\alpha(m)\exp\{(\alpha(0)+1)(\tau-\tau)\}]\Delta_m\varphi d\tau\leqslant K(m)\Delta_m\varphi, \tag{13}$$

где

$$K(m) = NC\left(\frac{\varepsilon(m)}{\alpha(0)(\gamma-\alpha(0))} + \frac{\varepsilon(0)\,\alpha(m)}{(\alpha(0)+1)(\gamma-\alpha(0)-1)}\right) + $$
$$+ N\left(\frac{\delta(m)}{\gamma-\alpha(0)} + \frac{\delta(0)\,\alpha(m)}{\gamma}\right), \qquad (14)$$

$\Delta_m\varphi \leqslant M$, причем $K(m) \to 0$ при $m \to \infty$, то равномерно по φ имеет место предельный переход $\lim\limits_{m\to\infty} \Gamma^{(m)} = \Gamma$. Объединяя последнее равенство с соотношением (10), получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \Gamma_{(k)}^{(m)} = \Gamma.$$

Незначительно перестроив доказательство, нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \Gamma_{(k)}^{(m)} = \Gamma$, что говорит о коммутативности повторного предела по k и m.

В заключение покажем, что инвариантный тор системы (1) принадлежит пространству $C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(\Gamma_\infty)$. Действительно, заменяя везде, начиная с равенства (11), φ на $\varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi'_{m+1}, \dots)$, а $\overset{(m)}{\varphi}$ — на $\varphi'' = (\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi''_{m+1}, \dots)$, приходим к оценке $\| u(\varphi') - u(\varphi'') \| \leqslant K(m) \cdot \Delta_m\varphi$, где $K(m)$ имеет вид (14), а $\Delta_m\varphi = \sup\{ | \varphi'_{m+1} - \varphi''_{m+1} |, \dots\}$. Последнее неравенство заканчивает доказательство теоремы.

Замечание. В случае конечномерного вектора h и счетномерного φ доказанная теорема дает результат для конечномерной системы уравнений, зависящей от счетного числа параметров.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. Математика, 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
2. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 3, с. 350—361.
3. *Теплинский Ю. В.* О существовании инвариантного тороидального многообразия счетной системы дифференциальных уравнений с мгновенными изменениями.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 6, с. 835—841.
4. *Теплинский Ю. В.* Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 9, с. 796—800.
5. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений.— Изв. АН КазССР. Сер. Математика и механика, **11** 1959, вып. 7, с. 52—71.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Каменец-Подольский
педагогический институт

Поступила в редакцию
12.06.80