1983 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 35, № 2

УДК 517.95

Н. А. Сотниченко, В. П. Яковец

Асимптотическое интегрирование некоторых систем линейных уравнений в частных производных

1. В настоящей работе исследуется вопрос о построении общего асимптотического в смысле Крылова — Боголюбова — Митропольского [1] решения для системы уравнений вида

$$A(\sigma, \varepsilon) L^2 u + \varepsilon C(\sigma, \varepsilon\ Lu + B(\sigma, \varepsilon) u = p(\sigma, \varepsilon) e^{i\theta(x,\varepsilon)}, \tag{1}$$

где $u(x, \varepsilon)$, $p(\sigma, \varepsilon)$ — n-мерные вектор-функции, $A(\sigma, \varepsilon)$, $B(\sigma, \varepsilon)$, $C(\sigma, \varepsilon)$ — вещественные $(n \times n)$-матрицы, $\theta(x, \varepsilon)$ — скалярная функция, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\sigma = \varepsilon^{p/q} x = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, p, q — взаимно простые числа, L — дифференциальный оператор:

$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad L^2 u = L(Lu).$$

Предполагается, что вектор-функция $p(\sigma, \varepsilon)$ и матрицы $A(\sigma, \varepsilon)$, $B(\sigma, \varepsilon)$, $C(\sigma, \varepsilon)$ в области $\Gamma(|\sigma_i| \leqslant a_i)$ допускают разложения

$$\begin{gathered} A(\sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\sigma) \varepsilon^k, \quad B(\sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\sigma) \varepsilon^k, \\ C(\sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\sigma) \varepsilon^k, \quad p(\sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\sigma) \varepsilon^k, \end{gathered} \tag{2}$$

причем $\det A_0(\sigma) \neq 0\ \forall \sigma \in \Gamma$.

Построение асимптотических решений системы (1) существенно зависит от поведения корней характеристического уравнения

$$\det \| B_0(\sigma) - \omega A_0(\sigma) \| = 0. \tag{3}$$

Случай простых корней уравнения (3) рассматривался в [2]. Мы рассмотрим более сложный случай, когда уравнение (3) имеет кратные корни, которым отвечают элементарные делители той же кратности. При этом, не умаляя общности, будем считать, что это уравнение имеет лишь один корень $\omega(\sigma)$ кратности n и ему отвечает один элементарный делитель той же кратности $\forall \sigma \in \Gamma$, так как при наличии нескольких корней мы придем к рассматриваемому случаю с помощью теоремы о расщеплении, доказанной в [3].

Кроме того, допустим, что $L\theta(x, \varepsilon) = k(\sigma)$ и будем рассматривать два случая: 1) нерезонансный, когда $k^2(\sigma) \neq \omega(\sigma)\ \forall \sigma \in \Gamma$; 2) резонансный, когда $k^2(\sigma) \equiv \omega(\sigma)$ в области Γ.

Для систем уравнений в частных производных такая задача рассматривается впервые. Для ее решения мы используем метод, разработанный в [4, 5]. Отметим, что хотя аналогичные системы обыкновенных дифференциальных уравнений изучались в [4, 6], однако такой случай поведения корней характеристического уравнения для них не рассматривался. Более того, мы не исключаем из рассмотрения так называемый «критический» случай [7], который также не исследовался даже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений такого вида.

2. Приведем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Как известно [8], при наших предположениях матрица $B_0(\sigma)$ имеет одну жорданову цепочку векторов относительно матрицы $A_0(\sigma)$, состоящую из одного собственного вектора $\varphi(\sigma)=\varphi_1(\sigma)$ и $(n-1)$ присоединенных векторов $\varphi_i(\sigma)$, $i=\overline{2, n}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$(B_0-\omega A_0)\varphi_1=0; \tag{4}$$

$$(B_0-\omega A_0)\varphi_i=A_0\varphi_{i-1},\ i=\overline{2, n} \tag{5}$$

(уравнение $(B_0-\omega A_0)z=A_0\varphi_n$ неразрешимо).

Из соотношений (5) присоединенные векторы $\varphi_i(\sigma)$, $i=\overline{2, n}$, определяются неоднозначно. Следуя [9], мы определим их следующим образом:

$$\varphi_i=HA_0\varphi_{i-1},\ i=\overline{2, n},$$

где $H(\sigma)$ — обобщенно обратная матрица к матрице $B_0-\omega A_0$. Отсюда находим

$$\varphi_i=(HA_0)^{i-1}\varphi,\quad i=\overline{1, n}. \tag{6}$$

Пусть $\psi(\sigma)$ — элемент нуль-пространства матрицы $(B_0-\omega A_0)^*$, сопряженной матрице $B_0-\omega A_0$, который мы выберем так, чтобы выполнялось соотношение

$$(A_0\varphi_n, \psi)=(A_0(HA_0)^{n-1}\varphi, \psi)=1\ \ \forall\sigma\in\Gamma \tag{7}$$

(символ (,) означает скалярное произведение). Тогда, в силу разрешимости уравнений (5),

$$(A_0(HA_0)^{i-1}\varphi, \psi)=0,\ i=\overline{1, n-1},\ \forall\sigma\in\Gamma. \tag{8}$$

Кроме того, исходя из свойств обобщенно обратной матрицы (см. [8]), имеем

$$(HA_0)^{n+i}=0,\ i=0, 1, \dots. \tag{9}$$

3. Пусть $\omega(\sigma)\neq 0\ \forall\sigma\in\Gamma$. Наряду с системой (1) рассмотрим однородную систему

$$A(\sigma, \varepsilon)L^2u+\varepsilon C(\sigma, \varepsilon)Lu+B(\sigma, \varepsilon)u=0. \tag{10}$$

Для этой системы справедлива такая теорема.

Теорема 1. *Если матрицы* $A_k(\sigma)$, $B_k(\sigma)$, $C_k(\sigma)$, $k=0, 1, \dots$, *из разложений* (2) *голоморфны в области* Γ *и выполняются условия*

$$(B_1\varphi, \psi)-\omega(A_1\varphi, \psi)+\sqrt{-\omega}(C_0\varphi, \psi)\neq 0,\ \textit{если}\ p>q, \tag{11}$$

$$(B_1\varphi, \psi)-\omega(A_1\varphi, \psi)+\sqrt{-\omega}(C_0\varphi, \psi)+2\sqrt{-\omega}(A_0L_\sigma\varphi, \psi)\neq 0,\ \textit{если},\ p=q, \tag{12}$$

$$(A_0L_\sigma\varphi, \psi)\neq 0,\ \textit{если}\ p<q, \tag{13}$$

при всех σ *из* Γ, *то система* (10) *имеет* $2n$ *различных формальных решений вида*

$$u(x, \varepsilon)=v(\sigma, \mu)y(\sigma, \mu),\ Ly=\lambda(\sigma, \mu)y, \tag{14}$$

где вектор-функция $v(\sigma, \mu)$ *и функция* $\lambda(\sigma, \mu)$ *представляются формальными разложениями*

$$v(\sigma, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(\sigma)\mu^k; \tag{15}$$

$$\lambda(\sigma, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(\sigma)\mu^k,\quad \mu=\varepsilon^{\frac{1}{qn}}. \tag{16}$$

Доказательство. Подставив (14) в систему (10) и приравняв в полученном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях μ с учетом разложений (2), (15), (16), приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$(B_0 + \lambda_0^2 A_0)\, v_0 = 0, \tag{17}$$

$$(B_0 + \lambda_0^2 A_0)\, v_s = b_s, \ s = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где

$$b_s(\sigma) = -\sum_{i=0}^{s-1} \alpha(s-i, 2)\, A_0 v_i - \Omega_s, \tag{19}$$

$$\Omega_s = \sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{qn}\right]} \sum_{i=0}^{s-nqk} \sum_{j=0}^{s-nqk-i} \lambda_i \lambda_j A_k v_{s-nqk-i-j} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{s}{nq}\right]} B_i v_{s-nqi} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-pn} \sum_{j=0}^{\left[\frac{s-pn-i}{qn}\right]} L_\sigma \lambda_i A_j v_{s-pn-i-nqj} + 2 \sum_{i=0}^{s-pn} \sum_{j=0}^{\left[\frac{s-pn-i}{qn}\right]} \lambda_i A_j L_\sigma v_{s-pn-i-nqj} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-qn} \sum_{j=0}^{\left[\frac{s-qn-i}{qn}\right]} \lambda_i C_j v_{s-qn-i-nqj} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s-(p+q)n}{nq}\right]} C_i L_\sigma v_{s-(p+q)n-nqi} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{s-2pn}{nq}\right]} A_i L_\sigma^2 v_{s-2pn-nqi}, \ s = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

$\Big($$[\xi]$ — целая часть числа ξ, $L_\sigma = \dfrac{\partial}{\partial \sigma_1} + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial \sigma_m}$, $\alpha(k, p) = \sum\limits_{\substack{i_1 + \ldots + i_p = k \\ i_s = 0, 1, \ldots}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots$ $\ldots \lambda_{i_p}$, где суммирование ведется по всем наборам из p целых неотрицательных чисел i_s, сумма которых равна $k$$\Big)$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что из этой системы можно последовательно определить все коэффициенты разложений (15), (16).

Уравнение (17) будет иметь нетривиальное решение только в том случае, если

$$\lambda_0(\sigma) = \sqrt{-\omega(\sigma)}. \tag{21}$$

Тогда

$$v_0(\sigma) = \varphi(\sigma). \tag{22}$$

Уравнения (18) будут разрешимы тогда и только тогда, если будут выполняться условия

$$(b_s(\sigma), \psi(\sigma)) = 0 \ \forall \sigma \in \Gamma, \ s = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

При выполнении этих условий

$$v_s(\sigma) = H(\sigma)\, b_s(\sigma) + c_s(\sigma)\, \varphi(\sigma), \ s = 1, 2, \ldots,$$

где $c_s(\sigma)$ — произвольные голоморфные функции. Положив для определенности $c_s(\sigma) \equiv 0$, $s = 1, 2, \ldots$, найдем

$$v_s(\sigma) = H(\sigma)\, b_s(\sigma). \tag{24}$$

Условия (23) мы используем для определения функций $\lambda_k(\sigma)$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $p < q$. Из (19), учитывая (24), найдем

$$b_1 = -2\lambda_0 \lambda_1 \varphi,$$

$$b_2 = -(\lambda_1^2 + 2\lambda_0 \lambda_2)\, A_0 \varphi + 4\lambda_0^2 \lambda_1^2 A_0 H A_0 \varphi,$$

$$b_3 = -(2\lambda_0 \lambda_3 + 2\lambda_1 \lambda_2)\, A_0 \varphi + (8\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 + 4\lambda_0 \lambda_1^3)\, A_0 H A_0 \varphi - 8\lambda_0^3 \lambda_1^3 A_0 (H A_0)^2 \varphi,$$

. . . .

Исходя из результатов работы [10], методом математической индукции можно доказать, что

$$b_s = \sum_{i=1}^{s} (-1)^i \beta(s, i) A_0 (HA_0)^{i-1} \varphi, \text{ если } s < pn; \tag{25}$$

$$b_{np+k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \beta(np+k, i) A_0 (HA_0)^{i-1} \varphi + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} (-1)^{j+1} \beta(k-i, j) \times$$

$$\times (A_0 H)^j \Omega_{np+i} - \Omega_{np+k}, \ k = 0, 1, \dots, \tag{26}$$

где

$$\beta(k, p) = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=k \\ i_s \in N}} \prod_{s=1}^{p} \alpha(i_s, 2) \tag{27}$$

(суммирование ведется по всем наборам из p натуральных чисел, сумма которых равна k).

Из (25) и (8) следует, что при $s < n$ условия (23) выполняются. При $s = n$, согласно (7), будем иметь

$$(b_n, \psi) = (-1)^n \beta(n, n) = (-1)^n \alpha^n (1, 2) = (-1)^n (2\lambda_0 \lambda_1)^n = 0, \tag{28}$$

откуда следует, что $\lambda_1(\sigma) = 0 \ \forall \sigma \in \Gamma$. Теперь при $n < s < 2n$ условия (23) также будут выполняться, а при $s = 2n$ получим

$$(b_{2n}, \psi) = (-1)^n \beta(2n, n) = (-1)^n \alpha^n (2, 2) = (-1)^n (2\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1^2)^n =$$

$$= (-1)^n (2\lambda_0 \lambda_2)^n = 0,$$

откуда следует, что $\lambda_2(\sigma) = 0$. Рассуждая так и далее, приходим к выводу, что все

$$\lambda_i(\sigma) = 0, \ i = \overline{1, p-1}. \tag{29}$$

Положим в (26) $k = 0$. Тогда согласно (20), (22)

$$b_{np} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \beta(np, i) A_0 (HA_0)^{i-1} \varphi - L_\sigma \lambda_0 A_0 \varphi - 2\lambda_0 A_0 L_\sigma \varphi, \tag{30}$$

и условие разрешимости запишется в виде $(-1)^n \beta(np, n) - 2\lambda_0 (A_0 L_\sigma \varphi, \psi) = 0$, откуда, учитывая (27), (29), (13), найдем n различных функций

$$\lambda_p(\sigma) = \sqrt[n]{(-1)^n \frac{(A_0 L_\sigma \varphi, \psi)}{2^{n-1} \lambda_0^{n-1}}}. \tag{31}$$

Определив $\lambda_i(\sigma)$, $i = \overline{1, p}$, по формуле (24) найдем вектор-функции $v_i(\sigma)$ при $i = \overline{1, p}$.

Предположим, что известны все функции $\lambda_{p+i}(\sigma)$ и вектор-функции $v_{p+i}(\sigma)$ при $i < k$. Покажем, что тогда можно однозначно определить $\lambda_{p+k}(\sigma)$ и $v_{p+k}(\sigma)$.

Действительно, записав условие (23) при $s = np + k$, получим

$$(-1)^n \beta(np+k, n) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} (-1)^{j+1} \beta(k-i, j) ((A_0 H)^j \Omega_{i+np}, \psi) -$$

$$- (\Omega_{k+np}, \psi) = 0. \tag{32}$$

На основании (27), (29) $\beta(np+k, n) = n 2^n \lambda_0^n \lambda_p^{n-1} \lambda_{k+p} + \bar{\beta}(np+k, n)$, где $\bar{\beta}(np+k, n) = \sum\limits_{\substack{i_1+\dots+i_n=np+k \\ i_s < p+k}} \prod\limits_{s=1}^{n} \alpha(i_s, 2) + n(2\lambda_0\lambda_p)^{n-1} \sum\limits_{i=p}^{k} \lambda_i \lambda_{p+k-i}$ — уже известная функция в силу (29) и предположений индукции. Тогда, обозначив

$$g_k(\sigma) = -\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}(-1)^{j+1}\beta(k-j,\, i)\,((A_0H)^j\,\Omega_{np+i},\, \psi) + (\Omega_{np+k},\, \psi) -$$

$$-(-1)^n\,\tilde{\beta}(np+k,\, n),$$

из равенства (32) найдем

$$\lambda_{p+k}(\sigma) = (-1)^n\,\frac{g_k(\sigma)}{n2^n\lambda_0^n(\sigma)\,\lambda_p^{n-1}(\sigma)}\,, \tag{33}$$

где $g_k(\sigma)$ — известная функция. Определив $\lambda_{p+k}(\sigma)$, из (24) найдем $v_{p+k}(\sigma)$.

Существование производных, которые входят в рекуррентные формулы (24), (33), обеспечивается голоморфностью матриц $A_k(\sigma)$, $B_k(\sigma)$, $C_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots$, и собственного значения $\omega(\sigma)$. Голоморфность же собственного значения следует из теоремы о голоморфности преобразующей матрицы, доказанной в [8].

Точно так же теорема доказывается и в случае $p \geqslant q$.

Таким образом, мы построили $2n$ различных решений системы (10). Можно показать, что эти решения линейно независимы при достаточно малых ε. Следовательно, объединив их в две $(n \times n)$-матрицы $U_1(x, \varepsilon)$ и $U_2(x, \varepsilon)$, согласно [11] построим общее формальное решение системы (10):

$$u(x, \varepsilon) = U_1(x, \varepsilon)\,c_1(x_2 - x_1, \ldots, x_m - x_1) + U_2(x, \varepsilon)\,c_2(x_2 - x_1, \ldots, x_m - x_1), \tag{34}$$

где c_1, c_2 — произвольные голоморфные вектор-функции.

4. Для неоднородной системы (1) в нерезонансном случае справедлива такая теорема

Теорема 2. *Если матрицы $A_k(\sigma)$, $B_k(\sigma)$, $C_k(\sigma)$, векторы $p_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots$, и функция $k(\sigma)$ голоморфны в области Γ, то система уравнений (1) имеет в нерезонансном случае частное формальное решение вида*

$$u(x, \varepsilon) = v(\sigma, \mu)\,e^{i\theta(x,\varepsilon)}, \tag{35}$$

где вектор $v(\sigma, \mu)$ представляется формальным разложением (15), *в котором $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме 11.2 из [4].

В резонансном случае имеет место такая теорема.

Теорема 3. *Если вектор-функции $p_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots$, и функция $k(\sigma)$ голоморфны в области Γ и выполняются условия теоремы 1, то в «резонансном» случае система уравнений (1) имеет частное формальное решение вида (35), в котором вектор $v(\sigma, \mu)$ допускает формальное разложение*

$$v(\sigma, \mu) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-p}^{\infty} v_k(\sigma)\,\mu^k, & \text{если } p < q, \\ \sum\limits_{k=-q}^{\infty} v_k(\sigma)\,\mu^k, & \text{если } p \geqslant q,\ \mu = \varepsilon^{\frac{1}{q}}. \end{cases} \tag{36}$$

Доказательство. Пусть $p < q$. Подставив (35) в систему (1) и приравняв в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях μ, учитывая (2), (36), получим

$$(B_0 - \omega A_0)\,v_s = 0,\ s = -\overline{p, -1}; \tag{37}$$

$$(B_0 - \omega A_0)\,v_s = R_s,\ s = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

где

$$R_s(\sigma) = \tilde{R}_s(\sigma) - iL_\sigma k(\sigma)\,A_0(\sigma)\,v_{s-p}(\sigma) - 2ik(\sigma)\,A_0(\sigma)\,L_\sigma v_{s-p}(\sigma) \tag{39}$$

(здесь через $\tilde{R}_s(\sigma)$ обозначено выражение, которое содержит вектор-функции $v_i(\sigma)$ и их производные при $i < s - p$).

Из уравнений (37) найдем $v_s(\sigma) = c_s(\sigma)\varphi(\sigma)$, $s = \overline{-p, -1}$, где $c_s(\sigma)$ — функции, которые подлежат определению. Уравнения (38) будут разрешимы, если

$$(R_s(\sigma), \psi(\sigma)) = 0 \ \forall \sigma \in \Gamma, \ s = 0, 1, \ldots . \tag{40}$$

При выполнении этих условий

$$v_s(\sigma) = H(\sigma) R_s(\sigma) + c_s(\sigma)\varphi(\sigma), \ s = 0, 1, \ldots . \tag{41}$$

Для определения функций $c_s(\sigma)$, $s = -p, -p+1, \ldots$, мы используем условия разрешимости (40). В частности, при $s = 0$ имеем

$$R_0(\sigma) = p_0 - 2ikL_\sigma c_{-p} A_0 \varphi - c_{-p}(iL_\sigma k A_0 \varphi + 2ikA_0 L_\sigma \varphi)$$

и, значит, условие (40) будет выполнено, если

$$c_{-p}(\sigma) = (p_0, \psi)/2ik(A_0 L_\sigma \varphi, \psi). \tag{42}$$

Предположив уже известными все функции $c_s(\sigma)$ при $s < k$, из (40), взяв $s = p + k$, найдем

$$c_k(\sigma) = [(\tilde{R}_{p+k}, \psi) - iL_\sigma k(A_0 H R_k, \psi) - 2ik(A_0 L_\sigma (HR_k), \psi)]/2ik(A_0 L_\sigma \varphi, \psi).$$

Аналогично теорема доказывается и в случае $p \geqslant q$.

Построив формальное частное решение неоднородной системы (1), общее формальное решение этой системы, согласно [11], найдем, прибавив его к общему решению (34) однородной системы (10).

5. «Критический» случай. Пусть $\omega(\sigma) = 0 \ \forall \sigma \in \Gamma$. Тогда для системы уравнений (10) имеет место такая теорема.

Теорема 4. *Если матрицы* $A_k(\sigma)$, $B_k(\sigma)$, $C_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots$, *голоморфны в области* Γ, $\dfrac{p}{q} > \dfrac{2n-1}{2n}$ *и выполняется условие*

$$(B_1\varphi, \psi) \neq 0 \ \forall \sigma \in \Gamma, \tag{43}$$

то система (10) имеет $2n$ различных формальных решений вида (14), *где* $\lambda(\sigma, \mu)$ *и* $v(\sigma, \mu)$ *представляются формальными разложениями*

$$\lambda(\sigma, \mu) = \mu^q \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\sigma)\mu^k, \ v(\sigma, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\sigma)\mu^k, \ \mu = \varepsilon^{\frac{1}{2nq}}. \tag{44}$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

6. Построенные решения имеют асимптотический характер. Пусть, например, $u(x, \varepsilon)$ — точное решение системы (10), а $u_m(x, \varepsilon)$ — m-приближенное решение, получаемое из (14), если в соответствующих разложениях (15), (16) отбросить все члены, начиная с $(m+1)$-го. Если при $x_1 = 0$ $u(x, \varepsilon) = u_m(x, \varepsilon)$, $Lu(x, \varepsilon) = Lu_m(x, \varepsilon)$, то аналогично [4] можно показать, что

$$\| u(x, \varepsilon) - u_m(x, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^{\frac{m+1-np}{nq}} c, \ \| Lu(x, \varepsilon) - Lu_m(x, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^{\frac{m+1-np}{nq}} c,$$

где c — постоянная, не зависящая от ε.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
2. *Харасахал В. В.* Об асимптотических решениях некоторых систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.— Математика и механика, 1969, вып. 4, с. 24—31.
3. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое расщепление систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— 40 с.

4. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 251 с.
5. *Шкиль Н. И.* О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1968.— 23 с.
6. *Шкиль Н. И., Шаманов З.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев : Киев. пед. ин-т, 1978, с. 137—146.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М. : Изд-во МГУ, 1978.— 106 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
9. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
10. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. —Успехи мат. наук, 1960, **15**, вып. 3, с. 3—80.
11. *Харасахал В. Х.* Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— Алма-Ата: Наука, 1970.— 200 с.

Киевский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
14.01.82