УДК 517.925

*Л. Г. Просенюк, С. А. Яценко*

# Асимптотическое поведение решений и их производных комплексного дифференциального уравнения первого порядка

В статье рассматривается дифференциальное уравнение

$$z^N dW/dz = aW + \varphi(z) + \sum_{\substack{m+n\geqslant 2\\ k\geqslant 0, m\geqslant 1}} a_{kmn} z^k W^m (dW/dz)^n, \tag{1}$$

где $z$ — комплексная переменная, изменяющаяся на римановой поверхности логарифмической функции, $W$ — комплексная функция, $N > 1$ — вещественное число, $a$ и все $a_{kmn}$ — комплексные постоянные, $a = |a| \exp[i\varphi_0]$, $|a| > 0$, $\varphi(z)$ аналитична при $0 < |z| < |z_0|$, $\varphi(z) \to 0$, если $z \to 0$, ряд, стоящий справа, сходится в окрестности $z = W = dW/dz = 0$.

Цель работы — изучить вопрос о существовании и асимптотическом поведении решений и их производной уравнения (1) со свойством: $W \to 0$, $dW/dz \to 0$, когда $z \to 0$ в некотором секторе с вершиной в точке $z = 0$.

Подобные вопросы для некоторых вещественных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, исследовались в [1—3].

Ниже $S$ обозначает некоторый сектор с вершиной в $z = 0$ конечного угла раствора, $i = \sqrt{-1}$. В дальнейшем, если не оговорено противное, $z \in S$. Пусть уравнение $z^N dW/dz = aW + \varphi(z)$ имеет решение $\alpha(z)$ такое, что

$$\alpha(z) z^{-p} \to c, \ [d\alpha(z)/dz] z^{-p+1} \to cp, \ z \to 0, \ c = \mathrm{const} \neq 0, \ p > 2N. \tag{2}$$

В уравнении (1) вместо $W$ и $dW/dz$ введем новые переменные $u(z)$, $\omega(z, u)$ следующим образом:

$$W = \alpha(z) + z^{N+\beta} u, \tag{3}$$

$$dW/dz = d\alpha(z)/dz + z^\beta \omega. \tag{4}$$

Здесь $\beta > N$ фиксируем так, что $p - N - \beta > 0$. Сделав в (1) указанную замену и обозначив для краткости

$$p_1 \equiv z^{N+\beta}, \ p_2 \equiv \alpha(z) z^{-N-\beta}, \ p_3 \equiv z^\beta, \ p_4 = \frac{d\alpha(z)}{dz} z^\beta, \tag{5}$$

получим равенство:

$$\omega = au + \sum_{\substack{m+n\geqslant 2\\ k\geqslant 0, m\geqslant 1}} a_{kmn} z^k p_1^{m-1} (p_2 + u)^m (p_3 (p_4 + \omega))^n. \tag{6}$$

Попутно отметим, что $p_k \to 0$ $(k = \overline{1, 4})$ при $z \to 0$. Очевидно, что к (6) уже применима классическая теорема о существовании неявной функции $\omega$ в окрестности точки $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = z = u = 0$. Комплексная функция $\omega$ голоморфна в окрестности указанной точки и представима в виде

$$\omega = au + \omega_0 (z, p_1, p_2, p_3, p_4, u), \tag{7}$$

где разложение $\omega_0$ в ряд Тейлора содержит только члены порядка, не ниже второго. Если найденную функцию $\omega$ подставить в (4) и снова в уравнении (1) произвести замену (3), (4), то с учетом обозначений (5) получится тождество относительно переменных $z$, $u$. Стало быть, если мы хотим, чтобы (3) была решением уравнения (1), остается определить $u(z)$ таким образом, чтобы производная правой части (3) совпадала с правой частью (4) при подстановке туда $u(z)$. Следуя сказанному, продифференцируем обе части равенства (3), после чего правую часть приравняем к правой части (4). Относительно $u$ получится дифференциальное уравнение $z^N du/dz = \omega - (N + \beta) z^{N-1} u$, или, принимая во внимание (7), —

$$z^N du/dz = au + F(z, u). \tag{8}$$

Здесь $F = -(N+\beta) z^{N-1} u + \omega_0(z, p_1, p_2, p_3, p_4, u)$, а $p_k$ — функции (5).

Установим нужные свойства функции $F(z, u)$. Введем область $[(z, u) : z \in S, |u| < |z|^{p-\beta-1+\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1]$. В этой области функция $F$, во-первых, голоморфна, а во-вторых, при $z \to 0$ удовлетворяет соотношению

$$F = o(z^{p-\beta-1+\varepsilon}). \tag{9}$$

Доказательство последнего по сути сводится к оценке $\omega_0$. Подставляя (7) в (6), имеем

$$\omega_0 \equiv \sum_{\substack{m+n\geqslant 2\\ k\geqslant 0, m\geqslant 1}} a_{kmn} z^k p_1^{m-1} (p_2 + u)^m (p_3(p_4 + au + \omega_0))^n \equiv$$

$$\equiv p_1(p_2 + u) \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ m\geqslant 1}} a_{km0} z^k p_1^{m-1} (p_2 + u)^m + p_3(p_2 + u)(p_4 + au + \omega_0) \times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 1, n\geqslant 1, k\geqslant 0} a_{kmn} z^k (p_1(p_2 + u))^{m-1} (p_3(p_4 + au + \omega_0))^{n-1}.$$

Множители, стоящие справа перед знаками сумм, во введенной области — величины порядка $o(z^{p-\beta-1+\varepsilon})$, когда $z \to 0$. Сами же суммы представляют собой ряды, сходящиеся в окрестности точки $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = z = u = 0$ и, следовательно, ограничены. Тем самым справедливость (9) доказана.

Предлагаемый ниже метод исследования уравнения (8) позволяет отвлечься от всех остальных свойств функции $F$ и считать, что она удовлетворяет лишь только двум указанным выше условиям. Уравнения вида (8) изучались в [4]. Однако, в [4] некоторые предположения существенно ослаблены. Так, например, из ограничений приведенной работы вытекает условие Липшица для $F$, когда $z \in S$, $|u| < |u_0|$, в то время как мы его не требуем. Кроме того, в названной работе не освещен вопрос о количестве решений, стремящихся к нулю при $z \to 0$, хотя простейшие примеры линейных уравнений типа (8) показывают, что в секторах

$$S_j(\nu) = [z : 0 < |z| < |z_0|, (2\pi j - \pi/2 + \varphi_0 + \nu)/(N-1) \leqslant$$
$$\leqslant \arg z \leqslant (2\pi j + \pi/2 + \varphi_0 - \nu)/(N-1)],$$

где $\nu > 0$ — произвольное малое число, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, существует бесчисленное множество таких решений. И даже более, граничные лучи секторов $S_j(0)$ являются для них линиями Стокса, т. е. решения с сохранением свойств нельзя аналитически продолжить на сектор большего угла раствора. Пусть условие (2) справедливо в случае $z \in S_j(\nu)$. Оказывается, и уравнение (8) тогда будет иметь в секторах $S_j$ континуум голоморфных решений с требуемым свойством. Покажем это.

Теорема. *Пусть условие (2) имеет место, когда $z$ принадлежит какому-либо одному из секторов $S_j$. Тогда при достаточно малом $z_0$ будет существовать континуум решений уравнения (8), голоморфных в этом секторе и удовлетворяющих в нем $|u(z)| < |z|^{p-\beta-1+\varepsilon}$.*

Доказательство. Совершенно произвольно выберем один из секторов $S_j(\nu)$. Рассмотрим поведение решений уравнения (8) вдоль отрезка луча $z(t)=t\exp[iV]$, $0<t<t_0$, $V=\left(2\pi j-\dfrac{\pi}{2}+\varphi_0+\nu\right)/(N-1)$. Введем обозначение: $u(z(t))=x_1(t)+ix_2(t)$. Заменив в (8) $z$ на $z(t)$ и разделив действительные и мнимые части, получим систему двух вещественных уравнений

$$\begin{aligned} t^N dx_1/dt &= |a|\,x_1\sin\nu-|a|\,x_2\cos\nu+f_1(t,x_1,x_2),\\ t^N dx_2/dt &= |a|\,x_1\cos\nu+|a|\,x_2\sin\nu+f_2(t,x_1,x_2), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$f_1(t,x_1,x_2)+if_2(t,x_1,x_2)\equiv\exp[-i(N-1)V]\,F(z(t),x_1+ix_2).$$

Исследуем ее известным методом кривых и поверхностей без контакта [5]. Рассмотрим поверхность $\Lambda(t,x_1,x_2)=0$, $\Lambda=x_1^2+x_2^2-\delta^2t^{2p-2\beta-2+2\varepsilon}$, $\delta=\mathrm{const}$, $0<\delta<1$. Определим знак производной вдоль траекторий системы (10) от функции $\Lambda$. Так,

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\Lambda}{dt}=t^{-N}[2|a|\sin\nu(x_1^2+x_2^2)+$$

$$+2x_1f_1(t,x_1,x_2)+2x_2f_2(t,x_1,x_2)-\delta^2(2p-2\beta-2+2\varepsilon)\,t^{2p-2\beta-3+2\varepsilon+N}].$$

На введенной поверхности

$$\frac{d\Lambda}{dt}=t^{-N}[2|a|\sin\nu\delta^2t^{2p-2\beta-2+2\varepsilon}+2x_1f_1+2x_2f_2-$$
$$-\delta^2(2p-2\beta-2+2\varepsilon)\,t^{2p-2\beta-3+2\varepsilon+N}],$$

и ввиду соотношения (9) окончательно получим, что можно найти $t_0$ такое, для которого $\operatorname{sgn}\dfrac{d\Lambda}{dt}=\operatorname{sgn}(2|a|\sin\nu\delta^2t^{2p-2\beta-2+2\varepsilon})=+1$, $t\in(0,t_0)$. Это означает, что система (10) имеет континуум решений, находящихся на интервале $(0,t_0)$ внутри поверхности $\Lambda=0$.

Изучим поведение решений уравнения (8) вдоль участка петель

$$z(\varphi)=\rho\cos^{1/(N-1)}((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)\exp[i\varphi], \tag{11}$$

$\rho=\mathrm{const}$, $\mu_0=\mathrm{const}$, $0<\rho<\rho_0$, $0<\mu_0<\nu$, $\left(2\pi j-\dfrac{\pi}{2}+\varphi_0+\nu\right)/(N-1)\leqslant$ $\leqslant\varphi\leqslant\left(2\pi j+\dfrac{\pi}{2}+\varphi_0-\nu\right)/(N-1)$.

Введем обозначения $u(z(\varphi))=y_1(\varphi)+iy_2(\varphi)$. Заменив в (8) $z$ на $z(\varphi)$ и снова разделив вещественные и мнимые части, получим систему

$$\begin{aligned} \cos^2((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)\,\rho^{N-1}\frac{dy_1}{d\varphi} &= -|a|\,y_1\sin\mu_0-|a|\,y_2\cos\mu_0+g_1(\varphi,y_1,y_2),\\ \cos^2((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)\,\rho^{N-1}\frac{dy_2}{d\varphi} &= |a|\,y_1\cos\mu_0-|a|\,y_2\sin\mu_0+g_2(\varphi,y_1,y_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $g_1(\varphi,y_1,y_2)+ig_2(\varphi,y_1,y_2)\equiv\exp\left[i\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi_0+\mu_0\right)\right]F(z(\varphi),y_1+iy_2)$.

Производная вдоль траекторий системы (12) от функции $Q(\varphi,y_1,y_2)=y_1^2+$ $+y_2^2-(\rho\cos^{1/(N-1)}((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0))^{2p-2\beta-2+2\varepsilon}$ на поверхности $Q=0$ имеет вид $dQ/d\varphi=\rho^{1-N}\cos^{-2}((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)[-2|a|\sin\mu_0(\rho\cos^{1/N-1}((N-1)\varphi-$ $-\varphi_0+\mu_0))^{2p-2\beta-2+2\varepsilon}+2y_1g_1(\varphi,y_1,y_2)+2y_2g_2(\varphi,y_1,y_2)+(2p-2\beta-2+$

$$+2\varepsilon)\,\rho^{2p-2\beta-3+2\varepsilon+N}\cos^{(2p-\alpha\beta-3+2\varepsilon+N)/(N-1)}((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)\times$$
$$\times\sin((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)].$$

Опираясь на соотношение (9), легко показать существование $\rho_0$ такого, что для любого $\rho \in (0, \rho_0)$ на интервале (11)

$$\operatorname{sgn} dQ/d\varphi = \operatorname{sgn}\left(-2\,|a|\sin\mu_0 \left(\rho\cos^{\frac{1}{N-1}}((N-1)\varphi-\varphi_0+\mu_0)\right)^{2p-2\beta-2+2\varepsilon}\right) = -1.$$

Таким образом, при произвольно взятом $\rho \in (0, \rho_0)$ любое решение системы (12) с начальными данными $y_1(V)=y_1^0$, $y_2(V)=y_2^0$ из множества $Q(V, y_1^0, y_2^0) < 0$ на интервале (11) лежит внутри поверхности $Q=0$. Через каждую точку луча $z(t)$ проходит петля, у которой $\rho = t\sin^{-1/(N-1)}(\nu + \mu_0)$. Нетрудно заметить, что в этой точке значения любого решения системы (10), лежащего внутри поверхности $\Lambda = 0$, попадают в соответствующее множество $Q(V, y_1, y_2) < 0$. Основываясь на сказанном выше, осуществим аналитическое продолжение решений с луча на весь сектор $S_j(\nu)$.

Пусть $S_j^0(\nu)$ — часть сектора $S_j(\nu)$, заключенная между двумя произвольно выбранными петлями, а $z^0(t)$ — отрезок луча $z(t)$, принадлежащий этой части. Выше мы установили существование континуума решений системы (10), лежащих внутри поверхности $\Lambda = 0$. Возьмем произвольно одно из них — $\{x_1(t), x_2(t)\}$ — и какую-либо точку $t^*\exp[iV] \in z^0(t)$. Согласно теореме Коши уравнение (8) имеет единственное решение $u(z)$, голоморфное в некоторой окрестности этой точки и удовлетворяющее начальному условию $u(t^*\exp[iV]) = x_1(t^*) + ix_2(t^*)$. Причем $u(t\exp[iV]) \equiv x_1(t) + ix_2(t)$ на той части $z^0(t)$, которая находится в этой окрестности.

Отрезок $z^0(t)$ оказывается покрытым бесконечным числом такого рода окрестностей. По теореме Гейне — Бореля можно выбрать конечное число кругов, покрывающих его. Используя принцип аналитического продолжения, получаем решение $u(z)$, голоморфное уже в некоторой окрестности отрезка $z^0(t)$. Так как $Q(V, x_1(t^*), x_2(t^*)) < 0$, то $u(z)$ можно аналогичным способом аналитически продолжить и вдоль каждой из петель, находящейся в $S_j^0(\nu)$. При этом каждой петле соответствует, вообще говоря, свое аналитическое продолжение $u_\rho(z)$. Не ограничивая общности рассуждений, окрестность петли, где $u_\rho(z)$ голоморфно, можно считать ограниченной также петлями. Опять-таки $S_j^0(\nu)$ оказывается покрытой такими окрестностями петель, и из бесконечного покрытия снова можно выбрать конечное число окрестностей, покрывающих полностью $S_j^0(\nu)$. Итак, мы получим конечное число решений $u_\rho(z)$.

Докажем, что они аналитически продолжают друг друга при переходе из одной окрестности в другую. Действительно, соседние две окрестности пересекаются по односвязному множеству, которому принадлежит и некоторая часть луча. На этой части луча решения $u_\rho(z)$, соответствующие выбранным окрестностям, совпадают, а значит совпадают и во всем пересечении, т. е. эти решения являются аналитическим продолжением друг друга. Поскольку $S_j^0(\nu)$ — совершенно произвольная часть сектора $S_j(\nu)$, мы тем самым имеем право говорить об одной функции $u(z)$, голоморфной в $S_j(\nu)$ и являющейся решением уравнения (8). Вдоль петель реальная и мнимая части этой функции удовлетворяет неравенству $Q(\varphi, y_1(\varphi), y_2(\varphi)) < 0$. Это значит, что во всем секторе имеет место оценка $|u(z)| < |z|^{p-\beta-1+\varepsilon}$. Ясно также, что таких решений континуум. Теорема доказана.

На основании этой теоремы нетрудно сделать основной вывод о решениях уравнения (1). В самом деле, подставив найденные решения уравнения (8) в (3), мы получим континуум решений уравнения (1). Учитывая оценку $u(z)$ и свойства $\alpha(z)$, легко указать асимптотику этих решений. Помимо того, из (7) и оценки $\omega_0$ следует $\omega = O(z^{p-\beta-1+\varepsilon})$ при $z \to 0$. В свою очередь, из (4) вытекает и асимптотика производной рошений. Резюмируем сказанное.

Т е о р е м а. *Пусть $z$ изменяется в одном из секторов $S_j(\nu)$ и выполнено условие (2). Тогда уравнение (1) будет иметь континуум голоморфных в выбранном секторе решений, для которых справедливы асимптотические представления $W(z) = cz^p + o(z^p)$, $dW(z)/dz = cpz^{p-1} + o(z^{p-1})$, $z \to 0$.*

1. *Даутов М. А., Муратов Л. М.* Асимптотическое представление решений полиномиального дифференциального уравнения первого порядка.— Изв. вузов. Сер. Математика, 1964, № 4, с. 61—68.
2. *Запорожец Г. И.* Исследование однородного уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 5, с. 567—581.
3. *Фильчаков П. Ф.* О построении интегралов дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1969, № 7, с. 606—611.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1968.— 464 с.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967.— 472 с.

Одесский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
15.09.82