УДК 519.21

Г. П. Буцан

Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп

В данной статье в основном используются обозначения, принятые в работах [1—3], а их обобщения точно определяются.

Определение 1. *Двупараметрическое семейство случайных величин* X_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $T < \infty$, *со значениями в* $G_2(H)$ *называется левой* $\check{M}$-*полугруппой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1.1. $X_s^\tau X_\tau^t = X_s^t$, $X_s^s = E \pmod P$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$;

1.2. $|X_0^\tau - E|_4^2 = F(\tau)$ *непрерывна в каждой точке отрезка* $[0, T]$ *справа или слева в зависимости от рассматриваемой точки;*

1.3. σ_0^s *и* σ_τ^t *независимы для любых* $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$;

1.4. $MX_s^t = E$ *для любых* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Определение 2. *Двупараметрическое семейство случайных величин* Y_t^s, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $T \leqslant \infty$, *со значениями в* $\sigma_2(H)$ *называется* $\check{A}$-*полугруппой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

2.1. $Y_s^\tau + Y_s^t = Y_s^t$, $Y_s^s = 0 \pmod P$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$;

2.2. $|Y_0^\tau|_4^2 = \varphi(\tau)$ — *непрерывна в каждой точке отрезка* $[0, T]$ *справа или слева (см. 1.2.);*

2.3. $\hat{\sigma}_0^s$ *и* $\hat{\sigma}_\tau^t$ *независимы для любых* $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$;

2.4. $MY_s^t = 0$ *для любых* $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$.

В отличие от ранее рассмотренных в работах [1—3] $\widetilde{M}$- и $\widetilde{A}$-полугрупп, $\check{M}$- и $\check{A}$-полугруппы не являются непрерывными в каждой точке отрезка $[0, T]$ в норме $|\cdot|_4$. Наша цель—установление взаимно однозначного отображения D между ними, как и в непрерывном случае, для того, чтобы в дальнейшем с помощью $\check{A}$-полугрупп, которые устроены проще, так как коммутативны, описывать свойства некоммутативных в общем случае $\check{M}$-полугрупп.

В настоящей статье будет доказано существование у всякой $\check{M}$-полугруппы X_s^t инфинитезимальной $\check{A}$-полугруппы $D(X_s^t) = Y_s^t$. В последующих работах по произвольной $\check{A}$-полугруппе Y_s^t будет построена первообразная $\check{M}$-полугруппа X_s^t и будет доказана взаимная однозначность предыдущих построений.

Итак, пусть задана $\check{M}$-полугруппа X_s^t. В дальнейшем нам понадобится ряд известных соотношений из [1], которые мы для удобства приведем ниже.

Если ξ и η — независимые случайные величины со значениями в $X(H)$, то (см. (2.10) из [1])

$$|\xi\eta|_5 \leqslant |\xi|_5 \, |\eta|_5. \tag{1}$$

Если η к тому же принимает значения в $\sigma_2(H)$, то (см. (2.8) из [1])

$$|\xi\eta|_4 \leqslant |\xi|_5 \, |\eta|_4, \quad |\eta|_5 \leqslant |\eta|_4. \tag{2}$$

Для $0 \leqslant s \leqslant \mu \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ (см. (2.12) из [1])

$$|X_\mu^t - X_\mu^\tau|_4^2 \leqslant |X_s^t - X_s^\tau|_4^2 \leqslant F(t) - F(\tau) \tag{3}$$

при условии, что определены все величины, входящие в (1) — (3).

Определение 3. *Любой набор точек* $\{t_k^n\} = \Delta_n$, $k = \overline{1, m_n}$, *удовлетворяющих соотношению* $0 \leqslant s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t \leqslant T$, *будем называть разбиением отрезка* $[s, t]$ *при фиксированном* n *или последовательностью разбиений этого отрезка, если* $n = \overline{1, \infty}$ *и* $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) = \delta_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Определим также* $\hat{\Delta}_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k$ *для заданной последовательности разбиений* $\{\Delta_n\}$.

Для произвольного разбиения Δ_n справедлива формула

$$X_s^t - E - \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = \sum_{k=1}^{m_n} (X_s^{t_{k-1}^n} - E)(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E). \tag{4}$$

Теорема. *Для произвольной* $\check{M}$-*полугруппы* X_s^t *существует в норме* $|\cdot|_4$ *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = D(X_s^t) = Y_s^t$, *который не зависит от последовательности разбиений* $\{\Delta_n\}$ *и является* $\check{A}$-*полугруппой.*

Для доказательства первой части этой теоремы достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только для некоторого разбиения Δ_n выполняется соотношение $\delta_n < \delta(\varepsilon)$, то для любого другого разбиения $\Delta_m \supset \Delta_n$ справедливо неравенство $|Y_s^t(\Delta_n) - Y_s^t(\Delta_m)|_4^2 < \varepsilon$, где $Y_s^t(\Delta_n) = \sum\limits_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)$. В самом деле, из этого факта будет немедленно следовать существование указанного предела для любой монотонной ($\Delta_n \subset \Delta_{n+m}$) последовательности разбиений. Далее, если $\{\Delta_n^{(1)}\}$ и $\{\Delta_n^{(2)}\}$ — две различные монотонные последовательности разбиений, то легко видеть, что в силу указанного свойства пределы последовательностей $\{Y_s^t(\Delta_n^{(1)})\}$ и $\{Y_s^t(\Delta_n^{(2)})\}$ будут совпадать с пределом последовательности $\{Y_s^t(\Delta_n^{(1)} \cup \Delta_n^{(2)})\}$.

Наконец, если $\{\Delta_n\}$ — произвольная последовательность разбиений, то $\lim\limits_{n\to\infty} Y_s^t(\Delta_n)$ по аналогии с предыдущим будет совпадать с $\lim\limits_{n\to\infty} Y_s^t(\hat{\Delta}_n)$.

Итак, пусть $0 \leqslant s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$, $\Delta_n = \bigcup\limits_{k=0}^{m_n} t_k^n$, $t_{k-1}^n = s_0^k < s_1^k < \ldots < s_{r_k}^k = t_k^n$, $\Delta_m = \bigcup\limits_{k=0}^{m_n} \bigcup\limits_{i=0}^{r_k} s_i^k$. В силу формул (1)—(4) и условий 1.1, 1.3, 1.4 определения 1 справедливо неравенство

$$|Y_s^t(\Delta_n) - Y_s^t(\Delta_m)|_4^2 = \left| \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E) \right|_4^2 =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E)(X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E) \right|_4^2 = \sum_{k=1}^{m_n} \left| \sum_{i=1}^{r_k} (X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E)(X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E) \right|_4^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \left| (X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E)(X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E) \right|_4^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} |X_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E|_4^2 \, |X_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} [F(s_{i-1}^k) - F(t_{k-1})][F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)]. \tag{5}$$

В силу свойства (3) функция $F(\tau)$ монотонно не убывает на $[0, T]$ и $F(0) = 0$, а $F(T) < \infty$ по условию. Следовательно, на $[0, T]$ она имеет только счетное число скачков, из которых всегда можно выделить конечное число скачков $N(\varepsilon)$ так, чтобы сумма оставшихся скачков не превышала $\varepsilon/4F(T)$. Занумеруем все скачка $\{\theta_j\}$, $j=\overline{1,\infty}$, функции $F(\tau)$ на $[0, T]$ так, чтобы первые $N(\varepsilon)$ из них были именно теми, которые мы выделили. Представим функцию $F(\tau)$ на отрезке $[0, T]$ в виде $F(\tau)=F_1(\tau)+F_2(\tau)+F_3(\tau)$, где $F_1(\tau)$ — непрерывна на $[0, T]$, $F_3(\tau)$ — ступенчатая, скачки которой совпадают с первыми $N(\varepsilon)$ скачками $F(\tau)$ по месту и величине и только с ними, $F_2(\tau)$ — ступенчатая, скачки которой совпадают с оставшимися скачками $F(\tau)$ по месту и величине и только с ними, причем все $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$, $F_3(\tau)$ монотонно не убывают, а $F_2(\tau)$ и $F_3(\tau)$ в каждой точке отрезка $[0, T]$ непрерывны либо справа либо слева одновременно.

Запишем правую часть неравенства (5) в виде

$$\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_n}[F(s_{i-1}^k)-F(t_{k-1}^n)][F(s_i^k)-F(s_{i-1}^k)]=\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}[F_1(s_{i-1}^k)-F_1(t_{k-1}^n)]\times$$
$$\times[F(s_i^k)-F(s_{i-1}^k)]+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}[F_2(s_{i-1}^k)-F_2(t_{k-1}^n)][F(s_i^k)-F(s_{i-1}^k)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}[F_3(s_{i-1}^k)-F_3(t_{k-1}^n)][F_1(s_i^k)-F_1(s_{i-1}^k)]+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}[F_3(s_{i-1}^k)-F_3(t_{k-1}^n)]\times$$
$$\times[F_2(s_i^k)-F_2(s_{i-1}^k)]+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}[F_3(s_{i=1}^k)-F_3(t_{k-1}^n)][F_3(s_i^k)-F_3(s_{i-1}^k)]. \quad (6)$$

Первое слагаемое суммы в правой части этого равенства не превышает $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant m_n}[F_1(t_k^n)-F_1(t_{k-1}^n)]F(T)$ и за счет равномерной непрерывности $F_1(\tau)$ на $[0, T]$ может быть сделано меньше $\varepsilon/4$ при $\delta_n\to 0$.

Второе слагаемое в правой части (6) меньше $\varepsilon/4$, так как $F_2(s_{i-1}^k)-F_2(t_{k-1}^n)\leqslant\varepsilon/4F(T)$ по определению функции $F_2(\tau)$. Заметим, что если с ростом n δ_n станет и будет оставаться меньше $\min\limits_{0<i\neq j\leqslant N(\varepsilon)}|\theta_j-\theta_i|$, то во внешних суммах, входящих в третье и четвертое слагаемые правой части (6), все время будет оставаться не более $N(\varepsilon)$ слагаемых, отличных от нуля, а все пятое слагаемое будет тождественно равно нулю. В третьем слагаемом правой части (6) сомножитель $F_3(s_{i-1}^k)-F_3(t_{k-1}^n)$, входящий в слагаемые внутренних сумм, будет не больше $F(T)$, и за счет равномерной непрерывности $F_1(\tau)$ на $[0, T]$ при $\delta_n\to 0$ можно достичь того, что $\sup\limits_{t-s\leqslant\delta_n, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}(F_1(t)-F_1(s))$ будет меньше $\varepsilon/4N(\varepsilon)F(T)$, и тогда все рассматриваемое слагаемое станет меньше $\varepsilon/4$. Оценивая четвертое слагаемое в правой части (6), в силу предыдущего заметим, что оно при больших n ограничено величиной

$$\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\sum_{i=1}^{r_k}[F_3(t_k^n)-F_3(t_{k-1}^n)][F_2(s_i^k)-F_2(s_{i-1}^k)]\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}[F_3(t_k^n)-F(t_{k-1}^n)]\,\varepsilon/4F(T)\leqslant\varepsilon/4.$$

Таким образом, при малых δ_n вся правая часть выражения (6) может быть сделана меньше ε и, следовательно, первая часть теоремы доказана.

Переходя ко второй части, заметим, что доказательство свойств 2.3 и 2.4 у $D(X_s^t)=Y_s^t$ очевидно, свойство 2.1 вытекает из того, что точку τ всегда можно присоединить к соответствующим разбиениям Δ_n, а свойство 2.2 следует из оценки

$$|D(X_s^t)|_4^2=|Y_s^t|_4^2=\varphi(t)-\varphi(s)\leqslant F(t)-F(s), \quad (7)$$

которая в силу (3) получается предельным переходом в неравенстве

$$|Y_s^t(\Delta_n)|_4^2 = \left|\sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)\right|_4^2 = \sum_{k=1}^{m_n} |X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} (F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)) = F(t) - F(s).$$

Определение 4. *$\check{A}$-полугруппа $Y_s^t = D(X_s^t)$ называется инфинитезимальной для $\check{M}$-полугруппы X_s^t.*

Следствие 1. $\hat{\sigma}_s^t \subset \sigma_s^t$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Замечание 1. В заключение отметим, что для $\check{M}$-полугруппы X_s^t справедливы оценки

$$|X_s^t|_5^2 \leqslant F(t) - F(s) + 1 \leqslant F(T) + 1, \tag{8}$$

$$|X_s^t - E - D(X_s^t)|_4^2 \leqslant [F(t-) - F(s)][F(t) - F(s+)]. \tag{9}$$

В самом деле, первая из них в силу свойств (2), (3), 1.3 и 1.4 вытекает из соотношения $|X_s^t|_5^2 = |X_s^t - E|_5^2 + 1 \leqslant F(t) - F(s) + 1 \leqslant F(T) + 1$, вторая следует из доказанной выше теоремы при предельном переходе в соотношении

$$\left|X_s^t - E - \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)\right|_4^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} [F(t_{k-1}^n) - F(s)][F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)] \leqslant$$

$$\leqslant [F(t_{n-1}^n) - F(s)][F(t) - F(t_1)].$$

Замечание 2. Отметив, что правая часть (5) может быть переписана в виде $\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_n} F(s_{i-1}^k)[F(s_i^k) - F(s_{i-1}^k)] - \sum_{k=1}^{m_n} F(t_{k-1}^n)[F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n)] = S(\Delta_m) - S(\Delta_n)$, где $S(\Delta_m)$ и $S(\Delta_n)$ — интегральные суммы для интеграла Стильтьеса $\int_s^t F(\tau)\, dF(\tau)$, легко видеть, что условие непрерывности $F(\tau)$ слева (справа) во всех точках отрезка $[s, t]$, рассмотренное в [4], сразу влечет единственность предела у $\{Y_s^t(\Delta_n)\}$ независимо от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$.

Замечание 3. Учитывая замечание 2, аналогично доказательству теоремы, можно показать, что для функций $f(x)$ и $g(x)$ ограниченной вариации на $[s, t]$, которые непрерывны справа или слева одновременно в точках, где они обе имеют скачки, существует интеграл Стильтьеса $\int_s^t f(\tau)\, dg(\tau)$.

Замечание 4. Подобно доказанной теореме, используя методы [1], можно показать, что отображение D непрерывно в норме $|\cdot|_6$.

1. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
2. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1977.— 28 с.
3. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 4, с. 437—443.
4. *Чани А. С.* Стохастические полугруппы с независимыми приращениями.— В сб.: Теория случайных процессов. Киев, 1981, вып. 9, с. 109—115.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.01.82