УДК 517.927.6

О. М. Габрель

Решение многоточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений проекционно-итеративным методом

Рассмотрим многоточечную задачу: найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = P(t)\,x(t) + f(t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\sum_{i=1}^{n} W_i x(t_i) = \theta_n, \quad -\infty < a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b < \infty, \tag{2}$$

где θ_n — n-мерный нуль-вектор, $n \geqslant 1$; $x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$; $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$; $P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$ — $n \times n$-мерная матрица, элементы которой определены на $[a, b]$; W_i, $i = \overline{1, n}$, — $n \times n$-мерные постоянные матрицы.

В настоящей работе задача (1), (2) решается проекционно-итеративным методом.

Предположим, что: 1) $f(t) \in L_n^2(a, b)$, где $L_n^2(a, b)$ — гильбертово пространство n-мерных вектор-функций, компоненты которых из $L^2(a, b)$, со скалярным произведением

$$(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b x_i(t)\, y_i(i)\, dt$$

и нормой

$$\| x(t) \| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| x_i(t) \|^2_{L^2(a,b)} \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_a^b | x_i(t) |^2\, dt \right\}^{1/2};$$

2) задача (1), (2) представима в виде

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = B(t)\,x(t) + f(t), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i x(t_i) = \theta_n, \tag{4}$$

где A — $n \times n$-мерная постоянная матрица, $B(t) = \| b_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{n}$; 3); задача

$$\dot{u}(t) - Au(t) = g(t), \quad \sum_{i=1}^{n} W_i u(t_i) = \theta_n, \tag{5}$$

имеет единственное решение для любой вектор-функции $g(t) \in L_n^2(a, b)$ и его можно построить в явном виде $\Big($это всегда выполнимо, например, когда $\det \sum_{i=1}^{n} W_i e^{At_i} \neq 0$, где e^{At} — $n \times n$-мерная экспоненциальная матрица$\Big)$;

$$4) \quad \int_a^b \int_a^b \left(\sum_{l=1}^{n} b_{il}(t)\, g_{lj}(t, \tau) \right)^2 dt\,d\tau < \infty, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $G(t, \tau) = \| g_{ij}(t, \tau) \|_{i,j=1}^{n}$ — матрица Грина задачи (5).

Определение. *Вектор-функцию $x(t)$, которая удовлетворяет на $a \leqslant t \leqslant b$ уравнению (3) и условиям (4), будем называть решением многоточечной задачи (3), (4).*

Пусть $y_0(t) \in L_n^2(a, b)$ — заданная вектор-функция (практически можно выбрать $y_0(t) = \theta_n$ или $y_0(t) = f(t)$). Нулевое приближение определим из задачи

$$\dot{x}_0(t) - Ax_0(t) = y_0(t), \quad \sum_{i=1}^{n} W_i x_0(t_i) = \theta_n.$$

Затем, предполагая приближение $x_{k-1}(t)$ уже построенным, k-е приближение определяем из задачи

$$\dot{x}_k(t) - Ax_k(t) = B(t)[x_{k-1}(t) + \alpha_k(t)] + f(t), \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i x_k(t_i) = \theta_n, \tag{8}$$

где

$$\alpha_k(t) = \sum_{s=1}^{m} c_{ks}\varphi_s(t), \ k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Вектор-функции $\varphi_s(t) = \mathrm{col}(\varphi_{s1}(t), \ldots, \varphi_{sn}(t))$, $s = \overline{1, m}$, находим из задач

$$\dot{\varphi}_s(t) - A\varphi_s(t) = \psi_s(t), \quad \sum_{i=1}^{n} W_i\varphi_s(t_i) = \theta_n, \ s = \overline{1, m}, \tag{10}$$

где $\psi_s(t) = \mathrm{col}(\psi_{s1}(t), \ldots, \psi_{sn}(t))$, $s = \overline{1, m}$ — заданная ортогональная система вектор-функций из $L_n^2(a, b)$. Неизвестные параметры c_{ks}, $s = \overline{1, m}$, определяем из условий

$$(\dot{z}_k(t) - Az_k(t), \psi_s(t)) = \theta_n, \ s = \overline{1, m}, \tag{11}$$

где

$$z_k(t) = \alpha_k(t) - \Delta_k(t), \ \text{а} \ \Delta_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t). \tag{12}$$

На основе (7) и (12)

$$\dot{\Delta}_k(t) - A\Delta_k(t) = \varepsilon_{k-1}(t) + B(t)\alpha_k(t), \tag{13}$$

где

$$\varepsilon_{k-1}(t) = f(t) - \dot{x}_{k-1}(t) + Ax_{k-1}(t) + B(t)x_{k-1}(t). \tag{14}$$

Подставляя (13) в (11) и полагая

$$d_{kj} = (\varepsilon_{k-1}(t), \ \psi_j(t)), \ D_{sj} = (\dot{\varphi}_s(t) - A\varphi_s(t) - B(t)\varphi_s(t), \psi_j(t)),$$

получим для определения c_{ks} систему алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{m} c_{ks}D_{sj} = d_{kj}, \ j = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Если система уравнений (15) имеет единственное решение, то n-мерная вектор-функция $\alpha_k(t)$ определяется однозначно. Подставляя ее значение в (7) и решая задачу (7), (8), получим k-е приближение $x_k(t)$.

Задача (3), (4) равносильна системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В самом деле, пусть

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t), \quad \sum_{i=1}^{n} W_i x(t_i) = \theta_n, \tag{16}$$

тогда, обозначив

$$K(t, \tau) = B(t)G(t, \tau), \tag{17}$$

получим

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau. \tag{18}$$

Аналогично покажем, что алгоритм (7)—(12) сводится к алгоритму проекционно-итеративного метода для векторного уравнения (18). Для этого достаточно положить

$$\dot{x}_k(t) - Ax_k(t) = y_k(t), \quad \sum_{i=1}^{n} W_i x_k(t_i) = \theta_n. \tag{19}$$

Решение задачи (19) запишем так:

$$x_k(t) = \int_a^b G(t, \tau)\, y_k(\tau)\, d\tau. \tag{20}$$

Тогда в силу (20), (9) и того факта, что вектор-функции $\varphi_s(t)$, $s = \overline{1, m}$ определяются из задачи (10), имеем

$$B(t)[x_{k-1}(t) + \alpha_k(t)] = \int_a^b B(t)\, G(t, \tau) \left\{ y_{k-1}(\tau) + \sum_{s=1}^{m} c_{ks}\psi_s(\tau) \right\} d\tau$$

и, положив $\sum_{s=1}^{m} c_{ks}\psi_s(t) = \alpha_k^*(t)$, в силу (17) и (19) из задачи (7), (8) получаем уравнение

$$y_k(t) = f(t) + \int_a^b K(t, \tau) \{ y_{k-1}(\tau) + \alpha_k^*(\tau) \}\, d\tau. \tag{21}$$

С учетом (9) и (12) условия (11) приобретут вид

$$(\alpha_k^*(t) - \Delta_k^*(t),\ \psi_s(t)) = \theta_n, \ s = \overline{1, m}, \tag{22}$$

где $\Delta_k^*(t) = y_k(t) - y_{k-1}(t)$.

Обозначим

$$q_m = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \int_a^b | L_{ij}^{(m)}(t, \tau) |^2\, dt d\tau \right\}^{1/2}, \tag{23}$$

где $L_m(t, \tau) = \| L_{ij}^{(m)}(t, \tau) \|_{i,j=1}^{n}$ — матрица перехода, которая строится, исходя из известной матрицы $K(t, \tau) = \| K_{ij}(t, \tau) \|_{i,j=1}^{n}$ (схему ее построения см. в [1]).

Теорема 1. *Если*

$$q_m < 1, \tag{24}$$

то задача (3), (4) *имеет единственное решение* $x(t) \in L_n^2(a, b)$ *и последовательность вектор-функций* $\{x_k(t)\}$, *построенная согласно проекционно-итеративному методу* (7) — (12), *сходится в* $L_n^2(a, b)$ *к этому решению.*

Теорема 2. *Пусть задача* (3), (4) *имеет единственное решение, выполняются условия* (6) *и система вектор-функций* $\{\psi_s(t)\}$ *полна в* $L_n^2(a, b)$. *Тогда*

$$q_m \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{25}$$

Если выполняются условия теоремы 2, то из соотношения (25) следует существование такого номера m, при котором метод (7)—(12) сходится.

Доказательство теорем 1 и 2. Сначала докажем, что сходимость последовательности вектор-функций, определенной алгоритмом (7)—(12), к решению задачи (3), (4) следует из сходимости последовательности (21) к решению векторного интегрального уравнения (18). Пусть $y_*(t)$ — решение уравнения (18), тогда

$$x_*(t) = \int_a^b G(t, \tau)\, y_*(\tau)\, d\tau \tag{26}$$

является решением задачи (3), (4). В самом деле, из равенства (26) имеем

$$\dot{x}_* (t) - Ax_* (t) = y_* (t). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (18), получим

$$\dot{x}_* (t) - Ax_* (t) = f (t) + \int_a^b K (t, \tau) \, y_* (\tau) \, d\tau,$$

откуда, принимая во внимание (17) и (26), имеем $\dot{x}_* (t) - Ax_* (t) = B (t) \, x_* (t) + f (t)$, т. е. вектор-функция $x_* (t)$ (26) удовлетворяет уравнению (3), она же удовлетворяет и условию (4), так как имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} W_i G_i (t_i, \tau) = \theta_n,$$

где $G_i (t, \tau) = \mathrm{col} \, (g_{1i} (t, \tau), \ldots, g_{ni} (t, \tau)), \ i = \overline{1, n}$.

Из доказанного выше и в силу достаточных условий сходимости проекционно-итеративного метода решения системы интегральных уравнений, установленных в [1], непосредственно следует справедливость теорем 1 и 2.

Пусть $x_* (t)$ и $x_k (t)$ — соответственно точное и приближенное решения задачи (3), (4). В силу (20), (26) и оценок погрешности из § 7 книги [1], получаем

$$\| x_* (t) - x_k (t) \| \leqslant c_1 \frac{p_m q_m^{k-r}}{1 - q_m} \| \alpha_r (t) - \Delta_r (t) \|; \tag{28}$$

$$\| \dot{x}_* (t) - \dot{x}_k (t) \| \leqslant c_2 \frac{p_m q_m^{k-r}}{1 - q_m} \| \alpha_r (t) - \Delta_r (t) \|, \tag{29}$$

где $1 \leqslant r \leqslant k$,

$$p_m^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \int_a^b | M_{ij}^{(m)} (t, \tau) |^2 \, dt d\tau,$$

а $M_m (t, \tau) = \| M_{ij}^{(m)} (t, \tau) \|_{i,j=1}^{n}$ — также матрица перехода, определяемая, как и $L_m (t, \tau)$, известной матрицей $K (t, \tau)$ (см. [1]),

$$c_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \int_a^a | g_{ij} (t, \tau) |^2 \, dt d\tau,$$

$$c_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \int_a^b \left| \frac{\partial g_{ij} (t, \tau)}{\partial t} \right|^2 dt d\tau.$$

1. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— 264 с.
2. *Ch. J. de la Valée Poussin.* Sur léquation differentielle linéaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n.— J. math. pures et appl., 1929, N 2 p. 125—144.
3. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок.— Киев : Наук. думка, 1968.— 336 с.
4. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1968.— 244 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
14.01.82