УДК 519.41/47

В. С. Мулдагалиев

О централизаторно факторизуемых группах

Исследование групп по заданным свойствам системы дополняемых подгрупп — одно из интенсивно развивающихся направлений современной теории групп. Язык дополняемости системы подгрупп характеризует многие важные свойства групп [1, 2] и иногда позволяет полностью определить строение группы [3—5].

Определение. *Группа G называется централизаторно факторизуемой, если централизатор любой подгруппы из G дополняем в G.*

В обозначениях и терминологии будем в основном следовать работе [6]. Дополнительно вводим следующие обозначения: $C^1(A) = C_G(A)$, $C^2(A) = C_G(C^1(A))$, $\widetilde{C}(A) = C^1(A)\, C^2(A)$, где A — произвольная подгруппа группы G.

1. Общие предложения.

Лемма 1. *Для любой подгруппы A произвольной группы G имеют место соотношения:* $C^1(A) \cap C^2(A) = Z(C^1(A)) = Z(C^2(A)) = Z(\widetilde{C}(A)) = C_G(\widetilde{C}(A))$.

Доказательство леммы получается в результате использования очевидных свойств централизаторов.

Теорема 1. *Пусть G — группа, разлагающаяся в прямое (декартово) произведение подгрупп $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Группа G тогда и только тогда централизаторно факторизуема, когда каждый ее множитель G_α централизаторно факторизуем.*

Теорема доказывается с помощью следующего очевидного предложения: если G — группа, разлагающаяся в прямое (декартово) произведение подгрупп $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и если M — произвольное множество ее элементов, то $C_G(M)$ разлагается в прямое (декартово) произведение подгрупп $C_{G_\alpha}(M_\alpha)$, где $C_{G_\alpha}(M_\alpha)$ — централизатор в G_α проекции M_α множества M на подгруппу G_α.

Однако нетрудно убедиться, что класс централизаторно факторизуемых групп не замкнут относительно подгрупп и фактор-групп. В связи с этим представляют интерес следующие две леммы.

Лемма 2. *Централизатор произвольной подгруппы в централизаторно факторизуемой группе централизаторно факторизуем.*

Доказательство леммы простое, поэтому мы его опускаем.

Лемма 3. *Пусть A — произвольная подгруппа централизаторно факторизуемой группы G. Тогда $\widetilde{C}(A)$ — централизаторно факторизуемая подгруппа, разлагающаяся в прямое произведение*

$$\widetilde{C}(A) = G_1 \times Z(\widetilde{C}(A)) \times G_2 \tag{1}$$

своих централизаторно факторизуемых подгрупп G_1, $Z(\widetilde{C}(A))$, G_2, удовлетворяющих условиям: а) $C^1(A) = G_1 \times Z(\widetilde{C}(A))$, $C^2(A) = Z(\widetilde{C}(A)) \times G_2$, $Z(G_1) = Z(G_2) = 1$; б) *G_2 содержит подгруппу A_2 без центра такую, что* $AZ(\widetilde{C}(A)) = Z(\widetilde{C}(A)) \times A_2$.

Доказательство. Пусть A — произвольная подгруппа централизаторно факторизуемой группы G. Тогда имеем $G = Z(\widetilde{C}(A))\, D$ и $D \cap Z(\widetilde{C}(A)) = 1$. В силу леммы 1 и леммы 3.7 из [7] получаем, что

$$C^1(A) = G_1 \times Z(\widetilde{C}(A)) \text{ и } C^2(A) = Z(\widetilde{C}(A)) \times G_2 \tag{2}$$

где $G_1 = D \cap C^1(A)$, $G_2 = D \cap C^2(A)$. При этом, очевидно, $Z(G_1) = Z(G_2) = 1$. Из разложений (2) вытекает доказываемое разложение (1). По лемме 2 подгруппы G_1, G_2 централизаторно факторизуемы и потому по теореме 1 из разложений (2) следует, что подгруппа $\widetilde{C}(A)$ централизаторно факторизуема. Ввиду леммы 1 имеем

$$C_G(AZ(\widetilde{C}(A))) = C_G(A) \cap C_G(Z(\widetilde{C}(A))) = C_G(A) \cap C_G(C^1(Z(\widetilde{C}(A)))). \qquad (3)$$

Учитывая соотношения $C^1(A) \subseteq \widetilde{C}(A) \subseteq C^2(\widetilde{C}(A))$ и равенства (3), получаем, что

$$C_G(AZ(\widetilde{C}(A))) = C^1(A). \qquad (4)$$

Так как $Z(AZ(\widetilde{C}(A))) = C^1(A) \cap AZ(\widetilde{C}(A))$, то отсюда следует, что

$$Z(AZ(\widetilde{C}(A))) = Z(C^1(A)) = Z(\widetilde{C}(A)). \qquad (5)$$

Ввиду леммы 1 $C_G(\widetilde{C}(A)) = Z(\widetilde{C}(A))$. По лемме 3.7 из [7] следует, что подгруппа $Z(\widetilde{C}(A))$ дополняема в $AZ(\widetilde{C}(A))$. Пусть $A_2 = AZ(\widetilde{C}(A)) \cap G$. Тогда ввиду равенства (5) получим, что $AZ(\widetilde{C}(A)) = Z(\widetilde{C}(A)) \times A_2$. Из последнего равенства и соотношения (5) вытекает, что $Z(A_2) = 1$. Лемма доказана.

2. Абелевость нильпотентных подгрупп централизаторно факторизуемых групп. Пусть G — централизаторно факторизуемая группа и A — ее нильпотентная подгруппа. Ввиду леммы 3 подгруппа $\widetilde{C}(A)$ представима в виде $\widetilde{C}(A) = G_1 \times Z \times (\widetilde{C}(A)) \times G_2$ и в подгруппе G_2 существует подгруппа A_2 такая, что $Z(A_2) = 1$ и $AZ(\widetilde{C}(A)) = Z(\widetilde{C}(A)) \times A_2$. Отсюда вытекает, что $AZ(\widetilde{C}(A))/Z(\widetilde{C}(A)) \cong A_2$. С другой стороны, в силу теоремы об изоморфизмах имеем $AZ(\widetilde{C}(A))/Z(\widetilde{C}(A)) \cong A/A \cap Z(\widetilde{C}(A))$. Значит, $A/A \cap Z(\widetilde{C}(A)) \cong A_2$. В силу нильпотентности подгруппы A и единичности центра подгруппы A получаем, что $A_2 = 1$. Но тогда $A \subseteq Z(\widetilde{C}(A))$. Значит, A — абелева подгруппа. Итак, мы доказали следующее предложение.

Предложение 1. *Нильпотентные подгруппы централизаторно факторизуемой группы абелевы.*

Следствие 1. *Конечная централизаторно факторизуемая группа является A-группой.*

Определение. *Периодическая группа G называется A-группой, если любая ее силовская подгруппа абелева.*

3. Конечные централизаторно факторизуемые группы.

Лемма 4. *Централизаторно факторизуемая группа G с абелевым коммутантом G' разлагается в полупрямое произведение $G = A \rtimes B$ своих абелевых подгрупп A и B, удовлетворяющих условиям:*

1) *подгруппа A совпадает со своим централизатором в G и инвариантна в группе G;*

2) *для любого множества X из A централизатор $C_B(X)$ инвариантно дополняем в G;*

3) *для любого множества Y из B централизатор $C_A(Y)$ инвариантен в G и дополняем в A инвариантной в G подгруппой.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа. Обозначим через A централизатор $C_G(G')$. Тогда, очевидно, $A \triangle G$ и $C_G(A) = A$. Подгруппа A нильпотентна как расширение центральной подгруппы G' с помощью абелевой группы A/G' и потому в силу предложения 1 она абелева. Так как G — централизаторно факторизуемая группа, то $G = A \rtimes B$. Ввиду очевидного изоморфизма $G/A \cong B$ подгруппа B абелева.

Пусть X — произвольное множество элементов из A. Тогда $C_G(A) \subseteq C_G(X)$ и потому ввиду соотношения $C_G(A) = A$ имеем $A \subseteq C_G(X)$. Отсюда в силу леммы 3.7 из [7] $C_G(X) = A \rtimes B_1$, где $B_1 = B \cap C_G(X)$. Так как G — централизаторно факторизуемая группа, то $G = C_G(X) D$ и $C_G(X) \cap D = 1$. Пользуясь инвариантностью подгруппы A в G, получаем далее $G = (A \rtimes B_1) D = (A \rtimes D) C_B(X)$. Очевидно, что $A \rtimes D$ — дополнение к $C_B(X)$ в G. Так как $G' \subseteq A$, то подгруппа $A \rtimes D$ инвариантна в G и, значит, централизатор $C_B(X)$ инвариантно дополняем в G.

Пусть Y — произвольное множество элементов из B. Тогда $B \subseteq C_G(Y)$. Так как подгруппа B дополняема в G, то ввиду леммы 3.7 из [7] $C_G(Y) = A_1 \rtimes B$, где $A_1 = C_G(Y) \cap A$. Очевидно, что $A_1 = C_A(Y)$ и $C_A(Y) \Delta G$. Так как подгруппа A_1 содержится в абелевой подгруппе A, то $A \subseteq C_G(A_1)$ и потому в силу леммы 3.7 из [7] $C_G(A_1) = A \rtimes B_2$, где $B_2 = B \cap C_G(A_1) = C_B(A_1)$. Из соотношения $C_A(Y) = A_1$ вытекает соотношение $Y \subseteq C_B(A_1)$. Следовательно, $Y \subseteq B_2$. Отсюда имеем $C_A(B_2) \subseteq C_A(Y) = A_1$. Тогда, учитывая соотношение $A_1 \subseteq C_A(B_2)$, получаем, что $A_1 = C_A(B_2)$.

Рассмотрим подгруппу $C^2(A_1)$. Ввиду соотношения $C_G(A) = A \rtimes B_2$ имеем $C^2(A_1) = C_G(A \rtimes B_2) = C_G(A) \cap C_G(B_2) = C_A(B_2)$. Так как $C_A(B_2) = A_1$, то $C^2(A_1) = A_1$. Но тогда $G = A_1 \rtimes D_1$. Полагая $A_Y = A \cap D_1$, получим, что $A = A_1 \times A_Y = C_A(B_2) \times A_Y$ и $A_Y \Delta G$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Конечная централизаторно факторизуемая группа G, содержащая инвариантную абелеву подгруппу F, совпадающую со своим централизатором в G, является А-группой и разлагается в полупрямое произведение $G = F \rtimes D$ своих абелевых подгрупп F и D.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа. Ввиду следствия 1 она А-группа. Так как $F = C_G(F)$, то $G = F \rtimes D$. Покажем, что D — абелева подгруппа. Если D — нильпотентная подгруппа, то в силу предложения 1 подгруппа D абелева. Предположим, что подгруппа D ненильпотентна. Тогда она содержит группу Шмидта S. Так как G—А-группа, то S — Миллера — Морено вида $S = P \rtimes \langle b \rangle$, где P — элементарно абелевая силовская p-подгруппа, $\langle b \rangle$ — силовская q-подгруппа, $p \neq q$, $|P| = p^\alpha$, $|b| = q^\beta$, $\alpha, \beta \geqslant 1$, $\langle b^q \rangle = Z(S)$, α — показатель q по модулю p. Ясно, что $F \cap S = 1$. Покажем, что в группе G можно выбрать подгруппу Миллера — Морено M вида $M = P \rtimes \langle d \rangle$, где $|d| = q$ и $F \cap M = 1$. Если $|b| = q$, т. е. $\beta = 1$, то, полагая $\langle d \rangle = \langle b \rangle$, получим, что S — искомая подгруппа M. Пусть $\beta > 1$. Ввиду леммы 3 $\widetilde{C}(S)$ представима в виде $\widetilde{C}(S) = G_1 \times Z(\widetilde{C}(S)) \times G_2$ и в G_2 найдется подгруппа M с единичным центром такая, что $SZ(\widetilde{C}(S)) = Z(\widetilde{C}(S)) \times M$ и $C_G(S) = Z(\widetilde{C}(S)) \times G_2$. Так как $Z(S) = S \cap C_G(S) \subseteq Z(C_G(S)) = Z(\widetilde{C}(S))$ (см. лемму 1), то $S \cap Z(\widetilde{C}(S)) = Z(S)$. Учитывая изоморфизмы $M \cong SZ(\widetilde{C}(S))/Z(\widetilde{C}(S)) \cong S/S \cap Z(\widetilde{C}(S))$ и равенство $\langle b^q \rangle = Z(S)$, имеем $M \cong S/\langle b^q \rangle$. Но тогда M — группа Миллера — Морено порядка $p^\alpha q$. Известна формула $(XY)' = Y'X'[Y, X]$ (см., напр., [9]). Воспользовавшись ею, получим $(SZ(\widetilde{C}(S)))' = S'$. Но, с другой стороны, $(SZ(\widetilde{C}(S)))' = (Z(\widetilde{C}(S)) \times M)' = M' = P$. Из этих соотношений вытекает, что $P \subseteq M$ и, значит, $M = P \rtimes \langle d \rangle$, $|d| = q$. Ввиду неинвариантности подгруппы $\langle d \rangle$ в M имеем $\langle d \rangle \cap F = 1$. Так как $P \cap F = 1$, то $F \cap M = 1$.

Выделим в группе G подгруппу $M_1 = F \rtimes M$. Так как $F = C_G(F)$, то $C_M(F) = 1$ и, значит, $C_{\langle d \rangle}(F) = C_p(F) = 1$. Далее имеем $C_G(F \rtimes \langle d \rangle) = C_G(F) \cap C_G(\langle d \rangle) = C_F(\langle d \rangle) = Z(F \rtimes \langle d \rangle)$. Точно также получим, что $C_G(F \rtimes P) = C_F(P)$.

Положим $X = F \cap D_1$, где D_1 — дополнение подгруппы $C_F(\langle d \rangle)$ в G. Очевидно, что $X \Delta G$ (и, значит, $X \Delta M_1$) и $X \neq 1$. Ввиду леммы 3.7 из [7] имеем $F = X \times C_F(\langle d \rangle)$.

Нетрудно убедиться, что силовская r-подгруппа R подгруппы X дополняема в любой силовской подгруппе из M_1, ее содержащей. Но тогда по теореме Гащюца (см. [10]), подгруппа X дополняема в M_1. Пусть D_2 — одно из дополнений к подгруппе X в группе M_1. Тогда $F = X \leftthreetimes Y$, где $Y = F \cap D_2$ и $Y \triangle M_1$. Заметим, что коммутант неабелевой подгруппы $F \leftthreetimes \langle d \rangle$ содержится в X. Отсюда вытекает, что $[Y, \langle d \rangle] \subseteq X \cap Y = 1$ и, значит, $Y \subseteq C_F(\langle d \rangle)$. Но тогда из соотношений $F = X \leftthreetimes C_F(\langle d \rangle) = X \leftthreetimes Y$ следует, что $Y = C_F(\langle d \rangle)$. Тогда $C_F(\langle d \rangle) \triangle M_1$. Так как $Y = C_F(\langle d \rangle) = Z(F \leftthreetimes \langle d \rangle)$, то $F \leftthreetimes \langle d \rangle \subseteq C_{M_1}(Y)$. С другой стороны, $C_{M_1}(Y) \triangle M_1$ и $C_{M_1}(Y) \cap M \triangle M_1$. Из очевидного соотношения $C_{M_1}(Y) \cap M \triangle M$ вытекает, что $Y \subseteq C_F(P)$. Этим мы показали, что $C_F(\langle d \rangle) \subseteq C_F(P)$.

Заменяя в предыдущих рассуждениях подгруппу $\langle d \rangle$ подгруппой P получим, что $F = K \leftthreetimes C_F(P)$, где $K \triangle M_1$ и $K \neq 1$. Но тогда $C_K(P) = 1$. Так как $C_F(\langle d \rangle) \subseteq C_F(P)$, то $C_K(\langle d \rangle) = 1$. В силу того, что G является A-группой и $C_K(P) = C_K(\langle d \rangle) = 1$, получаем, что $(p, |K|) = 1$, $(q, |K|) = 1$. Пусть R^* — неединичная силовская r-подгруппа из K. Тогда $R^* \triangle M_1$ и $r \neq p$, $r \neq q$. Возьмем подгруппы $R^* \leftthreetimes P$ и $R^* \leftthreetimes \langle d \rangle$.

Нетрудно убедиться, что подгруппа $R^* \leftthreetimes P$ ненильпотентна, а подгруппа $R^* \leftthreetimes \langle d \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle d \rangle$. Заметим, что подгруппа $(R^* \leftthreetimes P) \leftthreetimes \langle d \rangle$ также является группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle d \rangle$. Но это противоречит ненильпотентности подгруппы $R^* \leftthreetimes P$. Следовательно, не существует группы Шмидта S такой, что $F \cap S = 1$. Тогда D — нильпотентная подгруппа вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает абелевость подгруппы D. Лемма доказана.

Лемма 6. *Конечная централизаторно факторизуемая группа G является разрешимой A-группой.*

Доказательство. Ввиду следствия 1 группа G является A-группой. Конечная централизаторно факторизуемая группа G непроста. Это следует из того, что простые неабелевы A-группы содержат самоцентрализуемые силовские недополняемые 2-подгруппы [8]. Докажем разрешимость группы G индукцией по ее порядку. Пусть все централизаторно факторизуемые группы, порядки которых меньше $|G|$, разрешимы. Без ограничения общности можно положить $Z(G) = 1$. Обозначим через N (неединичный) минимальный нормальный делитель группы G.

Пусть подгруппа N неразрешима. Рассмотрим неединичный минимальный нормальный делитель N_1 из N и ее нормальное замыкание H относительно G. Получим, что $N_1 = H$. Заметим далее, что подгруппа N_1 неразрешима. Предположим, что $N_1 \neq N$. Тогда для некоторого элемента g_1 из G имеем $g_1^{-1}N_1g_1 \neq N$ и $g_1^{-1}N_1g_1 \Delta N$. Отсюда ввиду минимальности N_1 вытекает, что $g_1^{-1}N_1g_1 \cap N = 1$. Последнее соотношение влечет включение $g_1^{-1}N_1g_1 \subseteq C_G(N_1)$. Заметим, что $C_G(N_1) \neq G$. По предположению индукции в силу леммы 2 подгруппа $C_G(N_1)$ разрешима. Но тогда $C_G(N_1)$ содержит подгруппу $g_1^{-1}N_1g_1$, сопряженную с неразрешимой подгруппой N_1. Получено противоречие, которое показывает, что $N_1 = N$, т. е. N — проста.

Пусть T — силовская 2-подгруппа из N. Ясно, что $T \neq 1$. Покажем, что $C_G(T) = T$. Пусть напротив, $C_G(T) \neq T$. Тогда в подгруппе $C_G(T)$ найдется неединичный элемент $a \neq 1$, не принадлежащий T. По лемме 3.3 из [8] элемент a индуцирует на N внутренний автоморфизм. Положим $Q = NC_G(T)$. Ясно, что $N \Delta G$ и, значит, $C_Q(N) \Delta Q$. Так как $Z(N) \neq 1$, то $C_Q(N) \cap N = 1$. Покажем, что $Q = N \cdot C_Q(N)$. Пусть x — произвольный элемент из Q. Так как a индуцирует внутренний автоморфизм на N, то при любом y из N имеем $x^{-1}yx = a^{-1}ya$. Это означает, что $x^{-1}a \in C_Q(N)$. Но тогда $x \in NC_Q(N)$, и, значит, $Q = NC_Q(N) = N \times C_Q(N)$. Так как $N \neq Q$, то $C_Q(N) = 1$. Понятно, что $N \subseteq C_G(C_Q(N))$ и $C_G(C_Q(N)) \neq G$.

Эти соотношения невозможны в силу предположения индукции и неразрешимости подгруппы N. Полученные противоречия показывают, что $C_G(T) = T$. Но тогда подгруппа T дополняема в G и, значит, дополняема в N. Получилось противоречие с недополняемостью подгруппы T в N. Итак, минимальный нормальный делитель N рассматриваемой группы G разрешим.

Подгруппа Фиттинга F_1 разрешимой группы N отлична от единицы и содержится в подгруппе Фиттинга F всей группы G и потому $F = C_G(F)$. По лемме 5 коммутант G' группы G абелев. Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. *Конечная группа G тогда и только тогда централизаторно факторизуема, когда она обладает абелевыми силовскими подгруппами и разлагается в полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ своих абелевых подгрупп A и B, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *подгруппа A совпадает со своим централизатором в G и инвариантна в G.*

2) *для любого множества X из подгруппы A централизатор X в G дополняем в G инвариантной в G подгруппой;*

3) *для любого множества Y из подгруппы B централизатор Y в G инвариантен в G и дополняем в A инвариантной в G подгруппой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть G — централизаторно факторизуемая группа. Ввиду леммы 6 G является разрешимой А-группой. Тогда подгруппа Фиттинга $F(G) = A$ группы G является абелевой группой, совпадающей со своим централизатором в G (см. [10]), и потому в силу леммы 5 $G = A \leftthreetimes B$, где подгруппа B абелева. Так как справедливость условий 1)—3) непосредственно вытекает из леммы 4, то необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $G = A \leftthreetimes B$ — А-группа с абелевыми множителями A и B, в которой выполнены условия 1)—3). Пусть H — произвольная подгруппа из G. Докажем, что подгруппа $G_G(H)$ дополняема в G.

Обозначим через $\mathrm{pr}_H(A)$ проекцию подгруппы H на подгруппу A, через $\mathrm{pr}_H(B)$ — проекцию подгруппы H на подгруппу B, через C_1 — подгруппу $C_G(\mathrm{pr}_H(A)) \cap C_G(\mathrm{pr}_H(B))$ и, наконец, обозначим через C централизатор подгруппы H в группе G.

Так как любой элемент из подгруппы C_1 перестановочен с любым элементом из H, то $C_1 \subseteq C$. Пусть $c \in C$ и либо $c \in C_G(\mathrm{pr}_H(A))$, либо $c \in C_G(\mathrm{pr}_H(B))$. Тогда $c \in C_1$. Действительно, любой элемент h из H однозначно представим в виде $h = a \cdot b$, где $a \in \mathrm{pr}_H(A)$, $b \in \mathrm{pr}_H(B)$. Если $c \in C_G(\mathrm{pr}_H(A))$, то $c^{-1}h \cdot c = c^{-1}a \cdot c \cdot c^{-1}bc = a \cdot c^{-1} \cdot bc$ и, значит, $c \in C_G(\mathrm{pr}_H(B))$. Аналогично, если $c \in C_G(\mathrm{pr}_H(B))$, то $c \in C_G(\mathrm{pr}_H(A))$. Отсюда вытекает, что $c \in C_1$.

Покажем теперь, что подгруппа C_1 дополняема в G. Ясно, что $C_G(\mathrm{pr}_H(A)) = A \leftthreetimes B_1$, где $B_1 = B \cap C_G(\mathrm{pr}_H(A)) = C_B(\mathrm{pr}_H(A))$ и по условию 2) имеем $B = B_1 \times B_2$. Ясно также, что $C_G(\mathrm{pr}_H(B)) = A_1 \leftthreetimes B$, где $A_1 = A \cap C_G(\mathrm{pr}_H(B)) = C_A(\mathrm{pr}_H(B))$ и по условию 3) имеем $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \Delta G$ и $A_2 \Delta G$. Так как $C_1 = C_G(\mathrm{pr}_H(A)) \cap C_G(\mathrm{pr}_H(B)) = (A \leftthreetimes B_1) \cap (A_1 \leftthreetimes B)$, то $C_1 = A_1 \leftthreetimes B_1$. Ввиду соотношений $G = A \leftthreetimes B = (A_1 \times A_2) \leftthreetimes (B_2 \times B_1) = (A_1 \leftthreetimes B_1) \times (A_2 \leftthreetimes B_2)$ подгруппа C_1 дополняема в G подгруппой $D = A_2 \times B_2$. Заметим также, что подгруппа A_1 дополняема в G подгруппой $A_2 \leftthreetimes B$ и $(A_2 \leftthreetimes B) \cap C_1 = B_1$.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — все различные простые делители порядка группы G. Обозначим через P_i^1 и P_i^2, $i = 1, 2, \dots, n$, соответственно силовские p_i-подгруппы A и B. Некоторые из них могут быть единичными. Очевидно, что $P_i^1 \leftthreetimes P_i^2 = P_i$ — силовские p_i-подгруппы из G. Так как G — А-группа, то подгруппы P_i абелевы и, значит, $P_i = P_i^1 \times P_i^2$.

Из разрешимости группы G следует, что в ней существует силовская база Σ_1, каждый элемент которой пересекается с H по силовской подгруппе из H и пересечения всех элементов базы Σ_1 с H составляют силовскую базу Σ^* подгруппы H (см. [10]). Очевидно, что для всякого элемента g из G имеет место соотношение $g^{-1}C_G(H)\, g = C_G(g^{-1}Hg)$. Из этого равенства вытекает, что централизатор всякой подгруппы H в G дополняем в G тогда и только тогда, когда в G дополняем централизатор по крайней мере одной подгруппы, сопряженной с подгруппой H. Нетрудно убедиться, что подгруппы $P_1, P_2, \dots, P_n$ составляют силовскую базу группы G. Ввиду сопряженности силовских баз в группе G найдется такой элемент g_1 из G, что $g_1^{-1}\Sigma_1 g_1 = \Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$. Ясно, что $g_1^{-1}\Sigma^* g_1$ — силовская база подгруппы $g_1^{-1}Hg_1$. Так как $g_1^{-1}\Sigma_1 g_1 = \Sigma$, то $g_1^{-1}\Sigma^* g_1$ — силовская база подгруппы $g_1^{-1}Hg_1$, полученная путем пересечения подгруппы $g_1^{-1}Hg_1$ с элементами из Σ. Итак, можно считать, что $H \cap P_i = P_i^*$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Возможны два случая.

Случай 1. H — примарная подгруппа. Положим $H = P_1^*$. Тогда $P_1^* \subseteq P_1^1 \times P_1^2$. Так как любой элемент h из H однозначно представим в виде $h = ab$, где $a \in A$, $b \in B$ и $H \subseteq P_1^1 \times P_1^2$, то $a \in P_1^1$, $b \in P_1^2$ и, значит, $\mathrm{pr}_H(A) \subseteq P_1^1$ и $\mathrm{pr}_H(B) \subseteq P_1^2$.

Подгруппа $C_B(\mathrm{pr}_H(A)) = B_1$ содержит подгруппу $P_1 \cap B = P_1^2$ и, значит, $\mathrm{pr}_H(B) \subseteq C_B(\mathrm{pr}_H(A))$. Так как $C_1 = A_1 \leftthreetimes B_1$, подгруппа A_1 дополняема в G подгруппой $A_2 \leftthreetimes B$ и $A \subseteq C_1 \subseteq C$, то $C = A_1 \leftthreetimes D_1$ и $D_1 = (A_2 \leftthreetimes B) \cap C$. Так как любой элемент из подгруппы $A \cap C$ принадлежит подгруппе $C_G(\mathrm{pr}_H(A))$, то по установленному выше этот же элемент принадлежит подгруппе $C_G(\mathrm{pr}_H(B))$ и, следовательно, он принадлежит и подгруппе C_1. Из этого следует, что $A \cap C = A \cap C_1 = A_1$. Из абелевости фактор-группы G/A и очевидных изоморфизмов $AC \cong C/A \cap C = A_1 \leftthreetimes D_1/A_1 \cong D_1$ вытекает, что подгруппа D_1 абелева. Так как $\mathrm{pr}_H(B) \subseteq B_1 \subseteq D_1$, то из абелевости подгруппы D_1 следует, что $D_1 \subseteq C_G(\mathrm{pr}_H(B))$. Но тогда по установленному выше $D_1 \subseteq C_G(\mathrm{pr}_H(A))$. Из этих включений получаем, что $D_1 \subseteq C_1$ и, значит, $C = A_1 \leftthreetimes D_1 = C_1$. Так как C_1 дополняема в G, то и подгруппа $C = C_G(H)$ дополняема в G.

Случай 2. Пусть H не является примарной подгруппой. Тогда $H = \langle P_i^* \mid P_i^* \in \Sigma \rangle$. Нетрудно убедиться, что $C = C_G(H) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(P_i^*)$. Обозначим через $\mathrm{pr}_{P_i^*}(A)$ и $\mathrm{pr}_{P_i^*}(B)$ проекции подгруппы P_i^* на подгруппы A и B соответственно. Пользуясь предыдущими рассуждениями, можно показать, что $C_G(P_i^*) = C_G(\mathrm{pr}_{P_i^*}(A)) \cap C_G(\mathrm{pr}_{P_i^*}(B))$. Тогда, очевидно, имеем $\bigcap_{i=1}^{n} C_G(P_i^*) = \bigcap_{i=1}^{n} (C_G(\mathrm{pr}_{P_i^*}(A)) \cap C_G(\mathrm{pr}_{P_i^*}(B))) = C_G(X) \cap C_G(Y)$, где $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{P_i^*}(A)$, $Y = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{P_i^*}(B)$. Так как X — множество образующих подгруппы $\mathrm{pr}_H(A)$, а Y — множество образующих подгруппы $\mathrm{pr}_H(B)$, то $C_G(X) = C_G(\mathrm{pr}_H(A))$ и $C_G(Y) = C_G(\mathrm{pr}_H(B))$. Отсюда следует, что $C = C_G(H) = C_G(X) \cap C_G(Y) = C_1$. Но тогда $C_G(H)$ — дополняемая в G подгруппа. Теорема доказана.

1. *Hall Ph.* A characteristic property of soluble groups.— J. London Math. Soc., 1937, 12, p. 198—200.
2. *Черников С. Н.* Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами.—В кн.: Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 3—15.
3. *Hall Ph.* Complemented groups.— J. London Math. Soc., 1937, 12, p. 201—204.
4. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами.— Мат. сб., 1956, 39, с. 273—292.
5. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы.—Учен. зап. Перм. ун-та, 1960, 17, с. 16—31.
6. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1972.— 240 с.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
8. *Broshi A. M.* Finite groups whose Sylow subgroups are abelian.— J. Algebra, 1971, 17, p. 74—82.
9. *Курош А. Г.* Теория групп.— М.: Наука, 1967.— 648 с.
10. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I.— Berlin ets: Springer, 1967.— 793 S.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
06.07.81