УДК 519.41-47

Л. А. Курдаченко, В. Э. Горецкий

Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп

Систему σ подгрупп группы G будем называть плотной (строго плотной), если для любых двух подгрупп $A < B$, где A не максимальна в B, существует такая подгруппа $H \in \sigma$, что $A \leqslant H \leqslant B$ ($A < H < B$). Понятия плотной и строго плотной систем подгрупп были введены С. Н. Черниковым (см. [1—3], в книге [3] используется термин «обобщенно плотная система»). В работах [2, 3] были изучены некоторые классы групп с плотными системами нормальных и субнормальных подгрупп. Обобщением нормальных подгрупп служат подгруппы с конечным множеством сопряженных. Поскольку каждая такая подгруппа нормальна в некоторой подгруппе конечного индекса, то естественно называть ее почти нормальной подгруппой.

В данной статье рассматриваются группы с плотной системой почти нормальных подгрупп. К таким относятся группы, у которых любая подгруппа почти нормальна, т. е. группы с центром конечного индекса [4]. Из работы [5] следует, что такими же будут и группы, все абелевы подгруппы которых почти нормальны. Как показывает основной результат этой работы, класс групп с плотной системой почти нормальных подгрупп шире класса групп с центром конечного индекса.

В дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{R}$ класс бесконечных локально почти разрешимых групп с плотной системой почти нормальных подгрупп. Множество элементов группы G, каждый из которых имеет конечное множество сопряженных, является характеристической подгруппой G. Эту подгруппу называют FC-центром группы G. Обозначим ее через $FC(G)$.

Лемма 1. *Пусть $G \in \mathfrak{R}$, g — элемент бесконечного порядка. Тогда $g \in FC(G)$.*

Доказательство. Пусть p, q — различные простые числа, $g_1 = g^{p^2}$, $g_2 = g^{q^2}$. Так как подгруппа (g_i) не максимальна в (g) $i = 1, 2$, то отсюда нетрудно получить, что подгруппы (g_1) и (g_2) почти нормальны в G. Из взаимной простоты чисел p и q следует равенство $(g) = (g_1)(g_2)$, которое показывает, что почти нормальной будет и (g). Поэтому $g \in FC(G)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $G \in \mathfrak{R}$, $K = FC(G)$. Тогда фактор-группа G/K периодическая.*

Лемма 2. *Пусть G — конечная непримарная группа. Если среди максимальных подгрупп G существует примарная циклическая, то G — группа одного из следующих типов:*

(1) $G = (a)(b)$, $a^q = b^{p^n} = 1$, $(b) \triangle G$, p, q — *различные простые числа*;

(2) $G = A \rightthreetimes (b)$, $A = (a)$, $a^q = b^{p^n} = 1$, $C_G(b) = (b)$;

(3) $G = A \rightthreetimes (b)$, A — *элементарная абелева q-подгруппа*, $b^{p^n} = 1$, b *действует на A неприводимо*.

Это утверждение нетрудно получить, используя теорему 1 работы [6].

Лемма 3. *Пусть $G \in \mathfrak{R}$. Если группа G включает в себя бесконечную периодическую подгруппу, то G — FC-группа.*

Доказательство. Из условия вытекает существование в G бесконечной максимальной периодической подгруппы M. Так как группа G локально почти разрешима, то M локально-конечна. Покажем, что произвольный p-элемент $x \in M$ содержится в $FC(G)$, p — произвольное простое число. Предположим противное. Ввиду леммы Дицмана всякая конечная почти нормальная подгруппа G входит в FC-центр. Поэтому из предположения $x \notin FC(G)$ следует, что подгруппа (x) максимальна во всякой конечной подгруппе F, ее включающей. Если F — p-подгруппа, то $|F:(x)| \leqslant p$. Если же $\Pi(F) \neq \{p\}$, то из леммы 2 следует, что $\Pi(F) = \{p, q\}$ и $|F| \leqslant q^{|x|}|x|$, q — простое число. Отсюда нетрудно получить, что максимальная периодическая подгруппа G, содержащая x, конечна. Но это противоречит выбору подгруппы M. Итак, $x \in FC(G)$. Так как это включение справедливо для любого p-элемента, $p \in \Pi(M)$, то и $M \leqslant FC(G)$. Но все элементы конечного порядка FC-группы составляют подгруппу, так что M — периодическая часть FC-центра В частности, $M \lhd G$. Из максимальности M вытекает, что она содержит любой элемент конечного порядка группы G. Учитывая лемму 1, получаем равенство $G = FC(G)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G \in \mathfrak{P}$. Если G — FC-группа, то она конечна над центром.*

Доказательство. Пусть $H \leqslant G$, L — пересечение всех подгрупп, имеющих в H конечный индекс. Если индекс $|H:L|$ конечен, то L не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса. Из того факта, что G — FC-группа, получаем включение $L \leqslant \zeta(G)$. Подгруппу H можно представить в виде $H = F \cdot L$, где подгруппа F конечно-порожденная. В частности, индекс $|G:N_G(F)|$ конечен. Из включения $L \leqslant \zeta(G)$ получаем равенство $N_G(H) = N_G(F)$, которое показывает, что H почти нормальна в G.

Рассмотрим теперь случай, когда индекс $|H:L|$ бесконечен. Тогда H включает в себя подгруппу конечного индекса, не являющуюся максимальной. Поэтому H включает в себя в качестве подгруппы конечного индекса почти нормальную в G подгруппу M. Имеем $H = K \cdot M$ где K — конечно-порожденная подгруппа.Поскольку произведение двух почти нормальных подгрупп будет почти нормальной подгруппой, то H почти нормальна в G. Итак, любая подгруппа G почти нормальна в G. Из результатов работы [4] следует конечность индекса $|G:\zeta(G)|$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $G \in \mathfrak{P}$, $K = FC(G) \neq G$ и пусть любая периодическая подгруппа G конечна. Пусть F— максимальная периодическая подгруппа G. Если индекс $|F:F \cap K| = p$, p — простое число, то F — группа одного из следующих типов*:

(1) *F — p-группа с циклической максимальной подгруппой;*

(2) $F = (a)(b)$, $a^q = b^{p^n} = 1$, $(b) \lhd F$;

(3) $F = (a) \leftthreetimes (b)$, $a^q = b^{p^n} = 1$, $C_F(b) = (b)$

(4) $F = A \leftthreetimes (b)$, *$A$ — элементарная абелева q-подгруппа, $b^{p^n} = 1$, b действует на A неприводимо.*

Доказательство. Обозначим через g элемент, для которого $F = (g) \cdot F \cap K$. Можно считать, что g — p-элемент. Так как $g \notin K$, то (g) максимальна в F. Если $\Pi(F) = \{p\}$, то F — группа типа (1). Если же подгруппа F непримарна, то строение F получаем из леммы 2. Лемма доказана.

Доказательство. Обозначим через g элемент, для которого $F = (g) \cdot F \cap K$. Можно считать, что g—p-элемент. Так как $g \notin K$, то (g) максимальна в F. Если $\Pi(F) = \{p\}$, то F — группа типа (1). Если же подгруппа F непримарна, то строение F получаем из леммы 2. Лемма доказана.

В дальнейшем через $P(G)$ будем обозначать максимальную нормальную периодическую подгруппу.

Лемма 6. *Пусть $G \in \mathfrak{P}$, $P(G) = (1)$, g — элемент бесконечного порядка. Тогда $C_G(g) \leqslant FC(G)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 достаточно показать, что $C_G(g)$ не содержит элементов конечного порядка. Предположим противное, пусть h — элемент конечного порядка из $C_G(g)$. Между подгруппами (h) и $(h) \times (g)$ существует почти нормальная подгруппа $(h) \times (g^n)$. Ее характеристическая подгруппа (h) нормальна в нормализаторе подгруппы $(h) \times (g^n)$, а так как последняя имеет в G конечный индекс, то (h) почти нормальна в G. Из леммы Дицмана следует, что $P(G) \neq (1)$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Следствие. *Пусть $G \in \mathfrak{P}$, $P(G) = (1)$. Тогда фактор-группа $G/FC(G)$ конечна.*

Пусть $A \leqslant \operatorname{Aut} G$, G — абелева группа. Назовем группу A рационально неприводимой (см. [8]), если любая неединичная A-допустимая подгруппа G определяет периодическую фактор-группу. Если A — рационально неприводимая группа автоморфизмов абелевой группы G и $A=(\alpha)$,то автоморфизм α также назовем рационально неприводимым.

Лемма 7. *Пусть $G = A \leftthreetimes (b)$, A — абелева группа без кручения, $|b| = p$ — простое число, $C_G(b) = (b)$. Если $G \in \mathfrak{P}$ то элемент b индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм и A — свободная абелева группа ранга $p - 1$.*

Доказательство. Выберем в A такую конечно-порожденную подгруппу A_0, что $A_0 \lhd G$ и элемент b индуцирует на A_0 рационально неприводимый автоморфизм. Между подгруппами (b) и $A_0 \leftthreetimes (b)$ существует некоторая почти нормальная подгруппа $A_1 \leftthreetimes (b)$, причем ее можно выбрать так, чтобы индекс $|A_0 : A_1|$ был конечным. Положим $N_G(A_1 \leftthreetimes (b)) = A_2 \leftthreetimes (b)$. Тогда и индекс $|A : A_2|$ конечен. Нетрудно видеть, что отображение $x \to [b, x]$, $x \in A_2$ будет гомоморфизмом A_2 на $[b, A_2]$. Ядро этого гомоморфизма есть $1) = C_{A_2}(b)$, так что $A_2 \cong [b, A_2]$. Поскольку $A_1 \leftthreetimes (b) \lhd A_2 \leftthreetimes (b)$, то нетрудно получить включение $[b, A_2] \leqslant A_1$. Отсюда уже следует равенство рангов подгрупп A_2 и A_1 и конечная порожденность подгруппы A_2. Следовательно, подгруппа A будет конечно-порожденной. Далее, индекс $|A : A_0|$ конечен, поэтому из выбора подгруппы A_0 следует, что b действует на A рационально неприводимо. Пусть ранг A равен k. Обозначим через $\hat{A}$ пополнение группы A. Так как любой автоморфизм A однозначно продолжается до автоморфизма $\hat{A}$, то на b можно смотреть как на автоморфизм $\hat{A}$. Далее, $\hat{A}$ можно рассматривать как векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, а b — как его линейное преобразование. Обозначим через β матрицу этого линейного преобразования в некотором базисе. Так как; $|b| = p$, то β будет корнем многочлена $\Phi_p(X) = (x^p - 1)/(x - 1)$. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbf{Q}$ (см. [9], теорема 21.13), то он будет минимальным многочленом матрицы β. Но тогда характеристический многочлен $f(x)$ матрицы β имеет степень n, не меньшую $p—1$. Но $n = \dim \hat{A} = k$. Отсюда получаем, что $k = p - 1$, т. е. A имеет ранг $p - 1$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $G \in \mathfrak{P}$, $P(G) = (1)$, $G \neq FC(G)$. Тогда фактор-группа $G/FC(G)$ является конечной примарной группой.*

Доказательство. Конечность $G/FC(G)$ вытекает из следствия леммы 6. Предположим, что множество $\Pi(G/FC(G))$ содержит по меньшей мере два различных простых числа p и q. Пусть $xFC(G)$ — элемент порядка p, $yFC(G)$ —элемент порядка q. Из леммы 1 получаем конечность порядков элементов x, y. Так как $P(G) = (1)$, то $FC(G)$ — подгруппа без кручения в частности, $FC(G)$ — абелева подгруппа без кручения. Отсюда следует, что $|x| = p$, $|y| = q$. Рассмотрим подгруппы $FC(G) \leftthreetimes (x)$ и $FC(G) \leftthreetimes (y)$. Ввиду леммы 7, с одной стороны, ранг $FC(G)$ равен $p—1$, а с другой, он равен $q— 1$. Полученное противоречие доказывает примарность фактор-группы $G/FC(G)$.

Лемма 8. *Если $G \in \mathfrak{P}$, $P(G) = (1)$, $2 \in \Pi(G)$, то G — бесконечная диэдральная группа.*

Доказательство. Пусть i — инволюция, $K = FC(G)$. Поскольку $P(G) = (1)$, то K — абелева группа без кручения. Предыдущая лемма показывает, что K— бесконечная циклическая группа. Так как ввиду леммы 6 $C_G(K) = K$, то $G = K \leftthreetimes (i)$ и $iai = a^{-1}$ для любого $a \in K$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G \in \mathfrak{P}$, $P(G) = (1)$, $G \neq FC(G)$, $2 \notin \Pi(G)$. Тогда $G = FC(G) \leftthreetimes (b)$, $|b| = p$ — простое число, $C_G(b) = (b)$, $FC(G)$ — свободная абелева группа ранга $p - 1$.*

Доказательство. Положим $K = FC(G)$. Так как $G \neq FC(G)$, то лемма 1 показывает, что группа G содержит элементы конечного порядка. Из леммы 7 и ее следствия получаем, что $L = G/K$ — p-группа, а K — свободная абелева группа ранга $p - 1$. Пусть $K \neq xK = \bar{x}$. Из леммы 1 получаем конечность порядка элемента x. В частности, $2 \notin \Pi(L)$. Далее из леммы 6 вытекает равенство $C_k(\bar{x}) = (1)$, т. е. автоморфизм, индуцированный любым неединичным элементом L, не имеет в K неподвижных точек. Обозначим через $\widehat{K}$ пополнение K. Каждый автоморфизм группы K можно однозначно продолжить до автоморфизма $\widehat{K}$. Будем смотреть на $\widehat{K}$ как на векторное пространство над $\mathbf{Q}$, а на L—как на группу его линейных преобразований. Каждое линейное преобразование из L не имеет в $\widehat{K}$ неподвижных точек. Но тогда L — циклическая p-группа (см. [10], лемма V.8.12). Пусть bK — смежный класс, порождающий L. Тогда $G = K \leftthreetimes (b)$. Из следствия леммы 7 получаем, что $|b| = p^n$.

Предположим, что $n > 1$. Будем смотреть на b как на линейное преобразование векторного пространства $\widehat{K}$. Пусть β — матрица этого преобразования в некотором базисе. Будучи элементом порядка p^n, β является корнем многочлена деления круга $\Phi_{p^n}(x)$. Но этот многочлен неприводим над $\mathbf{Q}$ (см. [9], теорема 21.13). $\Phi_{p^n}(x)$ будет минимальным многочленом матрицы β. Обозначим через $f(x)$ характеристический многочлен матрицы β, $t = \deg f(x)$. Имеем $t = \dim \widehat{K} = p - 1$. С другой стороны, $t \geqslant \deg \Phi_{p^n}(x)$. Полученное противоречие показывает, что $|b| = p$. Лемма доказана.

Т е о р е м а. *Пусть G — локально почти разрешимая бесконечная группа. Группа G тогда и только тогда обладает плотной системой почти нормальных подгрупп, когда она является группой одного из следующих типов:*

(1) G — группа с центром конечного индекса;

(2) $G = K \leftthreetimes (b)$, $|b| = p$ — простое число, K — свободная абелева группа ранга $p - 1$, $C_G(K) = K$, элемент b индуцирует на K рационально неприводимый автоморфизм;

(3) G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу P, что $G/P = K/P \leftthreetimes (bP)$ — группа типа (2), гр (b, P) — группа одного из типов (1)—(4) леммы 5, и любая циклическая подгруппа гр(b, P), не входящая в P, максимальна в гр (b, P).

В частности, группа G тогда и только тогда обладает плотной системой почти нормальных подгрупп, когда она обладает строго плотной системой почти нормальных подгрупп.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G включает в себя бесконечную периодическую подгруппу, то она ввиду леммы 3 является FC-группой. Лемма 4 показывает, что в этом случае G конечна над центром, т.е. G — группа типа (1).

Поэтому предполагаем, что любая периодическая подгруппа группы G конечна. Если G не содержит элементов конечного порядка, то из лемм 1 и 4 следует, что G — группа типа(1). Будем считать, что G содержит элементы конечного порядка. Если $P(G) = (1)$, то ввиду лемм 8, 9 G — группа типа (2). Пусть $P(G) = P \neq (1)$ F — максимальная периодическая подгруппа G. Если $F \leqslant FC(G) = K$, то G — FC-группа. Пусть $F \neq F \cap K$. Тогда по доказанному выше G/P — группа типа (2). В частности, $|F : F \cap K| = p$ Строение F дает лемма 5. Наконец, если $c \in F \setminus K$, то легко видеть, что подгруппа (c) максимальна в F.

Для доказательства достаточности и второго утверждения теоремы достаточно показать, что группы типов (1)—(3) обладают строго плотной системой почти нормальных подгрупп. Для групп типа (1) это очевидно. Поэтому пусть G — группа типа (2) или (3), $A < B \leqslant G$ причем A не максимальна в B.

Предположим сначала, что A конечна. ˥усть $A \leqslant K$. Если B конечна и $B \leqslant K$, то все доказано (ед K — FC-центр G). сли B конечна, но $B \nleqslant K$ то $|B : B \cap K| = |B : B \cap P| = p$, в частности, $B \cap P$ максимальна в B. Но $B \cap P > A$ и $B \cap P$ почти нормальна в G. Пусть теперь подгруппа B бесконечна. Если $B \leqslant K$, то все доказано. Пусть $B \nleqslant K$. Так как в группе типа (2) любая подгруппа, содержащая как элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка, имеет конечный индекс, то индекс $|G : BP|$ конечен. Из конечности P следует конечность индекса $|BP : B|$, т. е. и конечность индекса $|G:B|$. Тогда $A \leqslant B \cap K$, причем $A \neq B \cap K \neq B$ и подгруппа $B \cap K$ имеет в G конечный индекс. Пусть теперь $A \nleqslant K$. Тогда либо A — максимальная периодическая подгруппа G, либо AP — максимальная периодическая подгруппа G. В любом из этих случаев B содержит элементы бесконечного порядка, а потому индекс $|G:B|$ конечен. Пусть $M = \bigcap\limits_{x \in G} B^x$, $L = M \cap K$. Существует такое число $m \in \mathbf{N}$, что $K^m \leqslant L$ и K^m — подгруппа без кручения. Поскольку $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} (K^m)^n = (1)$, то для некоторого $l \in \mathbf{N}$ имеем $AK^{ml} \neq B$.

Подгруппа $K^{ml}A$ имеет в G конечный индекс, в частности, она почти нормальна. Остается рассмотреть случай, когда подгруппа A бесконечна. Если $A \nleqslant K$, то индекс $|G:A|$ конечен, и все доказано. Пусть $A \leqslant K$. Если $B \leqslant K$, то снова все доказано. Если $B \nleqslant K$, то индекс $|G:B|$ конечен, $A \neq B \cap K \neq B$ (так как $p = |B : B \cap K|$). Итак, во всех случаях между A и B строго содержится почти нормальная подгруппа $B \cap K$. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с плотной системой дополняемых подгрупп.— В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 5—29.
2. *Пылаев В. В.* Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп.— В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 197—217.
3. *Пылаев В. В.* Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп.— В кн.: Исследования по теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 111—138.
4. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups.— Math. Z., 1955, 63, N 1, S. 76—93.
5. *Еремин И. И.* Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп.— Матем. сб., 1959, 47, с. 45—54.
6. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы, обладающие циклической максимальной подгруппой.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 5, с. 646—654.
7. *Gorenstein D.* Finite groups.— New York: Harper and Row, 1968.— 527 p.
8. *Robinson D. J. S.* Finiteness condition and generalized soluble groups, I.—Berlin ets.: Springer, 1972.— 210 p.
9. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М.: Наука, 1969. — 669 с.
10. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I.— Berlin etc:. Springer, 1967.— 793 S.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию 20.11.78
после переработки — 23.10.81