УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ

On classes of the Poisson integrals of functions belonging to the unit balls of the spaces L_s, $1 \le s \le \infty$, we establish asymptotic equalities for upper bounds of approximations by the Vallée Poussin sums in a uniform metric. Asymptotic equalities are obtained also for the case of approximation by the Vallée Poussin sums in metrics of the spaces L_s, $1 \le s \le \infty$, on classes of the Poisson integrals of functions belonging to the unit ball of the space L_1.

На класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_s, $1 \le s \le \infty$, знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень сумами Валле Пуссена в рівномірній метриці. Асимптотичні рівності також встановлено у випадку наближення сумами Валле Пуссена в метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$, на класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничній кулі простору L_1.

Пусть L_s, $1 \le s < \infty$, — пространство 2π-периодических суммируемых в s-й степени функций f с нормой

$$\|f\|_s = \|f\|_{L_s} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |\, f(t)\,|^s dt \right)^{1/s};$$

L_∞ — пространство 2π-периодических измеримых и существенно ограниченных функций, в котором норма задана формулой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C — пространство 2π-периодических непрерывных функций, норма в котором задана следующим образом:

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Интегралами Пуассона суммируемой функции $\varphi(\cdot)$ называют функции $f(x)$, определяющиеся с помощью равенства

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(x-t) P_{q,\beta}(t)dt, \quad A_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в котором $P_{q,\beta}(t)$ — ядра Пуассона с параметрами $q \in (0,\, 1)$ и $\beta \in \mathbb{R}$, т. е. функции вида

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Множество всех функций, допускающих представление в виде (1) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L_1, будем обозначать через $L^q_\beta \mathfrak{N}$. В рамках данной работы в качестве $\mathfrak{N}$ будут использоваться множества

$$U_s^0 = \left\{ \varphi \in L_s \colon \|\varphi\|_s \le 1, \varphi \perp 1 \right\}.$$

При этом для удобства положим $L^q_{\beta,s} \overset{\mathrm{df}}{=} L^q_{\beta,s}U^0_s$.

Пусть $f \in L$ и ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

является рядом Фурье функции f. Через $S_n(f;\, x)$ обозначим частные суммы Фурье порядка n функции f:

$$S_n(f) = S_n(f;\, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тригонометрические полиномы вида

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

называются суммами Валле Пуссена функции f с параметрами n и p. При $p = 1$ полиномы $V_{n,p}(f;x)$ являются обычными частными суммами Фурье $S_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ функции f. Если же $p = n$, то суммы $V_{n,p}(f)$ превращаются в известные суммы Фейера $\sigma_{n-1}(f;x)$ порядка $n-1$ функции f:

$$\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Исследования аппроксимативных свойств сумм $V_{n,p}(f)$ были начаты Валле Пуссеном [1, 2], который впервые оценил величины $\|f - V_{n,p}(f)\|_C$ через наилучшие приближения тригонометрическими полиномами в равномерной метрике. Впоследствии исследования в данном направлении были продолжены в роботах С. М. Никольского [3], С. Б. Стечкина [4, 5], В. Т. Гаврилюк [6], О. Д. Габисонии [7], А. А. Захарова [8] и др.

Цель данной работы состоит в нахождении асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \sup_{f \in L^q_{\beta,s}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C \tag{3}$$

и

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\big)_{L_s} = \sup_{f \in L^q_{\beta,1}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_s \tag{4}$$

при $n - p \to \infty$ и произвольных значениях параметров $1 \le s \le \infty$, $q \in (0,1)$ и $\beta \in \mathbb{R}$.

Задача о нахождении асимптотических равенств для точных верхних граней приближений суммами $V_{n,p}(f)$ в равномерной метрике на тех или других функциональных классах изучалась многими авторами, среди которых Б. Надь [9, 10], С. М. Никольский [11, 12], С. Б. Стечкин [13], А. В. Ефимов [14, 15], С. А. Теляковский [16 – 20], А. Ф. Тиман [21, 22], В. И. Рукасов [23 – 25], Л. А. Островецкий [26] и др. Более детально с историей данного вопроса можно ознакомиться, например, по библиографическим комментариям монографий [27–29].

Заметим, что данная работа тесно связана с работой автора [30], в которой найдены асимптотические равенства для величины (3) при $s=\infty$, а также для величины (4) при $s=1$.

Для формулирования основных результатов работы введем следующие обозначения:

$$K_{q,p}(v) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 2^{-1/v}\left\|\frac{\sqrt{1-2q^p\,\cos p\,t+q^{2p}}}{1-2q\,\cos t+q^2}\right\|_v, \; 1\le v\le\infty, \qquad q\in(0,1), \quad p\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\sigma(v,\,p) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; v=1 \;\; \text{и} \;\; p=1, \\ 2 & \text{при} \;\; 1< v\le\infty \;\; \text{и} \;\; p=1, \\ 3 & \text{при} \;\; 1\le v\le\infty \;\; \text{и} \;\; p\in\mathbb{N}\backslash\{1\}. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, $n,\,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$. Тогда*

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s};V_{n,p})_C=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}\,K_{q,p}(s')+O(1)\frac{q\,\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right), \tag{7}$$

где

$$\delta(s)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \;\; s=2, \\ 1 & \textit{при} \;\; s\in[1,\infty]\backslash\{2\}, \end{cases}$$

$s'=\dfrac{s}{s-1}$, *величины $K_{q,p}(s')$ и $\sigma(s',p)$ определены равенствами* (5) *и* (6) *соответственно, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по параметрам n, p, q, β и s.*

Доказательство. Пусть $f\in L^q_{\beta,s}$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$. В работе [30, с. 100] для отклонения $\rho_{n,p}(f;x)\stackrel{\mathrm{df}}{=}f(x)-V_{n,p}(f;x)$ получено интегральное представление вида

$$\rho_{n,p}(f;x)=\frac{1}{\pi\,p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt, \tag{8}$$

в котором

$$\mathrm{Z}_q(t)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}, \quad q\in(0,1), \tag{9}$$

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)=\sum_{k=n-p+1}^{n}q^k\cos\left(kt+\theta(t)-\frac{\beta\,\pi}{2}\right), \quad q\in(0,1), \quad \beta\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

$\theta(t)=\theta(q,t)$ определяется формулами

$$\frac{1-q\cos t}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}=\cos\theta(t), \tag{11}$$

$$\frac{q\sin t}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} = \sin\theta(t), \tag{12}$$

а функция φ связана с f с помощью равенства (1).

В силу формул (3) и (8) и инвариантности множеств U_s^0 относительно сдвига аргумента получаем

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \frac{1}{\pi\, p}\sup_{\varphi\in U_s^0}\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt\right\|_C =$$

$$= \frac{1}{\pi\, p}\sup_{\varphi\in U_s^0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt. \tag{13}$$

Согласно соотношениям двойственности (см., например, [31, с. 27]) для произвольной функции $u\in L_{s'}$, $1\le s'\le\infty$,

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|u(t)-\lambda\|_{s'} = \sup\left\{\int\limits_0^{2\pi}u(t)y(t)dt\colon\ \|y\|_s\le 1, \int\limits_0^{2\pi}y(t)\,dt=0\right\}, \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \tag{14}$$

Применив равенство (14) при $u(t)=\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ и $y(t)=\varphi(t)$, равенства (13) можно продолжить:

$$\frac{1}{\pi\, p}\sup_{\varphi\in U_s^0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt = \frac{1}{\pi\, p}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)-\lambda\|_{s'}. \tag{15}$$

В работе [30, с. 101] функция $\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ вида (10) была представлена следующим образом:

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t) = q^{n-p+1}\mathrm{Z}_q(t)\left(\cos\left((n-p+1)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)G_{p,q}(t)-\right.$$

$$\left.-\sin\left((n-p+1)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)H_{p,q}(t)\right), \tag{16}$$

где

$$G_{p,q}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \cos 2\theta(t) - q^p\cos(p\,t+2\theta(t)), \tag{17}$$

$$H_{p,q}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sin 2\theta(t) - q^p\sin(p\,t+2\theta(t)). \tag{18}$$

Далее нам понадобится следующее утверждение из работы [32, с. 1083].

Лемма 1. *Пусть $1\le v\le\infty$ и 2π-периодические функции $g(t)$ и $h(t)$ имеют ограниченную вариацию, если $v=1$, или принадлежат классу Гельдера $K\,H^1$, если $1<v\le\infty$. Тогда для функции $\varphi(t)=g(t)\cos(m\,t+\alpha)+h(t)\sin(m\,t+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$, выполняются асимптотические (при $m\to\infty$) формулы*

$$\|\varphi\|_v = (2\,\pi)^{-1/v}\,\|\cos t\|_v\|r\|_v + O(1)M\,m^{-1}, \tag{19}$$

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\|\varphi-c\|_v = (2\,\pi)^{-1/v}\,\|\cos t\|_v\|r\|_v + O(1)M\,m^{-1}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\varphi(t+\lambda)-\varphi(t)\|_v=(2\,\pi)^{-1/v}\,\|\cos t\|_v\|r\|_v+O(1)M\,m^{-1}, \tag{21}$$

в которых

$$r(t)=\sqrt{g^2(t)+h^2(t)}, \tag{22}$$

$$M=M_v=\begin{cases}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(g)+\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(h) & \textit{при}\;\; v=1,\\ K+v^{-1}\|r\|_s^{1-v}\;\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(r^v) & \textit{при}\;\; 1<v<\infty,\\ K & \textit{при}\;\; v=\infty,\end{cases} \tag{23}$$

а величины $O(1)$ равномерно ограничены относительно всех рассматриваемых параметров.

Для оценки величины, находящейся в правой части формулы (15), применим лемму 1, положив в ее условиях $\varphi(t)=q^{-n+p-1}\,\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$, $g(t)=$ $=\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t)$, $h(t)=-\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t)$, $m=n-p+1$, $\alpha=-\dfrac{\beta\,\pi}{2}$ и $v=s'$.

С учетом того, что

$$\sqrt{\left(\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t)\right)^2+\left(\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t)\right)^2}=\mathrm{Z}_q^2(t)\sqrt{G_{p,q}^2(t)+H_{p,q}^2(t)}=$$
$$=\mathrm{Z}_q^2(t)\sqrt{1-2q^p\cos p\,t+q^{2p}}=\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)},$$

из формулы (20) получаем

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)-\lambda\right\|_{s'}=q^{n-p+1}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left\|q^{-n+p-1}\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)-c\right\|_{s'}=$$
$$=q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{(2\pi)^{1/s'}}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}+O(1)\frac{M_{s',p}}{n-p+1}\right), \tag{24}$$

где

$$M_{s',p}=\begin{cases}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})+\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q}) & \text{при}\;\; s'=1,\\ \big\|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\|_C+\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\big\|_C+ & \\ \qquad+\dfrac{1}{s'}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{1-s'}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2\,s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) & \text{при}\;\; 1<s'<\infty,\\ \|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\|_C+\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\|_C & \text{при}\;\; s'=\infty.\end{cases} \tag{25}$$

Найдем оценку сверху величины $M_{s',p}$ из (25). Рассмотрим сначала случай $s'=1$. Как следует из формул (29), (37) и (38) работы [30, с. 102, 103]

$$M_{s',p}=M_{1,p}=\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})+\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})=\begin{cases}O(1)\dfrac{q}{1-q} & \text{при}\;\; p=1,\\ O(1)\dfrac{q}{(1-q)^3} & \text{при}\;\; p=2,3,\ldots.\end{cases} \tag{26}$$

Пусть теперь $s' = \infty$. Поскольку согласно (17) и (18)

$$\big(G_{p,q}(t)\big)' = p\,q^p \sin(p\,t + 2\,\theta(t)) - 2\,\theta'(t) H_{p,q}(t),$$
$$\big(H_{p,q}(t)\big)' = -p\,q^p \cos(p\,t + 2\,\theta(t)) + 2\,\theta'(t) G_{p,q}(t)$$

и, кроме того, в силу (11) и (12)

$$\theta'(t) = q(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t),$$

окончательно получаем

$$\big(G_{p,q}(t)\big)' = p\,q^p \sin(p\,t + 2\,\theta(t)) - 2\,q(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t) H_{p,q}(t), \tag{27}$$
$$\big(H_{p,q}(t)\big)' = -p\,q^p \cos(p\,t + 2\,\theta(t)) + 2\,q(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t) G_{p,q}(t). \tag{28}$$

Далее, используя равенство

$$\big(\mathrm{Z}_q^2(t)\big)' = -2\,\mathrm{Z}_q^2(t)\, h_q(t), \tag{29}$$

а также формулы (27) и (28), находим

$$\big(\mathrm{Z}_q^2(t) G_{p,q}(t)\big)' = -2\,\mathrm{Z}_q^2(t)\, G_{p,q}(t) h_q(t) + p\,q^p\, \mathrm{Z}_q^2(t) \sin(p\,t + 2\,\theta(t)) - \\ -2\,q((\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t))(\mathrm{Z}_q^2(t)\, H_{p,q}(t)), \tag{30}$$
$$\big(\mathrm{Z}_q^2(t) H_{p,q}(t)\big)' = -2\,\mathrm{Z}_q^2(t)\, H_{p,q}(t) h_q(t) - p\,q^p\, \mathrm{Z}_q^2(t) \cos(p\,t + 2\,\theta(t)) + \\ +2\,q((\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t))(\mathrm{Z}_q^2(t)\, G_{p,q}(t)). \tag{31}$$

В силу того, что

$$\|h_q(t)\|_C \le \frac{q}{1-q}, \tag{32}$$

$$\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C = \frac{1}{(1-q)^2}, \tag{33}$$

$$\big\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\big\|_C = \frac{1}{1-q}, \tag{34}$$

на основании равенств (30) имеем

$$\big\|(\mathrm{Z}_q^2(t) G_{p,q}(t))'\big\|_C \le 2\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C (1+q^p)\|h_q(t)\|_C + p\,q^p \|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C + \\ + 2\,q\big\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\big\|_C\,(1+q^p)\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C = \\ = \|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C \Big(2(1+q^p)\|h_q(t)\|_C + p\,q^p + 2q(1+q^p)\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Big) \le \\ \le \frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{4q}{1-q} + p\,q^p + \frac{4\,q}{1-q}\right) = \\ = \frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{8\,q}{1-q} + p\,q^p\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}. \tag{35}$$

Аналогично, в силу (31) – (34)

$$\left\|(\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t))'\right\|_C \le 2\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C(1+q^p)\|h_q(t)\|_C + p\,q^p\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C +$$

$$+\,2\,q\left\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\,(1+q^p)\|\mathrm{Z}_q^2(t)\right\|_C =$$

$$= \|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Big(2(1+q^p)\|h_q(t)\|_C + p\,q^p + 2q(1+q^p)\|(\cos t - q)\mathrm{Z}_q^2(t)\|_C\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{(1-q)^2}\left(\frac{8\,q}{1-q} + p\,q^p\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}. \qquad (35')$$

Итак, согласно (25), (35) и (35′), при $s' = \infty$

$$M_{s',p} = M_{\infty,p} = \left\|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\right\|_C + \left\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\right\|_C = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}.$$

При $p = 1$ последняя оценка может быть улучшена. В этом случае (см. [30, с. 102])

$$\mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t) = g_q(t), \qquad \mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t) = h_q(t) \qquad (36)$$

и поскольку

$$(g_q(t))' < \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad (h_q(t))' < \frac{q}{(1-q)^2},$$

то

$$M_{s',p} = M_{\infty,1} = \left\|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{1,q})'\right\|_C + \left\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{1,q})'\right\|_C = O(1)\frac{q}{(1-q)^2}.$$

Таким образом, окончательно можем записать

$$M_{s',p} = M_{\infty,p} = \left\|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\right\|_C + \left\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\right\|_C =$$

$$= \begin{cases} O(1)\dfrac{q}{(1-q)^2} & \text{при } \ p = 1, \\[2mm] O(1)\dfrac{q}{(1-q)^3} & \text{при } \ p = 2, 3, \ldots. \end{cases} \qquad (37)$$

Пусть, наконец, $1 < s' < \infty$. Поскольку

$$\mathrm{Z}_q'(t) = -h_q(t)\,\mathrm{Z}_q(t), \qquad (38)$$

то

$$\left(\left(\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right)^{s'}\right)' = s'\left(\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right)^{s'-1}\frac{2\,\mathrm{Z}_q(t)\,\mathrm{Z}_q'(t)\,\mathrm{Z}_q^p(p\,t) - \mathrm{Z}_q^2(t)\,\mathrm{Z}_{q^p}'(p\,t)p}{\mathrm{Z}_{q^p}^2(p\,t)} =$$

$$= s'\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\big(p\,h_{q^p}(p\,t) - 2\,h_q(t)\big). \qquad (39)$$

Следовательно, в силу (39)

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right)'\right|dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|s'\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}(p\,h_{q^p}(p\,t) - 2\,h_q(t))\right|dt \le$$

$$\le s'\big(p\|h_{q^p}(p\,t)\|_C + 2\|h_q(t)\|_C\big)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}dt =$$

$$= s'\big(p\|h_{q^p}(p\,t)\|_C + 2\|h_q(t)\|_C\big)\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{s'}. \tag{40}$$

Объединяя формулы (32) и (40), записываем неравенство

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) \le s'\left(\frac{p\,q^p}{1-q^p}+\frac{2\,q}{1-q}\right)\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{s'} < \frac{3\,s'q}{1-q}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{s'}. \tag{41}$$

Кроме того, с учетом (33) и очевидного равенства

$$\left\|\frac{1}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_C = 1+q^p \tag{42}$$

получаем

$$\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'} \le (1+q^p)\|\mathrm{Z}_q^2(t)\|_{s'} \le (2\pi)^{1/s'}\ \frac{1+q^p}{(1-q)^2}. \tag{43}$$

С учетом (41) и (43) при произвольных $1 < s' < \infty$ справедлива оценка

$$\frac{1}{s'}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{1-s'}\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}. \tag{44}$$

Сопоставляя формулы (25), (37) и (44), при $1 < s' < \infty$ получаем

$$M_{s',p} = \big\|(\mathrm{Z}_q^2\,G_{p,q})'\big\|_C + \big\|(\mathrm{Z}_q^2\,H_{p,q})'\big\|_C +$$

$$+\frac{1}{s'}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'}^{1-s'}\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathrm{Z}_q^{2s'}(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}^{s'}(p\,t)}\right) = O(1)\frac{q}{(1-q)^3}.$$

При $p=1$ последняя оценка может быть улучшена. Действительно, в силу равенств (36) и (25), а также соотношений (60) из работы [32, с. 1088] получаем

$$M_{s',1} = \|g_q'\|_C + \|h_q'\|_C + \frac{1}{s'}\|\mathrm{Z}_q\|_{s'}^{1-s'}\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{Z}_q^{s'}(t)) = O(1)\frac{q}{(1-q)^2}, \quad 1 < s' < \infty.$$

Итак, окончательно имеем

$$M_{s',p} = \begin{cases} O(1)\dfrac{q}{(1-q)^2} & \text{при } p=1, \\ O(1)\dfrac{q}{(1-q)^3} & \text{при } p=2,3,\ldots, \end{cases} \qquad 1 < s' < \infty. \tag{45}$$

Исходя из соотношений (13), (15), (26), (37) и (45) получаем равенство

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s};V_{n,p})_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{\pi\,p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{(2\pi)^{1/s'}}\left\|\frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)}\right\|_{s'} + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right), \tag{46}$$

$$1 \le s \le \infty, \quad p\in\mathbb{N}, \quad q\in(0,1), \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

В случае $s=2$ вместо оценки (46) для величины $\mathcal{E}(L^q_{\beta,s};V_{n,p})_C$ можем записать точное равенство. Для этого, опираясь на формулы (3) и (15), а также на равенства (8) работы [30, с. 99], находим

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2};V_{n,p})_C=\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty}q^j\cos\left(jt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\lambda\right\|_2=$$

$$=\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=n-p+1}^{n-1}(k-n+p)q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\lambda\right\|_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left(\lambda^2+\frac{1}{p^2}\sum_{k=n-p+1}^{n-1}(k-n+p)^2\,q^{2k}+\sum_{k=n}^{\infty}q^{2k}\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{q^{2(n-p)}}{p^2}\sum_{k=1}^{p-1}k^2\,q^{2k}+\sum_{k=n}^{\infty}q^{2k}\right)^{1/2}. \tag{47}$$

Поскольку для произвольных $l\in\mathbb{N}$ и $\rho\in(0,1)$

$$\sum_{k=1}^{l}k^2\,\rho^k=\frac{\rho(1+\rho)-\rho^{l+1}((l+1)^2-(2l^2+2l-1)\rho+l^2\,\rho^2)}{(1-\rho)^3} \tag{48}$$

(см., например, [33, с. 603]), положив в (48) $l=p-1$, $\rho=q^2$, получим

$$\frac{q^{2(n-p)}}{p^2}\sum_{k=1}^{p-1}k^2\,q^{2k}+\sum_{k=n}^{\infty}q^{2k}=$$

$$=\frac{q^{2(n-p)}(q^2(1+q^2)-q^{2p}(p^2-q^2(2p^2-2p-1)+q^4(p-1)^2))}{p^2(1-q^2)^3}+\frac{q^{2n}}{1-q^2}=$$

$$=\frac{q^{2(n-p)}(q^2(1+q^2)-q^{2p}(q^2(2p+1)+q^4(1-2p)))}{p^2(1-q^2)^3}=$$

$$=\frac{q^{2(n-p+1)}(1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1)))}{p^2(1-q^2)^3}. \tag{49}$$

Из (47) и (49) следует равенство

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2};V_{n,p})_C=\frac{q^{n-p+1}}{\sqrt{\pi}\,p}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}}. \tag{50}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости формулы (7) при $s=2$, достаточно заметить, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt=\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3} \tag{51}$$

(см., например, формулы 3.616.2 и 3.616.7 из [34, с. 382, 383]).

Объединяя оценку (46) с равенствами (50) и (51), приходим к формуле (7).

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 1.

При $s = 2$ формула (7) превращается в точное равенство (50), которое при $p = 1$ (случай приближения суммами Фурье $S_{n-1}(f)$) принимает вид

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; S_{n-1})_C = \frac{q^n}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}, \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

а при $p = n$ (приближение суммами Фейера $\sigma_{n-1}(f)$)

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; \sigma_{n-1})_C =$$

$$= \frac{q}{n\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1+q^2-q^{2n}(2n+1-q^2(2n-1))}{(1-q^2)^3}}, \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

При произвольных $1 \le s \le \infty$ и $p = 1$ из формулы (7) получаем равенство

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; S_{n-1})_C =$$

$$= q^n \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'} 2^{1/s'}} \left\| \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} \right\|_{s'} + O(1)\frac{q\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}} \right). \tag{54}$$

Равенство (54) доказано в работе [32]. При $s = \infty$ из (54) следует асимптотическое при $n \to \infty$ равенство

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\infty}; S_{n-1})_C = q^n \left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)} \right), \tag{55}$$

где

$$\mathbf{K}(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}} = \frac{1}{2}K_{q,1}(1)$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Асимптотическая формула (55) отражает результат С. М. Никольского [12, с. 222, 223] с улучшенной С. Б. Стечкиным [13, с. 139] оценкой остаточного члена.

Поскольку при $s'/2 \in \mathbb{N}$ (см. [34, с. 382])

$$\frac{1}{2^{1/s'}} \left\| \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} \right\|_{s'} =$$

$$= \frac{\pi^{1/s'}}{\sqrt{1-q^2}} \left(\sum_{k=0}^{s'/2-1} \frac{(s'/2+k-1)!}{(k!)^2(s'/2-k-1)!} \left(\frac{q^2}{1-q^2} \right)^k \right)^{1/s'} \tag{56}$$

и (см. [34, с. 383])

$$\|\cos t\|^{s'}_{s'} = \frac{2\pi(s'-1)!!}{(s')!!}, \tag{57}$$

вследствие (54) для всех s таких, что $\dfrac{s}{2(s-1)} \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,s};S_{n-1}\big)_C =$$

$$= q^n\left(\frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{(s'-1)!!}{(s')!!}\sum_{k=0}^{s'/2-1}\frac{(s'/2+k-1)!}{(k!)^2(s'/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/s'}+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}}\right). \tag{58}$$

В частности, при $s=2$ из (58) следует равенство (52), при $s=\dfrac{4}{3}$ $(s'=4)$ — равенство вида

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\frac{4}{3}};S_{n-1})_C = q^n\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{59}$$

при $s=\dfrac{6}{5}$ $(s'=6)$ — равенство

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,\frac{6}{5}};S_{n-1}\big)_C = q^n\left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4}\right)^{1/6}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{60}$$

и т. д. Формулы (52), (54), (58) – (60) приведены в работе автора [32].

При $s=\infty$ и $1\le p\le n$, p, $n\in\mathbb{N}$ из формулы (7) следует равенство

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,\infty};V_{n,p}\big)_C =$$

$$=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos t+q^2}dt+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(1,p)}}\right), \tag{61}$$

полученное автором в [30, с. 99].

Теорема 2. *Пусть* $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, n, $p\in\mathbb{N}$, $p\le n$. *Тогда*

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,1};V_{n,p}\big)_{L_s} =$$

$$=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}}K_{q,p}(s)+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}\right), \tag{62}$$

где величины $K_{q,p}(s)$ *и* $\sigma(s,p)$ *определены равенствами* (5) *и* (6) *соответственно, а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по параметрам* n, p, q, β *и* s.

Доказательство. Пусть $f\in L^q_{\beta,1}$. В силу формул (4) и (8) получаем представление

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,1};V_{n,p}\big)_{L_s} = \frac{1}{\pi\,p}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)dt\right\|_s, \tag{63}$$

в котором функции $\mathrm{Z}_q(t)$ и $\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ определены формулами (9) и (10) соответственно.

Далее нам понадобится следующее утверждение из работы [35, с. 1398].

Лемма 2. *Пусть $K(t) \in L_s$, $1 \le s \le \infty$. Тогда для величины*

$$\mathcal{E}(K)_{L_s} = \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K(t) dt \right\|_s \tag{64}$$

выполняются соотношения

$$\frac{1}{2} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|K(\cdot) - K(\cdot + \lambda)\|_s \le \mathcal{E}(K)_{L_s} \le \|K\|_s. \tag{65}$$

Полагая в условиях леммы 2 $K(t) = \mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$ и учитывая равенство (63), получаем соотношение

$$\frac{1}{2\pi p} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - \mathrm{Z}_q(\cdot + \lambda)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + \lambda) \right\|_s \le$$

$$\le \mathcal{E}\big(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\big)_{L_s} \le \frac{1}{\pi p} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\,\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) \right\|_s, \quad 1 \le s \le \infty. \tag{66}$$

В силу леммы 1, в условиях которой положено $\varphi(t) = q^{-n+p-1}\mathrm{Z}_q(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(t)$, $g(t) = \mathrm{Z}_q^2(t)G_{p,q}(t)$, $h(t) = -\mathrm{Z}_q^2(t)H_{p,q}(t)$, $m = n-p+1$, $\alpha = -\dfrac{\beta\pi}{2}$ и $v = s$ (функции $G_{p,q}(t)$ и $H_{p,q}(t)$ определены соответственно равенствами (17) и (18)), а также формул (24), (25), (26), (37) и (45) для произвольных $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$ и $p = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\frac{1}{2} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - \mathrm{Z}_q(\cdot + \lambda)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot + \lambda) \right\|_s =$$

$$= q^{n-p+1} \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} \left\| \frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)} \right\|_s + O(1) \frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} \right), \tag{67}$$

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) - \lambda \right\|_s =$$

$$= q^{n-p+1} \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} \left\| \frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)} \right\|_s + O(1) \frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} \right), \tag{68}$$

$$\left\| \mathrm{Z}_q(\cdot)\mathcal{P}_{q,\beta,n,p}(\cdot) \right\|_s =$$

$$= q^{n-p+1} \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} \left\| \frac{\mathrm{Z}_q^2(t)}{\mathrm{Z}_{q^p}(p\,t)} \right\|_s + O(1) \frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} \right), \tag{69}$$

где $\sigma(s,p)$ определена формулой (6), а величины $O(1)$ равномерно ограничены по n, p, s, q и β.

Из формул (66) – (69) следует (62).

Теорема 2 доказана.

Сопоставление асимптотических формул (7) и (60) позволяет записать предельное соотношение

$$\lim_{n-p \to \infty} \frac{\mathcal{E}(L^q_{\beta,s'}; V_{n,p})_C}{\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_s}} = 1, \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad 1 \le s \le \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \tag{70}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 2.

При $s = 2$ формула (62) с учетом равенства (51) обращается в асимптотическое при $n - p \to \infty$ равенство

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\big)_{L_2} = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{1}{\pi^{1/2}}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}} + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(2,p)}}\right), \tag{71}$$

которое при $p = 1$ принимает вид

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_2} = q^n\left(\frac{1}{\pi^{1/2}\sqrt{1-q^2}} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right). \tag{72}$$

Формула (72) приведена в работе [35, с. 1402].

При произвольных $1 \le s \le \infty$ и $p = 1$ из формулы (62) получаем равенство

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_s} = q^n\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}2^{1/s}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\right\|_s + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(s,1)}}\right). \tag{73}$$

Равенство (73) установлено в работе [35]. Там же приведены несколько частных случаев формулы (73). В частности, при $s = 1$ из (73) следует асимптотическое при $n \to \infty$ равенство

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_1} = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{74}$$

где $\mathbf{K}(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Асимптотическое равенство (74) отражает известный результат С. М. Никольского [12, с. 222, 223] с улучшенной С. Б. Стечкиным [13, с. 139] оценкой остаточного члена.

При $\dfrac{s}{2} \in \mathbb{N}$ из равенств (56), (57) и (73) следует оценка

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_s} =$$

$$= q^n\left(\frac{2^{1/s}}{\pi^{(s-1)/s}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{(s-1)!!}{s!!}\sum_{k=0}^{s/2-1}\frac{(s/2+k-1)!}{(k!)^2(s/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/s} + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

которая при $s = 2$ обращается в равенство (72), а при $s = 4$ и $s = 6$ — соответственно в равенства

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_4} = q^n\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_6} = q^n \left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}} \left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4} \right)^{1/6} + O(1) \frac{q}{n(1-q)^2} \right).$$

При $s = 1$ и $1 \le p \le n$, p, $n \in \mathbb{N}$ из формулы (62) следует равенство

$$\mathcal{E}\big(L^q_{\beta,1}; V_{n,p}\big)_{L_1} = \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}\, dt + \right.$$

$$\left. + O(1) \frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(1,p)}} \right),$$

которое было получено автором в [30, с. 104, 105].

1. *La Vallé Poussin Ch.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expessions d'ordre donné // Compt., Rendus. – 1918. – **166**. – S. 799 – 802.
2. *La Vallé Poussin Ch.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. – Paris: Gautier-Villars, 1919. – 150 p.
3. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**. – С. 509 – 520.
4. *Стечкин С.Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**. – С. 545 – 548.
5. *Steckin S. B.* On the approximation of periodic functions by de la Vallee Poussin sums // Anal. Math. – 1978. – **4**. – P. 61 – 74.
6. *Гаврилюк В. Т.* Линейные методы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение // Укр. мат. журн. – 1963. – **15**, № 5. – С. 412 – 418.
7. *Габисония О. Д.* О приближении функций многих переменных целыми функциями// Изв. вузов. Математика. – 1965. – **45**, № 2. – С. 30 – 35.
8. *Захаров А. А.* Об оценке уклонения непрерывных периодических функций от сумм Валле Пуссена // Мат. заметки. – 1968. – **3**. – С. 77 – 84.
9. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall // Ber. Math.-phys. Kl. Akad. Wiss. Leipzig. – 1938. – **90**. – S. 103 – 134.
10. *Nagy B.* Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – **1**, № 3. – P. 14 – 52.
11. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
12. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207 – 256.
13. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
14. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 5. – С. 737 – 770.
15. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. II // Там же. – 1960. – **24**, № 3. – С. 431 – 468.
16. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. – 1958. – **121**, № 3. – С. 426 – 429.
17. *Теляковский С. А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 2. – С. 259 – 262.
18. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 213 – 242.
19. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
20. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 2. – С. 253 – 272.
21. *Тиман А. Ф.* Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 4. – С. 509 – 511.

22. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
23. *Рукасов В. И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 478 – 483.
24. *Рукасов В. И.* Приближения операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 690.
25. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций // Там же. – 2003. – **55**, № 6. – С.806 – 816.
26. *Островецький Л. А.* Про асимптотичні рівності при наближенні функцій з класів H_ω сумами Валле-Пуссена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 5. – С. 340 – 342.
27. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
28. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Там же. – Ч. II. – 468 с.
29. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле-Пуссена // Там же, 2007. – 386 с.
30. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97 – 107.
31. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
32. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079 – 1096.
33. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
34. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
35. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С.1395 – 1408.

Получено 08.07.10