УДК 517.9

М. Н. Феллер (УкрНИИ „Ресурс“, Киев),
И. И. Ковтун (Нац. ун-т биоресурсов и природопользования Украины, Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЛАПЛАСИАНОМ ЛЕВИ, РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

We present solutions of a boundary-value and initial boundary-value problems for a nonlinear parabolic equation with the Lévy Laplacian Δ_L, solved with respect to the derivative $\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \triangle_L U(t,x))$, in fundamental domains of a Hilbert space.

Наведено розв'язки крайової та початково-крайової задач для нелінійного параболічного рівняння з лапласіаном Леві Δ_L розв'язаного відносно похідної $\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \triangle_L U(t,x))$, для фундаментальних областей гільбертового простору.

1. Введение. В статье [1] (см. также [2]) было получено решение задачи Коши для нелинейного параболического уравнения с лапласианом Леви Δ_L

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \Delta_L U(x)), \quad U(0,x) = U_0(x),$$

где $f(\xi,\zeta)$ — функция на R^2.

Настоящая статья посвящена решениям краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \Delta_L U(t,x)) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad U(t,x) = G(t,x) \quad \text{на} \quad \Gamma$$

и начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \Delta_L U(t,x)) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$U(0,x) = 0, \quad U(t,x) = G(t,x) \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

для фундаментальных областей $\Omega \bigcup \Gamma$ в гильбертовом пространстве H.

2. Предварительные сведения. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан ввел П. Леви [3]. Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0, лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (F''(x_0) f_k, f_k)_H, \tag{1}$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в H.

Приведем свойство лапласиана Леви, полученное в [3], которое понадобится в дальнейшем (см. также [2]).

Пусть функция

$$F(x) = f(U_1(x), \ldots, U_m(x)),$$

где $f(u_1, \ldots, u_m)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области $\{U_1(x), \ldots, U_m(x)\} \subset R^m$, а $(U_1(x), \ldots, U_m(x))$ — вектор значений функций $U_1(x), \ldots, U_m(x)$. Пусть $U_j(x)$ — равномерно непрерывные в ограниченной области $\Omega \subset H$ дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L U_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, существуют. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\Big|_{u_j = U_j(x)} \Delta_L U_j(x). \tag{2}$$

Пусть Ω — ограниченная область в гильбертовом пространстве H (т. е. ограниченное открытое множество в H), а $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ — область в пространстве H с границей Γ.

Определим область Ω в пространстве H с поверхностью Γ следующим образом:

$$\Omega = \{x \in H \colon 0 \le Q(x) < R^2\}, \quad \Gamma = \{x \in H \colon Q(x) = R^2\},$$

где $Q(x)$ — дважды сильно дифференцируемая функция такая, что $\Delta_L Q(x) = \gamma$ и γ — положительное число. Такие области называют фундаментальными.

Примеры фундаментальных областей:

1) шар $\overline{\Omega} = \{x \in H \colon \|x\|_H^2 \le R^2\}$;

2) эллипсоид $\overline{\Omega} = \{x \in H \colon (Bx, x)_H \le R^2\}$, где $B = \gamma E + S(x)$, E — единичный, а $S(x)$ — вполне непрерывный оператор в H.

Введем функцию $T(x) = \dfrac{R^2 - Q(x)}{\gamma}$, имеющую свойства

$$0 < T(x) \le \frac{R^2}{\gamma} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad T(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad \Delta_L T(x) = -1.$$

3. Краевая задача. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = f(U(t,x), \Delta_L U(t,x)) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$U(t,x) = G(t,x) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

где $U(t,x)$ — функция на $[0,\infty) \times H$, $f(\xi,\zeta)$ — заданная функция двух переменных, $G(t,x)$ — заданная функция.

Теорема 1. *Пусть $f(\xi,\zeta)$ — непрерывная, дважды дифференцируемая функция двух переменных в области $\{U(t,x), \Delta_L U(t,x)\}$ в R^2, уравнение $\eta = f(\xi, c\eta)$ разрешимо относительно η, $\eta = \phi(\xi, c)$, причем переменные ξ и c разделяются, $\phi(\xi,c) = \alpha(c)\beta(\xi)$ $(\alpha(c),\ \beta(\xi)$ — функции на R^1, $\beta(\xi) \ne 0)$, существуют первообразная $\varphi(\xi) = \displaystyle\int \frac{d\xi}{\beta(\xi)}$ и обратная функция φ^{-1}.*

Пусть область Ω фундаментальна.

Пусть также существует решение $V(\tau,x)$ краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau} = \Delta_L V(\tau,x) \quad \textit{в} \quad \Omega, \qquad V(\tau,x)\big|_{\Gamma} = G(\tau,x). \tag{5}$$

Предположим, что уравнение

$$\alpha_c'\left(\sigma\left(\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\big|_{\tau=X+T(x)}}{\beta(V(X+T(x),x))}\right)\right)[t-X]-\delta_c'\left(\sigma\left(\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\big|_{\tau=X+T(x)}}{\beta(V(X+T(x),x))}\right)\right)T(x)=0, \tag{6}$$

где $\delta(c)=c\alpha(c)$, $\sigma=\alpha^{-1}$, *разрешимо относительно* $X=\chi(t,x)$, *причем* $\chi(t,x)\big|_{\Gamma}=t$.

Тогда решение краевой задачи (3), (4) *задается формулой*

$$\varphi(U(t,x))=\alpha\big(\psi(\chi(t,x))\big)[t-\chi(t,x)]-\delta(\psi(\chi(t,x)))T(x)+\varphi(V(\chi(t,x)+T(x),x)), \tag{7}$$

где

$$\psi(\chi(t,x))=\alpha^{-1}\left(\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\big|_{\tau=X+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}\right) \tag{8}$$

($\psi(z)$ *— функция на* R^1).

Доказательство. Из (7) имеем

$$\varphi_\xi'(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{\beta(U(t,x))}\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=\alpha(\psi(\chi(t,x)))-$$

$$-\alpha(\psi(\chi(t,x)))\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}+\alpha_c'(\psi(\chi(t,x)))\psi_z'(\chi(t,x))\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}[t-\chi(t,x)]-$$

$$-\delta_c'(\psi(\chi(t,x)))\psi_z'(\chi(t,x))\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}T(x)+\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}=$$

$$=\alpha(\psi(\chi(t,x)))+\big\{\alpha_c'(\psi(\chi(t,x)))[t-\chi(t,x)]-\delta_c'(\psi(\chi(t,x)))T(x)\big\}\psi_c'(\chi(t,x))\times$$

$$\times\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}-\left[\alpha(\psi(\chi(t,x)))-\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}\right]\frac{\partial\chi(t,x)}{\partial t}.$$

Поскольку $\chi(t,x)$ удовлетворяет уравнению (6), а из (8) следует, что

$$\alpha(\psi(\chi(t,x)))=\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))},$$

то

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=\alpha(\psi(\chi(t,x)))\beta(U(t,x)). \tag{9}$$

Из (7), используя формулу (2), имеем

$$\varphi_\xi'(U(t,x))\Delta_L U(t,x)=\frac{1}{\beta(U(t,x))}\Delta_L U(t,x)=$$

$$=-\alpha(\psi(\chi(t,x)))\Delta_L\chi(t,x)+\alpha_c'(\psi(\chi(t,x)))\psi_z'(\chi(t,x))\Delta_L\chi(t,x)[t-\chi(t,x)]-$$

$$-\delta_c'(\psi(\chi(t,x)))\psi_z'(\chi(t,x))\Delta_L\chi(t,x)T(x)-\delta(\psi(\chi(t,x)))\Delta_L T(x)+$$

$$+\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}\Big[\Delta_L\chi(t,x)+\Delta_L T(x)\Big]+\frac{\Delta_L V(\tau,x)\big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}.$$

Но $\Delta_L T(x)=-1$, поэтому

$$\frac{\Delta_L U(t,x)}{\beta(U(t,x))}=\delta(\psi(\chi(t,x)))+\Big\{\alpha'_c(\psi(\chi(t,x)))[t-\chi(t,x)]-$$

$$-\delta'_c(\psi(\chi(t,x))))T(x)\Big\}\,\psi'_z(\chi(t,x))\Delta_L\chi(t,x)-$$

$$-\left[\alpha(\psi(\chi(t,x)))-\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}\right]\Delta_L\chi(t,x)-$$

$$-\frac{\Big[\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}-\Delta_L V(\tau,x)\Big]\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}.$$

Поскольку $\chi(t,x)$ удовлетворяет уравнению (6), из (8) следует, что

$$\alpha(\psi(\chi(t,x)))=\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))},$$

а $\dfrac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}=\Delta_L V(\tau,x)$, то

$$\Delta_L U(t,x)=\delta(\psi(\chi(t,x)))\beta(U(t,x)). \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в уравнение (3), получаем тождество

$$\alpha(\psi(\chi(t,x)))\beta(U(t,x))=f(U(t,x),\psi(\chi(t,x))\alpha(\psi(\chi(t,x)))\beta(U(t,x)),$$

ибо по условию теоремы из $\eta=f(\xi,c\eta)$ следует, что $\eta=\alpha(c)\beta(\xi)$.

На поверхности Γ $T(x)=0$, а $\chi(t,x)=t$. Полагая в (7) $T(x)=0$, $\chi(t,x)=$ $=t$ и учитывая, что $V(t,x)\Big|_\Gamma=G(t,x)$, имеем $\varphi\big(U(t,x)\big|_\Gamma\big)=\varphi\big(V(t,x)\big|_\Gamma\big)=$ $=\varphi(G(t,x))$ и $U(t,x)\big|_\Gamma=G(t,x)$.

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Решение краевой задачи для квазилинейного уравнения*

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=\Delta_L U(t,x)+f_0(U(t,x)) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11}$$

$$U(t,x)=G(t,x) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{12}$$

где $f_0(\xi)$ *— дифференцируемая функция одной переменной, имеет вид*

$$U(t,x)=\varphi^{-1}\Big(T(x)+\varphi(V(t,x))\Big).$$

Действительно, для уравнения (11) $f(\xi,\zeta)=\zeta+f_0(\xi)$. Поэтому $\eta=\dfrac{f_0(\xi)}{1-c}$, $\alpha(c)=\dfrac{1}{1-c}$, $\beta(\xi)=f_0(\xi)$. Значит, $\delta(c)=\dfrac{c}{1-c}$, $\varphi(\xi)=\displaystyle\int\frac{d\xi}{f_0(\xi)}$.

Поскольку $\alpha'(c)=\delta'(c)=\dfrac{1}{(1-c)^2}$, уравнение (6) принимает вид

$$t-X-T(x)=0.$$

Его решение

$$X=\chi(t,x)=t-T(x).$$

Подставляя это значение $\chi(t,x)$ в формулу (7) и учитывая, что при этом $V(\chi(t,x)+ + T(x),x)=V(t,x)$, получаем

$$\varphi(U(t,x))=[\alpha(\psi(t,x))-\delta(\psi(T,x))]T(x)+\varphi(V(t,x)).$$

Но $\alpha(c)-\delta(c)=1$. Поэтому решение краевой задачи (11), (12) задается формулой $\varphi(U(t,x))=T(x)+\varphi(V(t,x))$, т. е.

$$U(t,x)=\varphi^{-1}\big(T(x)+\varphi(V(t,x))\big).$$

Следствие доказано.

Заметим, что решение краевой задачи для квазилинейного уравнения с лапласианом Леви (11), (12) получено в [4].

4. Начально-краевая задача. Рассмотрим начально-краевую задачу с однородным начальным условием

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=f(U(t,x),\Delta_L U(t,x)) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{13}$$

$$U(0,x)=0, \tag{14}$$

$$U(t,x)=G(t,x) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{15}$$

где $U(t,x)$ — функция на $[0,\infty)\times H$, $f(\xi,\zeta)$ — заданная функция двух переменных, $G(t,x)$ — заданная функция.

Обозначим через $\mathfrak{M}\Phi$ среднее значение функции $\Phi(y)$ по сфере $\|y\|_H^2=1$ [3].

Теорема 2. *Пусть для функции $f(\xi,\zeta)$ и области Ω выполняются условия теоремы 1 и существует решение $V(\tau,x)$ начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau}=\Delta_L V(\tau,x)) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad V(0,x)=0, \quad V(\tau,x)\Big|_\Gamma=G(\tau,x). \tag{16}$$

Предположим, что функция $G(t,x)$ равномерно непрерывна в $\overline{\Omega}$ при каждом $t\in[0,\infty)$, имеет среднее $\mathfrak{M}G(t,x+\sqrt{2T(x)}\;y)$ и, кроме того, $G(t,x)=0$, $G'_t(t,x)=0$ при $t\le r$ $(r>0)$.

Пусть также уравнение

$$\alpha'_c\left(\sigma\left(\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\big|_{\tau=X+T(x)}}{\beta(V(X+T(x),x))}\right)\right)[t-X]-\delta'_c\left(\sigma\left(\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\big|_{\tau=X+T(x)}}{\beta(V(X+T(x),x))}\right)\right)T(x)=0, \tag{17}$$

где $\sigma = \alpha^{-1}$, $\delta(c) = c\alpha(c)$, *разрешимо относительно* $X = \chi(t,x)$, *причем* $\chi(t,x)\Big|_{\Gamma} = t$ *и* $\chi(0,x) < r$.

Тогда решение начально-краевой задачи (13) – (15) *задается формулой*

$$\varphi(U(t,x)) = \alpha(\psi(\chi(t,x)))[t-\chi(t,x)] - \delta(\psi(\chi(t,x))T(x) + \varphi(V(\chi(t,x)+T(x),x)), \tag{18}$$

где

$$\psi(\chi(t,x)) = \alpha^{-1}\left(\frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial \tau}\big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x)+T(x),x))}\right) \tag{19}$$

($\psi(z)$ — *функция на* R^1).

Доказательство. Доказательство того, что выражение (18) удовлетворяет уравнению (13) в Ω и на поверхности Γ $U(t,x) = G(t,x)$, такое же, как и в доказательстве теоремы 1.

Покажем, что $U(0,x) = 0$.

Вначале покажем, что если $G(\tau,x) = 0$ при $\tau \leq 0$, то в условиях теоремы решение задачи

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \Delta_L V(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad V(0,x) = 0, \quad V(t,x)\big|_{\Gamma} = G(t,x)$$

можно записать так:

$$V(t,x) = \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}\, y). \tag{20}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\partial \tau}, \tag{21}$$

где $\tau = t - T(x)$.

С другой стороны, используя формулу (2), имеем

$$\Delta_L V(t,x) =$$

$$= -\frac{\partial \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\partial \tau}\Delta_L T(x) + \Delta_L \mathfrak{M}G(\tau, x+\sqrt{2T(x)}y)\Big|_{\tau=t-T(x)} =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\partial \tau} + \Delta_L \mathfrak{M}G(\tau, x+\sqrt{2T(x)}y)\Big|_{\tau=t-T(x)}$$

(так как $\Delta_L T = -1$).

В [5] показано, что если функция $F(x)$ равномерно непрерывна в Ω и имеет среднее $\mathfrak{M}F(x+\sqrt{2T(x)}y)$, то это среднее является гармонической функцией в Ω, т. е.

$$\Delta_L \mathfrak{M}F(x+\sqrt{2T(x)}y) = 0 \quad x \in \Omega.$$

Поэтому

$$\Delta_L V(t,x) = \frac{\partial \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\partial \tau}. \tag{22}$$

Подставляя в уравнение $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \Delta_L V(t,x)$ выражения (21) и (22), получаем тождество

$$\frac{\partial \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\partial\tau} = \frac{\partial \mathfrak{M}G(t-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\partial\tau}.$$

Полагая в (20) $t=0$, имеем $V(0,x) = \mathfrak{M}G(-T(x), x+\sqrt{2T(x)}y) = 0$, так как по условию теоремы $G(\tau,x)=0$ при $\tau\leq 0$.

На поверхности Γ $T(x) = 0$, поэтому из (20) следует, что $V(t,x)\Big|_\Gamma = \mathfrak{M}G(t,x) = G(t,x)$.

Согласно формуле (20) имеем

$$V(\chi(t,x)+T(x),x) = \mathfrak{M}G(\chi(t,x), x+\sqrt{2T(x)}\,y).$$

Поэтому

$$V(\chi(0,x)+T(x),x) = \mathfrak{M}G(\chi(0,x), x+\sqrt{2T(x)}\,y) = 0 \tag{23}$$

(поскольку по условию теоремы $\chi(0,x)\leq r$, а $G(\tau,x)=0$ при $\tau\leq r$).

Из формулы (19) получаем

$$\alpha(\psi(\chi(t,x))) = \frac{\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\chi(t,x)+T(x)}}{\beta(V(\chi(t,x))+T(x),x))} = \frac{\mathfrak{M}G'_t(\chi(t,x), x+\sqrt{2T(x)}y)}{\beta(V(\chi(t,x))+T(x),x))},$$

поэтому $\alpha(\psi(\chi(0,x))) = 0$ (поскольку по условию теоремы $\chi(0,x) < r$, а $G'(\tau,x)=0$ при $\tau\leq r$).

Полагая в (18) $t=0$ и учитывая (23), находим $\varphi(U(0,x)) = \varphi(V(\chi(0,x) + T(x),x)) = \varphi(0)$ и, значит, $U(0,x)=0$.

Теорема 2 доказана.

Пример. Решим начально-краевую задачу в шаре пространства $H\colon \overline{\Omega} = \{x\in H\colon \|x\|_H^2\leq R^2\}$:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \sqrt[3]{\sqrt{U(t,x)}\Delta_L U(t,x)} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{24}$$

$$U(0,x) = 0, \tag{25}$$

$$U(t,x)\Big|_{\|x\|_H^2=R^2} = g\Big(t-\frac{1}{2}R^2\Big), \tag{26}$$

где $g(\lambda)=\lambda^2$ для $\lambda\geq 0$, $g(\lambda)=0$ для $\lambda\leq 0$.

Для уравнения (24) $f(\xi,\zeta) = \xi^{1/6}\zeta^{1/3}$. Поэтому $\eta = \xi^{1/4}c^{1/2}$ и $\alpha(c) = c^{1/2}$, $\beta(\xi)=\xi^{1/4}$. Значит, $\delta(c) = c^{3/2}$, $\varphi(\xi) = \dfrac{4}{3}\xi^{3/4}$.

Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau} = \Delta_L V(\tau,x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad V(0,x)=0, \quad V(\tau,x)\Big|_{\|x\|_H^2=R^2} = g\Big(\tau-\frac{1}{2}\|x\|_H^2\Big)$$

задается формулой

$$V(\tau,x) = g\Big(\tau+\frac{1}{2}\|x\|_H^2 - R^2\Big).$$

Теперь уравнение (17) принимает вид

$$t-(1+12T(x))X+6R^2T(x)=0$$

и его решение

$$X=\chi(t,x)=\frac{t+6T(x)R^2}{1+2T(x)}.$$

Поскольку при этом значении $\chi(t,x)$

$$V(\chi(t,x)+T(x),x)=g\Big(\chi(t,x)-\frac{R^2}{2}\Big)=\frac{g\Big(t-\dfrac{R^2}{2}\Big)}{(1+12T(x))^2},$$

то

$$\alpha(\psi(\chi(t,x)))=\frac{2g^{1/4}\Big(t-\dfrac{R^2}{2}\Big)}{(1+12T)^{1/2}},\quad \delta(\psi(\chi(t,x)))=\frac{8g^{3/4}\Big(t-\dfrac{R^2}{2}\Big)}{(1+12T)^{3/2}}.$$

Согласно формуле (18) получаем решение задачи (24) – (26):

$$U(t,x)=\frac{g\Big(t-\dfrac{R^2}{2}\Big)}{[1+6(R^2-\|x\|_H^2)]^{2/3}}.$$

1. *Феллер М. Н.* Заметки о бесконечномерных нелинейных гиперболических уравнениях // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 690 – 701.
2. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.
3. *Lévy P.* Problémes concrets d’analyse fonctionnelle. – Paris: Gauthier-Villars, 1951. – 510 p.
4. *Feller M. N., Kovtun I. I.* Quasilinear parabolic equations with a Lévy Laplacian for functions of infinite number of variables // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 117 – 123.
5. *Polishchuk E. M.* Continual means and boundary value problems in function spaces. – Berlin: Acad. Verl., 1988 – 160 p.

Получено 24.03.10