УДК 512.745, 512.815.4

Л. П. Бедратюк (Хмельниц. нац. ун-т)

АНАЛОГ ФОРМУЛИ КЕЛЛІ – СИЛЬВЕСТРА ТА РЯД ПУАНКАРЕ АЛГЕБРИ ІНВАРІАНТІВ ТЕРНАРНОЇ ФОРМИ

An explicit formula for the number $\nu_d(n)$ of linearly independent homogeneous invariants of degree n of the d-order ternary form is found. A formula for the Poincaré series of the algebra of invariants of the ternary form is also obtained.

Найдены явная формула для числа $\nu_d(n)$ линейно независимых однородных инвариантов степени n тернарной формы порядка d и формула для ряда Пуанкаре алгебры инвариантов тернарной формы.

1. Вступ. Розглянемо алгебру многочленів $\mathbb{C}[X_d] := \mathbb{C}[t, x_1, x_2, \ldots, x_d]$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Породжуючі елементи $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ комплексної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ діють на алгебрі поліноміальних функцій $\mathbb{C}[X_d]$ диференціюваннями D_1, D_2, де

$$D_1 := t\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\,x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + d\,x_{d-1}\frac{\partial}{\partial x_d},$$
$$D_2 := dx_1\frac{\partial}{\partial t} + (d-1)\,x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_d\frac{\partial}{\partial x_{d-1}}.$$

Множина $\mathbb{C}[X_d]^{\mathfrak{sl}_2} = \big\{ f \in \mathbb{C}[X_d] \mid D_1(f) = D_2(f) = 0 \big\}$ утворює скінченнопороджену алгебру, яка, на мові класичної теорії інваріантів, називається алгеброю інваріантів бінарної форми порядку d. Задачу явного опису алгебри інваріантів $\mathbb{C}[X_d]^{\mathfrak{sl}_2}$ уперше сформулював Буль [1] у 1843 році, і загалом вона залишається нерозв'язаною до цього часу. Зокрема, не встановлено навіть кількість однорідних породжуючих (поліноміально незалежних) елементів алгебри $\mathbb{C}[X_d]^{\mathfrak{sl}_2}$ для $d > 10$. У зв'язку з цим заслуговує на увагу формула Келлі – Сильвестра, за якою знаходять кількість лінійно незалежних інваріантів степеня n для бінарної форми довільного порядку d. Ця кількість дорівнює різниці

$$\omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2}\right) - \omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2} - 1\right),$$

де $\omega_d(n, i)$ — число цілих додатних розв'язків системи рівнянь

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \ldots + d\,\alpha_d = \frac{d\,n - i}{2},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d = n.$$

Сильвестр у роботі [2], узагальнюючи ідеї Келлі [3], вперше анонсував цю формулу, щоправда без доведення. Більш того, він вважав, що цю формулу не доведуть ще довгий час. Проте доведення цієї формули можна знайти вже в лекціях Гільберта [4] з теорії інваріантів, які він прочитав у 1897 році в Гьоттінгені. Сильвестр, використавши цю формулу, обчислив ряди Пуанкаре алгебр інваріантів бінарної форми для $d \leq 10$ і $d = 12$, а також дав оцінку кількості породжуючих елементів цих алгебр. Тому, зважаючи на викладене вище, доцільно було б узагальнити формулу Келлі – Сильвестра і на випадок інваріантів тернарних форм.

Дамо означення алгебри інваріантів тернарної форми. Розглянемо векторний $\mathbb{C}$-простір T_d тернарних форм степеня d:

$$u(x,y,z)=\sum_{i+j\leq d}\frac{d!}{i!j!(d-(i+j))!}a_{i,j}\,x^{d-(i+j)}y^iz^j,$$

де $a_{i,j}\in\mathbb{C}$. Координатну алгебру $\mathbb{C}[A_d]$ простору T_d ототожнимо з ізоморфною їй алгеброю многочленів A_d від $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ змінних $a_{i,\,j}$, $i+j\leq d$. Стандартна дія групи SL_3 підстановками на просторі T_d індукує дію групи SL_3 (та алгебри Лі $\mathfrak{sl}_3$) і на алгебрі A_d. Відповідна алгебра інваріантів $A_d^{SL_3}=A_d^{\mathfrak{sl}_3}$ називається алгеброю інваріантів тернарної форми порядку d. Алгебра $A_d^{\mathfrak{sl}_3}$ є градуйованою:

$$A_d^{\mathfrak{sl}_3}=(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_0+(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_1+\ldots+(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_n+\ldots.$$

Тут $(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_n$ — векторний простір, породжений однорідними інваріантами степеня n.

Формальний степеневий ряд

$$\mathcal{P}\left(A_d^{\mathfrak{sl}_3},z\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\dim(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_i\,z^i$$

називається рядом Пуанкаре алгебри інваріантів $A_d^{\mathfrak{sl}_3}$.

Про структуру алгебри $A_d^{\mathfrak{sl}_3}$ ми знаємо небагато. Відомо [4], що вона є скінченнопородженою алгеброю Коена – Маколея. Для невеликих d знайдено мінімальні системи породжуючих елементів. Зокрема, для $d\leq 3$ породжуючі алгебри інваріантів були обчислені ще Горданом [5], а для $d=4$ мінімальну систему із 331 породжуючих обчислено в докторській дисертації Е. Ньотер [6].

Метою даної роботи є обчислення розмірності простору $(R_d^{\mathfrak{sl}_3})_n$, тобто кількості однорідних, лінійно незалежних інваріантів степеня n для тернарної форми порядку d. Методами теорії зображень алгебри Лі $\mathfrak{sl}_3$ отримано формулу, яка є узагальненням відомої класичної формули Келлі – Сильвестра на випадок інваріантів тернарної форми. Також встановлено формулу для обчислення ряду Пуанкаре алгебри інваріантів тернарної форми.

2. Формула Келлі – Сильвестра. Спочатку наведемо коротке й елементарне доведення формули Келлі – Сильвестра для інваріантів бінарної форми. Ідею цього доведення ми використаємо пізніше при встановленні аналогічного результату для інваріантів тернарної форми.

Розглянемо незвідне зображення $V_d=\langle v_0,v_1,...,v_d\rangle$, $\dim V_d=d+1$, алгебри $\mathfrak{sl}_2$. Базисні елементи $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ алгебри $\mathfrak{sl}_2$ діють на V_d диференціюваннями D_1, D_2, E за правилом

$$D_1(v_i)=i\,v_{i-1},\qquad D_2(v_i)=(d-i)\,v_{i+1},\qquad E(v_i)=(d-2\,i)\,v_i.$$

Ця дія природним чином продовжується з V_d на симетричну алгебру $S(V_d)$. Алгебра I_d,

$$I_d=S(V_d)^{\mathfrak{sl}_2}=\bigl\{v\in S(V_d)|D_1(v)=0,D_2(v)=0\bigr\},$$

ізоморфна алгебрі інваріантів бінарної форми порядку d.

Оскільки група SL_n є лінійно редуктивною, то будь-яке її зображення, а отже і зображення відповідної алгебри Лі, є напівпростим, тобто розкладається в пряму суму незвідних зображень. Симетрична алгебра $S(V_d)$ є градуйованою:

$$S(V_d) = S^0(V_d) + S^1(V_d) + \ldots + S^n(V_d) + \ldots,$$

до того ж кожна компонента $S^n(V_d)$ є цілком звідним зображенням алгебри $\mathfrak{sl}_2$ і тому має місце розклад

$$S^n(V_d) \cong \gamma_d(n,0)V_0 + \gamma_d(n,1)V_1 + \ldots + \gamma_d(n,d\,n)V_{d\,n}. \tag{1}$$

Тут $\gamma_d(n,i)$ — кратність, з якою компонента V_i входить у розклад $S^n(V_d)$. Зокрема, кратність $\gamma_d(n,0)$ тривіального зображення V_0 дорівнює числу однорідних лінійно незалежних інваріантів степеня n бінарної форми порядку d. Встановимо формулу для обчислення $\gamma_d(n,0)$.

Оскільки картанівська підалгебра алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ є одновимірною, то ми можемо ототожнити ваги довільного зображення W із власними значеннями вагових векторів відносно картанівської підалгебри, породженої елементом E. Множину всіх ваг зображення W позначимо Λ_W, зокрема $\Lambda_{V_d} = \{-d, -d+2, \ldots, d\}$.

Характером $\mathrm{Char}(W)$ зображення W називається формальна сума

$$\mathrm{Char}(W) = \sum_{i \in \Lambda_W} n_W(i) q^i,$$

де $n_W(i)$ позначає кратність ваги i, тобто розмірність підпростору в W, породженого векторами ваги i. Кратність кожної ваги зображення V_d, очевидно, дорівнює одиниці, тому

$$\mathrm{Char}(V_d) = q^{-d} + q^{-d+2} + \ldots + q^d = \frac{q^{d+1} - q^{-(d+1)}}{q - q^{-1}}.$$

Характер $\mathrm{Char}(S^n(V_d))$ зображення $S^n(V_d)$ дорівнює $H_d(q^{-d}, q^{-d+2}, \ldots, q^d)$, (див. [7]), де $H_d(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ є повним симетричним многочленом

$$H_d(x_0, x_1, \ldots, x_d) = \sum_{|\alpha|=n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \sum_i \alpha_i.$$

Поклавши $x_i = q^{d-2\,i}$, $i = 0, \ldots, d$, і зібравши коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо вираз для характеру $\mathrm{Char}(S^n(V_d))$:

$$\mathrm{Char}(S^n(V_d)) = \sum_{|\alpha|=n} (q^d)^{\alpha_0} (q^{d-2\cdot 1})^{\alpha_1} \ldots (q^{d-2\,d})^{\alpha_d} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=n} q^{d\,n - 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + d\,\alpha_d)} = \sum_{i=-dn}^{dn} \omega_d(n,i) q^{d\,n-2\,i}.$$

Тут $\omega_d(n,i)$ — число цілих невід'ємних розв'язків рівняння $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + d\alpha_d = \dfrac{d\,n - i}{2}$ при умові $|\alpha| = n$. Зокрема, коефіцієнт біля q^0 (кратність нульової ваги) дорівнює $\omega_d\left(n, \dfrac{d\,n}{2}\right)$, а коефіцієнт біля q^2 — $\omega_d\left(n, \dfrac{d\,n}{2} - 1\right)$.

З іншого боку, згідно з розкладом (1), має місце рівність характерів

$$\mathrm{Char}(S^n(V_d)) = \gamma_d(n,0)\mathrm{Char}(V_0) + \gamma_d(n,1)\mathrm{Char}(V_1) + \ldots + \gamma_d(n, d\,n)\mathrm{Char}(V_{d\,n}).$$

Звідси легко отримати доведення теореми Келлі – Сильвестра.

Теорема 1 (Келлі – Сильвестр). *Має місце рівність*

$$\gamma_d(n,0) = \omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2}\right) - \omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2} - 1\right).$$

Доведення. Нульова вага зустрічається з одиничною кратністю в кожному зображенні V_i для парного i, тому

$$\omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2}\right) = \gamma_d(n,0) + \gamma_d(n,2) + \gamma_d(n,4) + \ldots.$$

Вага 2 зустрічається в кожному незвідному зображенні (крім нульового) V_i для парного i також з одиничною кратністю, тому

$$\omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2} - 1\right) = \gamma_d(n,2) + \gamma_d(n,4) + \ldots.$$

Звідси

$$\omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2}\right) - \omega_d\left(n, \frac{d\,n}{2} - 1\right) = \gamma_d(n,0),$$

що і потрібно було довести.

Для довільного многочлена $f \in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ позначимо через $[q^i]f$ його коефіцієнт біля q^i. Можна показати (див. [4]), що

$$\gamma_d(n,0) = \left[q^{\frac{n\,d}{2}}\right]\left((1-q)\begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}_q\right),$$

де $\begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}_q$ — q-біноміальний коефіцієнт (многочлен Гаусса):

$$\begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}_q := \frac{(1-q^{d+1})(1-q^{d+2})\ldots(1-q^{d+n})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}.$$

3. Формула розмірності для інваріантів тернарної форми. В комплексній алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_3$ позначимо через $E_{i\,j}$ матричні одиниці, тобто такі матриці, у яких на перетині i-го рядка і j-го стовпчика знаходиться одиниця, а на всіх інших місцях знаходяться нулі. Матриці $H_1 := E_{1\,1} - E_{2\,2}$, $H_2 := E_{2\,2} - E_{3\,3}$ породжують картанівську підалгебру $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{sl}_3$.

Визначимо $L_i \in \mathfrak{h}^*$, поклавши $L_i(E_{j,j}) = \delta_{i,j}$. Нехай $\beta_{i,j} = L_i - L_j$, $1 \leqslant i < < j \leqslant 3$, — додатні корені алгебри $\mathfrak{sl}_3$ і $\phi_1 = L_1, \phi_2 = L_1 + L_2$ — фундаментальні ваги. Легко бачити, що $\phi_i(H_j) = \delta_{i,j}$. Позначимо через $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ вагу

$$\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2, \lambda_1, \quad \lambda_2 \in \mathbb{Z}.$$

Можна показати (див. [8]), що матриці H_1, H_2 діють на A_d як лінійні диференціальні оператори

$$H_1(a_{i,j}) = (n - (2i + j))a_{i,j}, \qquad H_2(a_{i,j}) = (i - j)a_{i,j}.$$

Безпосередня перевірка показує, що кожен моном $a^\alpha := a_{0,0}^{\alpha_{0,0}} a_{1,0}^{\alpha_{1,0}} \ldots a_{0,d}^{\alpha_{0,d}}$ степеня n є власним вектором лінійних операторів H_1, H_2 із власними значеннями відповідно $n\,d - (2\omega_1(\alpha) + \omega_2(\alpha))$ та $\omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha)$, де $\omega_1(\alpha) = \sum_i i\,\alpha_{i,j}$, $\omega_2(\alpha) = \sum_j j\,\alpha_{i,j}$, $|\alpha| := \sum_{i,j} \alpha_{i,j} = n$. Оскільки $\lambda(H_i) = \lambda_i$, то набір

$$(n\,d - (2\omega_1(\alpha) + \omega_2(\alpha)), \omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha))$$

буде вагою зображення A_d. Відомо [9], що множина ваг довільного незвідного зображення напівпростої алгебри Лі є лінійно впорядкованою множиною і максимальні елементи відносно цього впорядкування (старші ваги) з точністю до ізоморфізму визначають це зображення. Незвідне зображення з старшою вагою $\lambda = (m_1, m_2)$ позначимо через Γ_λ, множину його ваг — через Λ_λ, а множину його додатних ваг — через Λ_λ^+. Легко бачити, що мають місце ізоморфізми зображень $\mathbb{C}^3 \cong \Gamma_{1,0}$, $A_d \cong (S^d(\Gamma_{1,0}))^* \cong \Gamma_{0,d}$ (детальніше див. у [7]).

Нагадаємо означення формального характеру зображення алгебри Лі $\mathfrak{sl}_3$. Нехай Λ — решітка ваг всіх скінченновимірних зображень $\mathfrak{sl}_3$, а $\mathbb{Z}(\Lambda)$ — її групове кільце. $\mathbb{Z}(\Lambda)$ є вільним $\mathbb{Z}$-модулем з базисними елементами $e(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, до того ж $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$, $e(0) = 1$. Нехай Λ_λ — множина всіх ваг зображення Γ_λ. Тоді формальний характер $\mathrm{Char}(\Gamma_\lambda)$ визначається (див. [9]) як елемент $\sum_{\mu \in \Lambda_\lambda} n_\lambda(\mu) e(\mu) \in \mathbb{Z}(\Lambda)$, де $n_\lambda(\mu)$ — кратність ваги μ в зображенні Γ_λ. Наприклад, для старшої ваги $\lambda = (1,1)$ маємо

$$\Lambda_{(1,1)} = \{(1,1), (-1,2), (1,-2), (0,0), (-2,1), (-1,-1)\},$$

до того ж кратності всіх ваг дорівнюють одиниці, крім нульової ваги, для якої кратність дорівнює двом. Тоді

$$\mathrm{Char}(\Gamma_{(1,1)}) = e(1,1) + e(-1,2) + e(1,-2) + 2\,e(0,0) + e(-2,1) + e(-1,-1).$$

Базисні елементи $a_{i,j}$ простору A_d мають вагу $(d - (2\,i + j), i - j)$, $i + j \leq d$, кратності 1, тому

$$\mathrm{Char}(\Gamma_{0,d}) = \sum_{i+j \leq d} e(d - (2\,i + j), i - j).$$

Характер симетричного степеня $S^n(\Gamma_{0,\,d})$ зображення $\Gamma_{0,\,d}$ є повним симетричним многочленом степеня n від $e(d - (2\,i + j), i - j)$, $i + j \leq d$ (див. [7]), тому

$$\mathrm{Char}(S^n(\Gamma_{0,d})) = \sum_{|\alpha|=n} e(0,0)^{\alpha_{0,0}} e(1,0)^{\alpha_{1,0}} \ldots e(0,d)^{\alpha_{d,0}}, \quad |\alpha| = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}.$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$\mathrm{Char}(S^n(\Gamma_{0,d})) = \sum_{|\alpha|=n} e(n\,d - 2\,\omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha), \omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha)) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in \Lambda_{(nd,0)}} c_d(n,i,j) e(i,j),$$

де $c_d(n,i,j)$ — число невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$2\omega_1(\alpha)+\omega_2(\alpha)=d\,n-i,$$
$$\omega_1(\alpha)-\omega_2(\alpha)=j,$$
$$|\alpha|=n,$$

або, після спрощення,

$$\omega_1(\alpha)=\frac{d\,n}{3}-\frac{i-j}{3},$$
$$\omega_2(\alpha)=\frac{d\,n}{3}-\frac{i+2j}{3},$$
$$|\alpha|=n.$$

При $i=j=0$ одержуємо $\omega_1(\alpha)=\omega_2(\alpha)$ і $nd=3\omega_1(\alpha)$, тобто має місце співвідношення $nd=0 \mod 3$. Додавши перші два рівняння, будемо мати $i-j=0 \mod 3$, звідки і $i+2j=0 \mod 3$. Отже, $\dfrac{dn}{3}$, $\dfrac{i-j}{3}$, $\dfrac{i+2j}{3}$ — цілі числа.

На кожному зображенні Γ_λ визначимо число

$$E_\lambda=n_\lambda(0,0)+n_\lambda(3,0)+n_\lambda(0,3)-2\,n_\lambda(1,1)-n_\lambda(2,2).$$

При цьому будемо вважати, що кратність $n_\lambda(i,j)$ дорівнює 0, якщо $(i,j)\notin\Lambda_\lambda$. Наступна теорема відіграє ключову роль у подальших обчисленнях.

Теорема 2.

$$E_\lambda=\begin{cases}1, & \lambda=(0,0),\\ 0, & \lambda\neq(0,0).\end{cases}$$

Доведення. Вагова діаграма $\Gamma_{(i,j)}$, $i,j\neq 0$, геометрично зображується на площині у вигляді послідовності вкладених концентричних опуклих шестикутників, які при $i\neq j$ вироджуються у трикутник, а при $i=j$ — у точку [7, 9]. На кожній із сторін зовнішнього шестикутника розміщено почергово i та j ваг. Кратності всіх ваг найпершого зовнішнього шестикутника дорівнюють одиниці, а потім кратності зростають у напрямку до середини на одиницю на кожному концентричному шестикутнику вагової діаграми і є константами на внутрішньому трикутнику. Наприклад, якщо $i=j$, то вагова діаграма має вигляд концентричних рівносторонніх шестикутників, які вироджуються у точку, що відповідає вазі $(0,0)$. Кратність усіх ваг найбільшого зовнішнього шестикутника, на кожній із сторін якого розміщено рівно i ваг, дорівнює 1, а кратність ваги $(0,0)$ — $i+1$. Якщо i або j дорівнює нулю, то вагова діаграма утворює трикутник, і тоді кратність кожної ваги дорівнює одиниці.

Для доведення теореми достатньо розглянути три випадки: $|i-j|=0,1,2$, $|i-j|>3$ і $|i-j|=3$. Для $\lambda=(0,0)$ твердження є очевидним, оскільки кратності всіх ваг з Λ_λ дорівнюють нулю, крім кратності $n_\lambda(0,0)$, яка дорівнює 1.

Нехай $i-j=0$, тобто $\lambda=(m,m)$ для деякого $m>0$. Тоді $n_\lambda(0,0)=m+1$, і легко бачити, що $n_\lambda(1,1)=m$ і $n_\lambda(3,0)=n_\lambda(2,2)=n_\lambda(0,3)=m-1$. Звідси

$$E_\lambda=m+1+m-1+m-1-2\,m-(m-1)=0.$$

Якщо $|i-j|=1$, або $|i-j|=2$, то ваг $(0,0),(3,0),(0,3),(1,1),(2,2)$ немає у ваговій діаграмі зображення $\Gamma_{(i,j)}$. Тому $E_\lambda=0$.

Нехай $\lambda=(m,k)$, $|m-k|>3$. Тоді всі ваги $(0,0),(3,0),(0,3),(1,1),(2,2)$ потрапляють у внутрішній трикутник вагової діаграми зображення $\Gamma_{(i,j)}$, їхні кратності $n_\lambda(0,0)$, $n_\lambda(3,0)$, $n_\lambda(1,1)$, $n_\lambda(2,2)$, $n_\lambda(0,3)$ дорівнюють $\min(m,k)+1$ і, отже, $E_\lambda=0$.

Нехай $\lambda=(m,k)$, $m-k=3$. Тоді $n_\lambda(0,0)=n_\lambda(3,0)=n_\lambda(1,1)=k+1$ і $n_\lambda(2,2)=n_\lambda(0,3)=k$, звідки $E_\lambda=0$.

Якщо ж $\lambda=(m,k)$, $k-m=3$, то $n_\lambda(0,0)=n_\lambda(0,3)=n_\lambda(1,1)=m+1$ і $n_\lambda(2,2)=n_\lambda(3,0)=m$, звідки $E_\lambda=0$.

Теорему доведено.

Тепер ми можемо довести основне твердження цієї статті.

Теорема 3. *Число $\nu_d(n)$ лінійно незалежних однорідних інваріантів тернарної форми порядку d і степеня n дорівнює*

$$\nu_d(n)=c_d(n,0,0)+c_d(n,3,0)+c_d(n,0,3)-2\,c_d(n,1,1)-c_d(n,2,2). \qquad (2)$$

Доведення. Число $\nu_d(n)$ дорівнює кратності $\gamma_d(0,0)$ тривіального зображення $\Gamma_{0,0}$, з яким воно входить у симетричний степінь $S^n(\Gamma_{0,\,d})$. Розглянемо розклад

$$S^n(\Gamma_{0,d})=\gamma_d(0,0)\Gamma_{0,0}+\ldots+\gamma_d(0,n\,d)\Gamma_{0,n\,d}=\sum_{\lambda\in\Lambda^+_{(0,n\,d)}}\Gamma_\lambda.$$

Отже,

$$\mathrm{Char}(S^n(\Gamma_{0,d}))=\gamma_d(0,0)\mathrm{Char}(\Gamma_{0,0})+\ldots+\gamma_d(0,n\,d)\mathrm{Char}(\Gamma_{0,n\,d}).$$

Тому

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_{(0,n\,d)}}c_d(n,i,j)e(i,j)=\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)\mathrm{Char}(\Gamma_\lambda)=$$

$$=\sum_{(i,j)\in\Lambda_{(0,n\,d)}}\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)n_\lambda(i,j)e(i,j).$$

Звідси знаходимо $c_d(n,i,j)=\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)n_\lambda(i,j)$. Використавши попередню теорему, отримаємо

$$c_n(n,0,0)+c_d(n,3,0)+c_d(n,0,3)-2\,c_d(n,1,1)-c_d(n,2,2)=$$

$$=\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)E_\lambda=\gamma_d(0,0).$$

Враховуючи рівність $\gamma_d(0,0)=\nu_d(n)$, завершуємо доведення теореми.

4. Ряд Пуанкаре. Встановимо формулу для практичного обчислення $\nu_d(n)$.

Із простих комбінаторних міркувань випливає, що число $c_d(n,0,0)$ невід'ємних цілих розв'язків системи рівнянь

$$\omega_1(\alpha)=\frac{d\,n}{3},$$
$$\omega_2(\alpha)=\frac{d\,n}{3},$$
$$|\alpha|=n$$

дорівнює коефіцієнту біля $z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}$ у розкладі ряду

$$R_d = \prod_{k+l\leq d} \frac{1}{1-zp^kq^l}.$$

Позначимо цей факт так: $c_d(n,0,0) = \left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] R_d$.

Число $c_d(n,3,0)$ невід'ємних цілих розв'язків системи рівнянь

$$\omega_1(\alpha) = \frac{d\,n}{3} - 1,$$

$$\omega_2(\alpha) = \frac{d\,n}{3} - 1,$$

$$|\alpha| = n$$

дорівнює $\left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}-1}\right] R_d = \left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] p\,qR_d$. Тут ми використали очевидну формальну властивість $[x^{i-1}]f(x) = [x^i]xf(x)$, яка справедлива для довільного ряду $f(x)$. Аналогічними міркуваннями знайдемо

$$c_d(n,0,3) = \left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] \frac{q^2}{p} R_d,$$

$$c_d(n,1,1) = \left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] qR_d,$$

$$c_d(n,2,2) = \left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] q^2 R_d.$$

Отже, врахувавши (2), отримаємо

$$\nu_d(n) = \left[z^n(pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] \frac{1 + p\,q + \dfrac{q^2}{p} - 2\,q - q^2}{\prod\limits_{k+l\leq d}\left(1 - zp^kq^l\right)}. \tag{3}$$

Теорема 4. *Ряд Пуанкаре алгебри інваріантів тернарної форми обчислюється за формулою*

$$\mathcal{P}\left(A_d^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{|q|=1} \oint\limits_{|p|=1} \frac{1 + p^3\,q^3 + \dfrac{q^6}{p^3} - 2\,q^3 - q^6}{\prod_{k+l\leq d}\left(1 - zp^{3k}q^{3l}\right)} \frac{dp}{p}\frac{dq}{q}. \tag{4}$$

Доведення. Маємо

$$\mathcal{P}\left(A_d^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_i\, z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left[z^i(pq)^{\frac{d\,i}{3}}\right] \frac{1 + p\,q + \dfrac{q^2}{p} - 2\,q - q^2}{\prod_{k+l\leq d}\left(1 - zp^kq^l\right)} \right) z^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left[\left(z(pq)^3\right)^i\right] \frac{1 + p^3\,q^3 + \dfrac{q^6}{p^3} - 2\,q^3 - q^6}{\prod\limits_{k+l\leq d}\left(1 - zp^{3k}q^{3l}\right)} \right) z^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left[z^i\right] \frac{1 + p^3 q^3 + \dfrac{q^6}{p^3} - 2 q^3 - q^6}{\prod_{k+l \le d} \left(1 - z p^{3k-3} q^{3l-3}\right)} \right) z^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \left[z^i\right] \oint\limits_{|q|=1} \oint\limits_{|p|=1} \frac{1 + p^3 q^3 + \dfrac{q^6}{p^3} - 2 q^3 - q^6}{\prod_{k+l \le d} \left(1 - z p^{3k-3} q^{3l-3}\right)} \frac{dp}{p} \frac{dq}{q} \right) z^i =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{|q|=1} \oint\limits_{|p|=1} \frac{1 + p^3 q^3 + \dfrac{q^6}{p^3} - 2 q^3 - q^6}{\prod_{k+l \le d} \left(1 - z p^{3k} q^{3l}\right)} \frac{dp}{p} \frac{dq}{q}.$$

При доведенні використано три очевидні формальні тотожності

$$\left[(zpq)^i\right] f(z,q,p) = \left[z^i\right] f\left(\frac{z}{pq}, q, p\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\left[z^i\right] f(z,q,p)\right) z^i = f(z,q,p),$$

$$\left[z^i\right] f(z,q,p) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[z^i\right] \oint\limits_{|q|=1} \oint\limits_{|p|=1} f(z,q,p) \frac{dp}{p} \frac{dq}{q}.$$

Теорему доведено.

Наведемо кілька перших членів ряду Пуанкаре для алгебри інваріантів тернарної форми порядків 3, 4, 5, 6, 7, що отримані за формулою (3):

$$\mathcal{P}\left(A_3^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = 1 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + 2z^{12} + z^{14} + 2z^{16} +$$
$$+ 2z^{18} + 2z^{20} + 2z^{22} + 3z^{24} + \ldots,$$

$$\mathcal{P}\left(A_4^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = 1 + z^3 + 2z^6 + 4z^9 + 7z^{12} + 11z^{15} + 19z^{18} +$$
$$+ 29z^{21} + 44z^{24} + 67z^{27} + \ldots,$$

$$\mathcal{P}\left(A_5^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = 1 + 2z^6 + z^9 + 19z^{12} + 24z^{15} + 178z^{18} + 383z^{21} +$$
$$+ 1470z^{24} + 3331z^{27} + \ldots,$$

$$\mathcal{P}\left(A_6^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = 1 + z^3 + z^4 + z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 8z^8 + 17z^9 +$$
$$+ 28z^{10} + 48z^{11} + 99z^{12} + \ldots,$$

$$\mathcal{P}\left(A_7^{\mathfrak{sl}_3}, z\right) = 1 + 3z^6 + 13z^9 + 421z^{12} + 4992z^{15} +$$
$$+ 60303z^{18} + 548966z^{21} + \ldots.$$

У випадку $d = 4$ початкові члени ряду Пуанкаре збігаються з початковими членами ряду, який отримується з відомої явної формули Шіоди для $\mathcal{P}\left(A_4^{\mathfrak{sl}_3}, z\right)$

(див. [10]). Для $d > 4$ результати є новими. Проблеми обчислення інтеграла (4) у явному вигляді та асимптотичної поведінки ряду $\mathcal{P}\big(A_d^{\mathfrak{sl}_3}, z\big)$ є окремими важливими задачами теорії інваріантів тернарної форми.

1. *Boole G.* Exposition of a general theory of linear transformations, parts I, II // Cambridge Math. J. – 1843. – **3**. – P. 1 – 20, 106 – 119.
2. *Sylvester J. J.* Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorems of invariants // Phil. Magazine. – 1878. – P. 178 – 188.
3. *Cayley A.* A second memoir upon quantic // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1856. – **146**. – P. 101 – 126.
4. *Hilbert D.* Theory of algebraic invariants // Lectures. – Cambridge Univ. Press, 1993.
5. *Gordan P.* Über die Theorie der ternären cubischen Formen // Clebsch Ann. – 1869. – **1**. – S. 57 – 89.
6. *Noether E.* Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form // J. Math. – 1908. – **134**. – S. 23 – 90.
7. *Fulton W., Harris J.* Representation theory: a first course. – New York, Inc.: Springer, 1991.
8. *Бедратюк Л. П.* Теорема Робертса для тернарних форм // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – **349**. – С. 1 – 13.
9. *Humphreys J.* Introduction to Lie algebras and representation theory. – New York, Inc.: Springer, 1978.
10. *Shioda T.* On the graded ring of invariants of binary octavics // Amer. J. Math. – 1967. – **89**. – P. 1022 – 1046.

Одержано 30.03.10,
після доопрацювання — 26.07.10