УДК 519.21

А. О. Погоруй (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка)

ЗГАСАЮЧІ ЕВОЛЮЦІЇ В БАГАТОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

We study fading random evolutions in multidimensional spaces. By reducing multidimensional cases to the one-dimensional case, we calculate the limiting distributions of fading evolutions for some semi-Markov media.

Изучаются затухающие случайные эволюции в многомерных пространствах. Вычислены граничные распределения затухающих эволюций в некоторых полумарковских средах путем сведения многомерных случаев к одномерному.

1. Вступ. Згасаюча еволюція описує рух частинки, швидкість якої певним чином уповільнюється, наприклад, під дією зовнішніх сил, до повної зупинки. В роботах [1 – 3] вивчались згасаючі марковські та напівмарковські еволюції на прямій або, іншими словами, одновимірні згасаючі еволюції у марковському та напівмарковському середовищах із степеневим по відношенню до значень керуючого процесу уповільненням швидкості. Для окремих випадків, наприклад показникового у роботі [2] та ерлангівського і рівномірного у [1, 3] відповідно, вдалося знайти функції граничних розподілів у вигляді збіжних рядів.

У цій статті досліджуються згасаючі еволюції, які описують рух частинки у багатовимірних просторах. Знаходження граничних розподілів випадкових еволюцій у багатовимірних просторах у деяких напівмарковських середовищах можна звести до вже знайдених граничних розподілів у одновимірному випадку. Зокрема, вивчається граничний розподіл згасаючих еволюцій, для яких перемикаючий процес має час перебування, що розподілений за Ерлангом чи розподілом Максвелла.

2. Згасаючі еволюції в багатовимірних просторах. Нехай $\xi(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}$, $t \ge 0$, де $\tau_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k$ і $\theta_k \ge 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $G(t)$ зі щільністю

$$g(t) = \frac{d}{dt} G(t).$$

Розглянемо рух частинки, яка стартує з початку координат $(0, 0, \ldots, 0)$ простору R^n, $n \ge 1$, у момент $t = 0$ і рухається з початковою абсолютною швидкістю v_0 у напрямку випадкового одиничного вектора $\vec{\eta}_0^{(n)}$, початок якого знаходиться в $(0, 0, \ldots, 0)$, а кінець має рівномірний розподіл на одиничній сфері $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. У момент часу τ_0 абсолютна швидкість частинки є v_1 у напрямку випадкового вектора $\vec{\eta}_1^{(n)}$, однаково розподіленого з $\vec{\eta}_0^{(n)}$ і з початком в $(0, 0, \ldots, 0)$ і т. д.

Положення частинки $\vec{x}^{(n)}(t)$ у момент часу t задається формулою

$$\vec{x}^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{\xi(t)} v_i \, \vec{\eta}_i^{(n)} \theta_i + v_{\xi(t)} \, \vec{\eta}_{\xi(t)}^{(n)} \big(t - \xi(t)\big). \qquad (1)$$

Далі будемо припускати, що $v_i = a^i$, $0 < a < 1$. Згідно з [1 – 3], у цьому випадку $\vec{x}^{(n)}(t)$ будемо називати n-вимірною згасаючою еволюцією. Нас цікавить граничний розподіл положення частинки $\vec{x}^{(n)}(t)$ при $t \to \infty$.

Позначимо через $\vec{\sigma}^{(n)}$ границю ряду $\sum_{i=0}^{m} a^i \,\vec{\eta}_i^{(n)} \theta_i$ при умові, що $m \to \to +\infty$. Далі будемо розглядати такі $\vec{\eta}_i^{(n)}$, θ_i, при яких ряд $\sum_{i=0}^{m} a^i \,\vec{\eta}_i^{(n)} \theta_i$ збігається з імовірністю одиниця, тому будемо позначати $\vec{\sigma}^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \,\vec{\eta}_i^{(n)} \theta_i$, маючи на увазі цю збіжність.

Характеристична функція випадкового вектора $\vec{\sigma}^{(n)}$ визначається розподілом його проекції σ на фіксовану пряму в R^n [4]. Використовуючи це, можна уникнути аналізу в R^n.

Доведемо твердження, яке буде використано для знаходження розподілу проекції $\vec{\sigma}^{(n)}$ на фіксовану пряму.

Твердження. *Щільність розподілу проекції* η_i *вектора* $\vec{\eta}_i^{(n)}$, $n \geq 3$, *на довільну фіксовану пряму простору* R^n *має вигляд*

$$f_{\eta_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(1-x^2)^{(n-3)/2}, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Позначимо через S_n площу одиничної сфери $\Omega^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$, а через V_n об'єм одиничної кулі $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$.

Для $n \geq 3$ будемо обчислювати S_n, як площу поверхні обертання півсфери $\Omega^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 1,\ x_{n-1} \geq 0\}$ навколо гіперплощини $x_{n-1} = x_n = 0$. Позначаючи $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n-2}^2} = x_{n-1} \geq 0$, маємо

$$S_n = \int\limits_{B^{n-2}} 2\pi f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) \times$$

$$\times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}\right)^2}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{B^{n-2}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2} = 2\pi V_{n-2}. \tag{3}$$

Легко бачити, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}\right)^2} = 1, \tag{4}$$

$$x_1,\, x_2, \ldots ,\, x_{n-2} \in B^{n-2}.$$

Із (3), (4) випливає, що проекція $\vec{\eta}_{B^{n-2}}$ вектора $\vec{\eta}_i^{(n)}$ на B^{n-2} має рівномірний розподіл на B^{n-2}. Дійсно, якщо Δ_1, $\Delta_2 \subset B^{n-2}$, до того ж їхні міри рівні, $m(\Delta_1) = m(\Delta_2)$, де $m(\cdot)$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^{n-2}$, то і площі $S(\Delta_i) = 2\pi \int_{\Delta_i} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2}$, $i = 1, 2$, частин сфери S_n, що проектуються на Δ_1, Δ_2 відповідно, є рівними. Наприклад, як відомо із [4], при $n = 3$ проекція вектора $\vec{\eta}_i^{(3)}$ на фіксовану пряму має рівномірний розподіл на відрізку $[-1, 1]$.

Об'єм одиничної кулі B^{n-2} обчислюється за формулою

$$V_{n-2} = \int_{-1}^{1} V_{n-3}(1-x^2)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{(n-3)/2}\, dx,$$

де $V_{n-3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ — об'єм $(n-3)$-вимірної сфери радіуса $\sqrt{1-x^2}$ [5]. Звідси згідно з принципом Кавальєрі випливає, що щільність розподілу проекції η_i вектора $\vec{\eta}_i^{(n)}$, $n \geq 3$, на цю пряму має вигляд (2).

Нижче наведено приклади, які показують як знаходження граничного розподілу згасаючої еволюції у певному напівмарковському середовищі у багатовимірному просторі можна звести до обчислення граничного розподілу для одновимірної еволюції у відповідному напівмарковському середовищі.

3. Приклади. ***3.1. Тривимірний випадок.*** Розглянемо випадок $n = 3$. Як випливає із (2), для всіх $i \geq 1$ проекція η_i вектора $\vec{\eta}_i^{(3)}$ на фіксовану пряму є випадковою величиною з рівномірним на відрізку $[-1, 1]$ розподілом. Отже, проекція σ вектора $\vec{\sigma}^{(3)}$ на цю пряму має вигляд $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \eta_i \theta_i$, де випадкова величина $\eta_i\theta_i$ має розподіл

$$F(t) = \mathrm{P}\big(\eta_i\theta_i \leq t\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 G\left(\frac{t}{x}\right) dx, & t \geq 0, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 G\left(-\frac{t}{x}\right) dx, & t < 0. \end{cases}$$

Для щільності $f(t) = \dfrac{d}{dt}F(t)$ при $t \geq 0$ отримуємо $f(t) = \int_t^{+\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{g(x)}{x}\, dx$, звідки

$$t\,\frac{d}{dt} f(t) = -\frac{1}{2}\, g(t), \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Аналогічно при $t < 0$

$$t\,\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2}\, g(-t). \tag{6}$$

Нехай випадкові величини θ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мають ерлангівський розподіл $g(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$. З (5), (6) випливає, що $f(t) = \dfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|t|}$, тобто для всіх $i \geq 1$ випадкову величину $\eta_i\theta_i$ можна зобразити у вигляді $\eta_i\theta_i = \zeta_i - \zeta_i'$, де ζ_i, ζ_i' — незалежні випадкові величини з експоненціальним розподілом $F_\zeta(x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, і $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \eta_i \theta_i$ записується у вигляді

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \zeta_i - \sum_{j=0}^{\infty} a^j \zeta_j',$$

де $\sum_{i=0}^{\infty} a^i \zeta_i$ і $\sum_{j=0}^{\infty} a^j \zeta_j'$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини.

Функція розподілу випадкової величини $\mu = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \zeta_i$ знаходиться у вигляді [2]

$$F_\mu(x) = 1 + c_0 e^{-\lambda x} + c_1 e^{-\lambda \frac{x}{a}} + c_2 e^{-\lambda \frac{x}{a^2}} + c_3 e^{-\lambda \frac{x}{a^3}} + \ldots, \quad x \geq 0.$$

Звідси функція розподілу σ має вигляд

$$F_\sigma(x) = \int_{-x}^{\infty} F_\mu(x+u)\, dF_\mu(u).$$

Якщо θ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мають щільність розподілу Максвелла $g(t) = \sqrt{2/\pi}\, t^2 e^{-t^2/2}$, то із (5), (6) випливає, що випадкова величина $\zeta_i = \eta_i\theta_i$ має щільність нормального розподілу

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Оскільки нормальний розподіл є стійким, то з урахуванням результатів [3] щільність розподілу $F_\sigma(t)$ випадкової величини $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \zeta_i$ є нормальною і має вигляд

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-a^2)}} e^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{1-a^2}\right)}.$$

3.2. П'ятивимірний випадок. Згідно з твердженням щільність $f_{\eta_i}(x)$ розподілу проекції η_i вектора $\vec{\eta}_i^{(5)}$ на фіксовану пряму в $\mathbb{R}^5$ має вигляд

$$f_{\eta_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1-x^2), & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини $\eta_i\theta_i$ зображується у вигляді

$$F(t) = \mathrm{P}\big(\eta_i\theta_i \le t\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 G\left(\frac{t}{x}\right)(1-x^2)\,dx, & t \ge 0, \\ \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 G\left(-\frac{t}{x}\right)(1-x^2)\,dx, & t < 0. \end{cases}$$

Припустимо, що існує щільність $g(t) = \dfrac{dG(t)}{dt}$, тоді для $t \ge 0$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{3}{4}\int_0^1 g\left(\frac{t}{x}\right)\frac{(1-x^2)}{x}\,dx.$$

Аналогічно для $t < 0$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{3}{4}\int_0^1 g\left(-\frac{t}{x}\right)\frac{(1-x^2)}{x}\,dx.$$

Нехай випадкові величини θ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мають ерлангівський розподіл $g(t) = \dfrac{1}{6}t^3e^{-t}$, тоді щільність розподілу $\eta_i\theta_i$ має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{4}\big(1 + |t|\big)e^{-|t|}.$$

Звідси випливає, що $f(t) = \dfrac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-u|}e^{-|u|}du$, тобто $\eta_i\theta_i = \xi_i + \xi_i'$, де ξ_i, ξ_i' — незалежні випадкові величини, які мають щільність Лапласа $f_\xi(t) = \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$.

Для цього випадку знаходження функції розподілу $F_\sigma(x)$ випадкової величини $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} a^i\eta_i\theta_i$ описано у попередньому прикладі.

3.3. Двовимірний випадок. Розглянемо випадок, коли $n = 2$. Легко бачити, що для цього випадку формула (2) також справедлива, тобто проекція η_i вектора $\vec{\eta}_i^{(2)}$ на фіксовану пряму має щільність розподілу

$$f_{\eta_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тому функція розподілу $F_+(t)$ довжини проекції $|\zeta_i| = |\eta_i|\theta_i$ вектора $\vec{\eta}_i^{(2)}\theta_i$ на пряму має вигляд

$$F_+(t) = \int_0^1 G\left(\frac{t}{x}\right)\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} G\left(\frac{t}{\sin\theta}\right)d\theta, \quad t \ge 0. \tag{7}$$

Відомо [4], що коли існує щільність $f_+(t) = \frac{d}{dt} F_+(t)$, то формула (7) еквівалентна наступній:

$$G(t) = 1 - t \int_0^{\pi/2} f_+\left(\frac{t}{\sin\theta}\right) \frac{d\theta}{\sin^2\theta}. \tag{8}$$

Підставляючи у (8) $f_+(t) = \frac{d}{dt} F_+(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$ отримуємо

$$G(t) = 1 - t \int_{\arcsin t}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = 1 - \sqrt{1 - t^2}.$$

Звідси випливає, що якщо випадкові величини θ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мають функцію розподілу $G(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$, то довжина проекції $\zeta_i = \eta_i \theta_i$ вектора $\vec{\eta}_i^{(2)} \theta_i$ на пряму має рівномірний розподіл на відрізку $[-1, 1]$.

У цьому випадку функція розподілу $F_\sigma(x)$ випадкової величини $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \eta_i \theta_i$ знаходиться у вигляді [3]

$$F_\sigma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{-\frac{|x|}{a^{2n}}} + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m e^{-|x| a^{2m}}.$$

1. *Погоруй А. О.* Стаціонарні розподіли згасаючих еволюцій // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 425 – 431.
2. *Самойленко І. В.* Згасаючі марковські еволюції // Там же. – 2002. – **54**, № 3. – С. 448 – 459.
3. *Pogorui A. A., Rodriguez-Dagnino R. M.* Limiting distribution of fading evolution in some semi-Markov media // Там же. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1720 – 1724.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 751 с.
5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. – М.: Наука, 1972. – 618 с.

Одержано 18.02.10,
після доопрацювання — 23.07.10