УДК 517.925

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова),
А. А. Козьма (Одес. гос. эконом. ун-т)

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We establish existence theorems and asymptotic representations for some classes of solutions of second-order differential equations whose right-hand sides contain nonlinearities of a more general form than nonlinearities of the Emden – Fowler type.

Встановлено необхідні і достатні умови існування та асимптотичні зображення деяких класів розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями більш загального вигляду, ніж нелінійності типу Емдена – Фаулера.

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $p_i\colon [a, \omega) \to (0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, m$, $-\infty < a < \omega \le \le +\infty$[1], — непрерывно дифференцируемые функции, $r_i\colon [a, \omega) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$\varphi_{ik}\colon \Delta_k \to (0, +\infty)$, $k = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо} \ \ [y_k^0, Y_k), \\ \text{либо} \ \ (Y_k, y_k^0], \end{cases} \qquad y_k^0 \in \mathbb{R}, \qquad Y_k = \begin{cases} \text{либо} \ \ 0, \\ \text{либо} \ \ \pm\infty^2, \end{cases} \qquad k = 0, 1, \tag{1.3}$$

причем φ_{ik} такие, что при каждом $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0, \qquad 0 \le \varphi_{ik}^0 \le +\infty, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

и если $\varphi_{ik}(z)$ не является тождественной константой на промежутке Δ_k, то

$$\varphi'_{ik}(z) \ne 0 \quad \text{при} \quad z \in \Delta_k, \qquad \lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \text{const},$$
$$\limsup_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \left| \frac{z\varphi''_{ik}(z)}{\varphi'_{ik}(z)} \right| < +\infty. \tag{1.5}$$

[1] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.
[2] При $Y_k = +\infty$ ($Y_k = -\infty$) считаем, что $y_k^0 > 0$ ($y_k^0 < 0$).

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \ \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \ \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение 1.1. *Решение y уравнения* (1.1), *определенное на промежутке* $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$, *будем называть* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$*-решением, где* $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, *если оно удовлетворяет следующим условиям*:

$$y^{(k)}\colon\ [t_0, \omega) \to \Delta_k, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = Y_k, \quad k = 0, 1, \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0 \quad \text{и при} \quad \mu_0 = \pm\infty \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2} = 1. \tag{1.7}$$

Разобьем множество $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ на четыре непересекающихся подмножества:

$$M_1 = \big\{i \in M\colon\ \varphi_{ik}^0 = \text{const} \ne 0, \ \ k = 0, 1\big\},$$

$$M_2 = \big\{i \in M \setminus M_1\colon\ \varphi_{i1}^0 = \text{const} \ne 0\big\},$$

$$M_3 = \big\{i \in M \setminus M_1\colon\ \varphi_{i0}^0 = \text{const} \ne 0\big\},$$

$$M_4 = M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3).$$

В [1, 2] и настоящей работе для каждого $i \in M \setminus M_4$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна i-му слагаемому. При выполнении этих условий в [1] для $i \in M_1$ ($M_1 \ne \varnothing$) и всех возможных значений μ_0, а в [2] для $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0, 1\}$, $M_{2+k} \ne \varnothing$) и $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ были установлены необходимые и достаточные условия существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений. Кроме того, получены асимптотические представления этих решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. Целью настоящей работы является установление условий существования и асимптотического поведения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений для $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0, 1\}$, $M_{2+k} \ne \varnothing$) и $\mu_0 = \pm\infty$.

2. Некоторые априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений.

Лемма 2.1. *Пусть* $y\colon [t_0, \omega) \to \Delta_0 - \Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решение уравнения* (1.1). *Тогда имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty.$$

Доказательство леммы 2.1 при различных значениях Y_0 см. в работах [3, 4].

Лемма 2.2. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$, $M_{2+k} \ne \varnothing$, $k \in \{0, 1\}$ *и для некоторого* $i \in M_{2+k}$ *выполняются условия*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < +\infty \quad \text{при} \quad j \in M \setminus \{i\} \tag{2.1}$$

и

$$
\begin{gathered}
\gamma\sigma_{ik} \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \textit{если} \quad j \in M_1, \\
\gamma(\sigma_{ik} - \sigma_{jk}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \textit{если} \quad j \in M_{2+k}, \quad j \neq i, \\
\gamma(\sigma_{ik} - \sigma_{j1-k}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \textit{если} \quad j \in M_{3-k}, \\
\gamma(\sigma_{ik} - \sigma_{j0} - \sigma_{j1}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \textit{если} \quad j \in M_4,
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

где

$$
\gamma = \begin{cases} 1 & \textit{при} \ \ \mu_0 = +\infty, \\ -1 & \textit{при} \ \ \mu_0 = -\infty. \end{cases}
$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решения уравнения* (1.1) *выполняются предельные соотношения*

$$
\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in M \setminus \{i\}. \tag{2.3}
$$

Доказательство. Пусть $y\colon [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). Положим при $k \in \{0; 1\}$

$$
\begin{gathered}
z_{j1}(t) = \frac{p_j(t)}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если} \quad j \in M_1, \\
z_{j2+k}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \text{ если } j \in M_{2+k}, \quad i \neq j, \\
z_{j3-k}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если} \quad j \in M_{3-k}, \\
z_{j4}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если} \quad j \in M_4.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$
z'_{j1}(t) = \frac{p_j(t)}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} - \frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right],
$$

$$
z'_{j2+k}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \times
$$

$$
\times \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))} - \frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right],
$$

$$
z'_{j3-k}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \times
$$

$$
\times \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y^{(2-k)}(t)\varphi'_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))} - \frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right],
$$

$$
z'_{j4}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y''(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} + \right.
$$

$$+\frac{y'(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} - \frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\Bigg].$$

Запишем эти соотношения в виде

$$z'_{j1}(t) = \frac{z_{j1}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right],$$

$$z'_{j2+k}(t) = \frac{z_{j2+k}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\Bigg[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} +$$

$$+\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\left(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))} - \frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right)\Bigg],$$

$$z'_{j3-k}(t) = \frac{z_{j3-k}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\Bigg[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} -$$

$$-\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\Bigg(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} -$$

$$-\left(\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}\right)^{1-2k}\frac{y^{(1-k)}(t)\varphi'_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{\varphi_{j1-k}(y^{(k)}(t))}\Bigg)\Bigg],$$

$$z'_{j4}(t) = \frac{z_{j4}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\Bigg[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} -$$

$$-\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\Bigg(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} -$$

$$-\left(\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}\right)^{1-k}\frac{y'(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} - \left(\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}\right)^{-k}\frac{y(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}\Bigg)\Bigg].$$

В силу условия (1.6) и второго из условий (1.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{lk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{lk}(y^{(k)}(t))} = \sigma_{lk}, \quad \text{где} \quad k = 0, 1; \quad l = i, j. \tag{2.4}$$

Кроме того, согласно условиям (1.6), (1.7) и лемме 2.1

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} = \pm\infty, \quad k = 0, 1, \qquad \text{и} \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = 1. \tag{2.5}$$

Тогда с учетом (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) существуют постоянные $z^0_{jl} < 0$, $l = \overline{1,4}$, и $t_1 \in [t_0, \omega)$ такие, что выполняются неравенства

$$z'_{jl}(t) \le \frac{z^0_{jl} z_{jl}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega), \quad l = \overline{1,4},$$

откуда следует, что

$$\ln\left|\frac{z_{jl}(t)}{z_{jl}(t_1)}\right| \le z^0_{jl}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega).$$

Поскольку выражения, стоящие справа, стремятся к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_{jl}(t) = 0, \qquad l = \overline{1,4}, \quad j \in M\backslash\{i\}.$$

Из этих предельных соотношений с учетом определения множеств M_l, $l = \overline{1,4}$, следует справедливость (2.3).

3. Основные результаты. Введем вспомогательные обозначения

$$I_i(t) = \int\limits_{I_i^0}^{t} p_i(s)\,ds, \qquad Q_i(t) = \int\limits_{Q_i^0}^{t} I_i(s)\,ds,$$

где

$$I_i^0 = \begin{cases} a, & \text{если} \ \displaystyle\int_a^\omega p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \ \displaystyle\int_a^\omega p_i(s)\,ds < +\infty, \end{cases} \qquad Q_i^0 = \begin{cases} a, & \text{если} \ \displaystyle\int_a^\omega |I_i(s)|\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \ \displaystyle\int_a^\omega |I_i(s)|\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Кроме того, при $i \in M_{2+k}$, $k \in \{0,1\}$ и $\sigma_{ik} \neq 1$ введем функцию

$$\Phi_{ik}(s) = \int\limits_{B_{ik}}^{s} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}, \quad \text{где} \quad B_{ik} = \begin{cases} y_k^0, & \text{если} \ \left|\displaystyle\int_{y_k^0}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}\right| = +\infty, \\ Y_k, & \text{если} \ \left|\displaystyle\int_{y_k^0}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}\right| < +\infty. \end{cases}$$

Для этой функции существует обратная функция Φ_{ik}^{-1}, определенная при $B_{ik} = y_k^0$ на бесконечном промежутке

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} [0; +\infty), & \text{если} \ (1-\sigma_{ik})y_k^0 > 0, \\ (-\infty; 0], & \text{если} \ (1-\sigma_{ik})y_k^0 < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

и при $B_{ik} = Y_k$ на конечном промежутке

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} (0; b_{ik}], & \text{если} \ (1-\sigma_{ik})y_k^0 > 0, \\ (b_{ik}; 0), & \text{если} \ (1-\sigma_{ik})y_k^0 < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $b_{ik} = \displaystyle\int_{Y_k}^{y_k^0} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}$.

Для функций Φ_{ik} и Φ_{ik}^{-1} имеют место предельные соотношения

$$\begin{gathered} \lim_{s\to Y_k} \Phi_{ik}(s) = \infty, \qquad \lim_{z\to\infty} \Phi_{ik}^{-1}(z) = Y_k \quad (\text{при} \quad B_{ik} = y_k^0), \\ \lim_{s\to Y_k} \Phi_{ik}(s) = 0, \qquad \lim_{z\to 0} \Phi_{ik}^{-1}(z) = Y_k \quad (\text{при} \quad B_{ik} = Y_k). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Кроме того, применяя правило Лопиталя, с учетом первого из предельных соотношений (1.5) получаем

$$\lim_{\substack{s\to Y_k \\ s\in\Delta_k}} \frac{\Phi_{ik}(s)}{\frac{s}{\varphi_{ik}(s)}} = \frac{1}{1-\sigma_{ik}}, \quad k = 0, 1. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\mu_0 = \pm\infty$ и для некоторого $i \in M_2$ выполняются условия* (2.1), (2.2), $\sigma_{i0} \neq 1$. *Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если} \ \lim\limits_{t\uparrow\omega} |Q_i(t)|^{1-\sigma_{i0}} = +\infty, \\ 0, & \text{если} \ \lim\limits_{t\uparrow\omega} |Q_i(t)|^{1-\sigma_{i0}} = 0, \end{cases} \qquad Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если} \ \gamma\pi_\omega(t) > 0, \\ 0, & \text{если} \ \gamma\pi_\omega(t) < 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

при $t \in (a, \omega)$ выполнялись неравенства

$$\alpha_i Q_i(t) y_0^0 > 0, \qquad (1-\sigma_{i0}) I_i(t) Q_i(t) y_0^0 y_1^0 > 0, \qquad \gamma(1-\sigma_{i0})\pi_\omega(t) I_i(t) > 0 \tag{3.6}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(I_i(t))^2}{p_i(t) Q_i(t)} = 1. \tag{3.7}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_i (1-\sigma_{i0})^2 \varphi_{i1}^0 Q_i(t)[1+o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}) I_i(t)}[1+o(1)]. \tag{3.8}$$

***Доказательство теоремы* 3.1.** *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). Тогда из леммы 2.1 следует справедливость второго из условий (3.5). В силу выполнения условий $i \in M_2$, (2.1), (2.2) из уравнения (1.1) с учетом леммы 2.2 следует, что

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}(y(t)) \varphi_{i1}^0 [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.9}$$

Покажем, учитывая условие $\sigma_{i0} \neq 1$, что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1-\sigma_{i0}) I_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.10}$$

Поскольку

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\right)' = \frac{y''(t)\varphi_{i0}(y(t)) - y'(t)\varphi_{i0}'(y(t))y'(t)}{\varphi_{i0}^2(y(t))} =$$

$$= \frac{y''(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\left[1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \frac{y(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}\right],$$

в силу (1.5), (1.7) и (3.9) получаем

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\right)' = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1-\sigma_{i0}) p_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.11}$$

Интегрируя это выражение от t_0 до t $(t \in (t_0, \omega))$, имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = c_i + \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1-\sigma_{i0}) I_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.12}$$

Если $I_i^0 = t_0$, то справедливо (3.10). Покажем, что $c_i = 0$ при $I_i^0 = \omega$. Предположим противное, тогда $\dfrac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = c_i + o(1)$ при $t \uparrow \omega$ и в силу (3.9)

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 p_i(t) \left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение от t_0 до t $(t \in (t_0, \omega))$, находим

$$\ln |y'(t)| = c + \alpha_i \varphi_{i1}^0 I_i(t) \left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Здесь левая часть при $t \uparrow \omega$ стремится к бесконечности, а правая — к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (3.10) в случае, когда $I_i^0 = \omega$. Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}) I_i(t)} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

и, в силу определения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решения, имеет место третье из неравенств (3.6).

Применяя правило Лопиталя в форме Штольца, с учетом (1.5), (3.10) и условия $\sigma_{i0} \neq 1$ находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t)) Q_i(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\dfrac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\right)'}{Q_i'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\left[1 - \dfrac{y(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}\right]}{I_i(t)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1-\sigma_{i0})^2$$

или

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1-\sigma_{i0})^2 Q_i(t)\, [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.13}$$

Из этого соотношения следует справедливость первого из неравенств (3.6) и первого из асимптотических представлений (3.8).

В силу (3.10) и (3.13)

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1-\sigma_{i0}) Q_i(t)} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.14}$$

что обеспечивает выполнение первого из условий (3.5) и второго из неравенств (3.6).

Кроме того, из (3.12) и (3.14) с учетом условия $\lim_{t\uparrow\omega} \dfrac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2} = 1$ следует справедливость предельного соотношения (3.7) и второго из асимптотических представлений (3.8).

Достаточность. Пусть выполняются условия (3.5) – (3.7). В силу (3.1) – (3.3), а также (3.5) и (3.6) однозначно определяются значения Y_k и промежутки Δ_k,

Δ_{ik}, $k = 0, 1$. Установив Y_k и Δ_k, $k = 0, 1$, докажем существование хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решения уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотическое представление (3.8). Для этого применим к уравнению (1.1) преобразование

$$\Phi_{i0}(y(t)) = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)[1 + v_1(x)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)} [1 + v_2(x)], \tag{3.15}$$

где

$$x = \beta \ln |Q_i(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } Q_i^0 = a, \\ -1, & \text{если } Q_i^0 = \omega. \end{cases}$$

В силу первых из условий (3.5) и (3.6) можно выбрать $t_1 \in [t_0, \omega)$ так, что $\frac{3}{2} \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) \subset \Delta_{i0}$ при $t \in [t_1, \omega)$. Тогда из первого соотношения (3.15) и свойств функции Φ_{i0} следует, что при $t \in [t_1, \omega)$, $|v_1| \leq \frac{1}{2}$ имеет место равенство $y(t) = Y_i(t, v_1)$, в котором

$$Y_i(t, v_1) = \Phi_{i0}^{-1} \left(\alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)[1 + v_1] \right), \tag{3.16}$$

где t — функция, обратная к $x = \beta \ln |Q_i(t)|$.

Для функции Y_i в силу (3.1)–(3.4) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_i(t, v_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right], \tag{3.17}$$

$$Y_i(t, v_1) \subset \Delta_0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega), \quad |v_1| \leq \frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

Кроме того, при каждом фиксированном значении $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ имеем

$$(Y_i(t, v_1))'_t = \varphi_{i0} \left(Y_i(t, v_1) \right) \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) I_i(t)[1 + v_1]. \tag{3.19}$$

Тогда, применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0} \left(Y_i(t, v_1) \right) Q_i(t)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 [1 + v_1]$$

или

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0} \left(Y_i(t, v_1) \right)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t)[1 + v_1][1 + o(1)] \tag{3.20}$$

при $t \uparrow \omega$ и фиксированном $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$.

Из (3.19) и (3.20) получим $\left(\text{при любом фиксированном } v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \right)$ предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \left(Y_i(t, v_1) \right)'_t}{Y_i(t, v_1)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)}. \tag{3.21}$$

Введем также функцию

$$Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)=\frac{I_i(t)}{(1-\sigma_{i0})Q_i(t)}Y_i(t,v_1)[1+v_2], \tag{3.22}$$

определенную при $t\in(t_1,\omega)$, $|v_k|\le\frac{1}{2}$, $k=1,2$. Для нее имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)'_t}{(Y_i(t,v_1))'_t\,Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\dfrac{1+v_2}{1-\sigma_{i0}}\left(\left(\dfrac{I_i(t)}{Q_i(t)}\right)'Y_i(t,v_1)+\dfrac{I_i(t)}{Q_i(t)}\left(Y_i(t,v_1)\right)'_t\right)}{(Y_i(t,v_1))'_t\,\dfrac{1+v_2}{1-\sigma_{i0}}\dfrac{I_i(t)}{Q_i(t)}Y_i(t,v_1)}=$$

$$=1+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\dfrac{I_i(t)}{Q_i(t)}\right)'\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})^2Q_i(t)[1+v_1]\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\dfrac{I_i(t)}{Q_i(t)}\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})Q_i(t)[1+v_1]\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}=$$

$$=1+(1-\sigma_{i0})\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_i(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)}-1\right)=1. \tag{3.23}$$

В силу (3.21) и (3.23)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)'_t}{Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_i(t)}{(1-\sigma_{i0})Q_i(t)} \tag{3.24}$$

при фиксированных $|v_k|\le\frac{1}{2}$, $k=1,2$.

Из (3.24) с учетом второго и третьего из неравенств (3.6), предельного соотношения (3.7), (3.22) и монотонности функции Y_i по переменой v_1 получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)=Y_1\quad\text{равномерно по}\quad v_k\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right],\ k=1,2, \tag{3.25}$$

$$Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\subset\Delta_{i1}\quad\text{при}\quad t\in[t_2,\omega),\quad\text{где}\quad t_2\in[t_1,\omega). \tag{3.26}$$

В силу условий (1.3) – (1.5), (3.17), (3.18), (3.25), (3.26) следует, что равномерно по $|v_k|\le\frac{1}{2}$, $k=1,2$, имеют место пределы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi'_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}=\sigma_{j0},\quad j=\overline{1,m}, \tag{3.27}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}=\sigma_{j1},\quad j=\overline{1,m}, \tag{3.28}$$

причем если $\lim_{\substack{Y\to Y_k\\ Y\in\Delta_k}}\varphi_{jk}=\text{const}\ne0$, то $\sigma_{jk}=0$, $k\in\{0,1\}$.

Поскольку выполняются условия (3.17), (3.18), (3.21), (3.23) – (3.28), при фиксированных $|v_k| \leq \dfrac{1}{2}$, $k = 1, 2$, функции $Y_i(t, v_1)$ и $Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2)$ обладают всеми теми свойствами $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений, которые использовались при доказательстве леммы 2.2 и, следовательно,

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)} = 0, \quad j \in M \setminus \{i\}. \tag{3.29}$$

Так как

$$\left(\frac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right)'_{v_1} =$$

$$= \frac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)} \frac{\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})}{Y_i(t,v_1)} \times$$

$$\times Q_i(t)\left[\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_{j0}'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\varphi_{j1}'\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)} - \frac{Y_i(t,v_1)\varphi_{i0}'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right]$$

и выполняются условия (2.2), (3.27), (3.28), существует $t_3 \in [t_2, \omega)$ такое, что при $t \in [t_3, \omega)$ и $|v_k| \leq \dfrac{1}{2}$, $k = 1, 2$, правая часть сохраняет знак. Следовательно, отношение $\dfrac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j0}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}$ изменяется монотонно по v_1 при $t \in [t_3, \omega)$, $|v_2| \leq \dfrac{1}{2}$. Учитывая этот факт, нетрудно показать, что предельное соотношение (3.29) выполняется равномерно по v_1, v_2. Рассуждая таким же образом и учитывая (3.20), имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)Q_i(t)[1+v_1]} = \alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})^2 \tag{3.30}$$

равномерно по v_1.

В результате преобразования (3.15) получим заданную на множестве

$$\Omega = [x_0; +\infty) \times D, \qquad x_0 = \beta \ln |Q_i(t_3)|,$$

$$D = \left\{(v_1, v_2) \colon |v_k| \leq \frac{1}{2}, \;\; k = 1, 2\right\}$$

систему дифференциальных уравнений

$$v_1' = \beta\left[-[1+v_1] + \frac{\alpha_i Y_i(t,v_1)}{\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})^2 Q_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,v_1))}[1+v_2]\right],$$

$$v_2' = \beta\left[-\left(\frac{I_i'(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)}-1\right)[1+v_2] - \frac{1}{1-\sigma_{i0}}[1+v_2]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\sigma_{i0})Q_i^2(t)}{I_i^2(t)Y_i(t,v_1)}\sum_{j=1}^m \alpha_j[1+r_j(t)]p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t,v_1))\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)\right], \tag{3.31}$$

в которой t — функция, обратная к $x = \beta\ln|Q_i(t)|$.

На множестве Ω функции $\dfrac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_{i0}(Y_i(t,v_1))}$ и $\dfrac{\varphi_{j0}(Y_i(t,v_1))\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{Y_i(t,v_1)}$ являются непрерывными и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным v_1 и v_2. Разложим эти функции при каждом фиксированном t по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $(0,0)$ с целью выделения линейных частей. С учетом этих разложений и (3.16) – (3.30) система (3.31) принимает вид

$$v_1' = \beta[f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_1(x,v_1,v_2)],$$
$$v_2' = \beta[f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_2(x,v_1,v_2)], \tag{3.32}$$

где

$$f_1(x) = -1 + \frac{\alpha_i}{\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})}\frac{Y_i(t,0)}{Q_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))},$$

$$c_{11} = -1 + \frac{\alpha_i}{\varphi_{i1}(1-\sigma_{i0})^2 Q_i(t)}\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})Q_i(t)\left[1-\frac{Y_i(t,0)\varphi_{i0}'(Y_i(t,0))}{\varphi_{i0}(Y_i(t,0))}\right],$$

$$c_{12}(x) = \frac{\alpha_i}{\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})^2 Q_i(t)}\alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})Q_i(t)\left[1-\frac{Y_i(t,0)\varphi_{i0}'(Y_i(t,0))}{\varphi_{i0}(Y_i(t,0))}\right],$$

$$f_2(x) = -\frac{I_i'(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)} + 1 - \frac{1}{1-\sigma_{i0}} + (1-\sigma_{i0})\times$$

$$\times\sum_{j=1}^m \alpha_j[1+r_j(t)]\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t,0))\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}\times$$

$$\times\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)\frac{p_i(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)}\frac{Q_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)},$$

$$c_{21}(x) = \alpha_i\varphi_{i1}^0(1-\sigma_{i0})^2\times$$

$$\times\sum_{j=1}^m \alpha_j[1+r_j(t)]\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t,0))\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{Q_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)}\right)^2\frac{p_i(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)}\times$$

$$\times\left[\frac{Y_i(t,0)\varphi'_{j0}(Y_i(t,0))}{\varphi_{j0}(Y_i(t,0))}\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{Y_i^{[1]}(t,0,0)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}-\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)\right],$$

$$c_{22}(x)=-\left(\frac{I_i'(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)}-1\right)-\frac{2}{1-\sigma_{i0}}+\frac{p_i(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)}(1-\sigma_{i0})\sum_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]\times$$

$$\times\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t,0))\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}\frac{Q_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)}\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)\times$$

$$\times\frac{Y_i^{[1]}(t,0,0)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)},$$

а функции $V_1(x,v_1,v_2)$ и $V_2(x,v_1,v_2)$ таковы, что $\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0}\dfrac{V_k(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|}=0$, $k=1,2$, равномерно по $x\in[x_0;+\infty)$.

Кроме того, принимая во внимание условия (3.1) – (3.4), (3.16) – (3.30), а также замену независимой переменной, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=0,\quad k=1,2,\qquad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{12}(x)=1,\qquad \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x)=\frac{-1}{1-\sigma_{i0}},\qquad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x)=\frac{-2}{1-\sigma_{i0}}.$$

Следовательно, система (3.32) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Записав характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части этой системы

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \beta \\ -\dfrac{\beta}{1-\sigma_{i0}} & \dfrac{-2\beta}{1-\sigma_{i0}}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

получим

$$\lambda^2+\frac{2\beta}{1-\sigma_{i0}}\lambda+\frac{1}{1-\sigma_{i0}}=0.$$

У этого уравнения нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.32) выполняются все условия теоремы 2.1 работы [5]. На основании этой теоремы система (3.32) имеет хотя бы одно решение $(v_k)_{k=1}^2\colon [x_1,+\infty)\to\mathbb{R}^2$, где $x_1\geq x_0$, которое стремится к нулю при $x\to+\infty$. Этому решению, с учетом преобразования (3.15), соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.1), которое вместе со своей производной допускают асимптотические представления

$$\Phi_{i0}(y(t)) = \alpha_i(1-\sigma_{i0})\varphi_{i1}^0 Q_i(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1-\sigma_{i0})Q_i(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из этих соотношений, с учетом (3.4) и (3.7), следует справедливость асимптотических представлений (3.8). Используя эти представления, а также условия (2.1), (2.2), $\sigma_{i0} \neq 1$, (3.7), (3.6), нетрудно показать, что $y(t)$ имеет все свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решения.

Теорема 3.2. *Пусть $\mu_0 = \pm\infty$ и для некоторого $i \in M_3$ выполняются условия* (2.1), (2.2), $\sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, & \textit{если} \ \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_i(t)|^{1-\sigma_{i1}} = +\infty, \\ 0, & \textit{если} \ \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_i(t)|^{1-\sigma_{i1}} = 0, \end{cases} \qquad Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \textit{если} \ \gamma\pi_\omega(t) > 0, \\ 0, & \textit{если} \ \gamma\pi_\omega(t) < 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

при $t \in (a, \omega)$ выполнялись неравенства

$$\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_i(t)y_1^0 > 0, \quad (1-\sigma_{i1})I_i(t)Q_i(t)y_0^0 y_1^0 > 0, \quad \gamma(1-\sigma_{i1})\pi_\omega(t)I_i(t) > 0 \tag{3.34}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(I_i(t))^2}{p_i(t)Q_i(t)} = 1. \tag{3.35}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1-\sigma_{i1})\varphi_{i0}^0 I_i(t)[1+o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i1})I_i(t)}[1+o(1)]. \tag{3.36}$$

***Доказательство теоремы* 3.2.** *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). Тогда из леммы 2.1 следует справедливость второго из условий (3.33). В силу выполнения условий $i \in M_3$, (2.1), (2.2) из леммы 2.2 следует, что

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.37}$$

Применив правило Лопиталя, с учетом (1.5) и $\sigma_{i1} \neq 1$ получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{I_i(t)\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1-\sigma_{i1})\varphi_{i0}^0, \tag{3.38}$$

или

$$y'(t) = \alpha_i(1-\sigma_{i1})\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t)\varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.39}$$

Из (3.39) следует справедливость первого из неравенств (3.34) и первого из асимптотических представлений (3.36). Дифференцируя выражение $\dfrac{y(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}$, с учетом (1.5), (1.7) и (3.39) получаем соотношение

$$\left(\frac{y(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right)' = \alpha_i(1-\sigma_{i1})^2\varphi_{i0}^0 I_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Исследуя его таким же образом, как и соотношение (3.10), имеем

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i[1-\sigma_{i1}]^2\varphi_{i0}^0 Q_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.40}$$

Отсюда с учетом (3.38) получаем

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1-\sigma_{i1})Q_i(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.41}$$

что подтверждает справедливость второго из неравенств (3.34). Кроме того, из (3.37) и (3.39) получим асимптотическое представление

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i1})I_i(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.42}$$

Тогда, во-первых, справедливо первое из условий (3.33), во-вторых, с учетом (1.7) выполняется третье из неравенств (3.34), а в-третьих, принимая во внимание (3.41) и (1.7), получаем предельное соотношение (3.35) и, следовательно, второе из асимптотических представлений (3.36).

Достаточность. Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\Phi_{i1}(y'(t)) = \alpha_i\varphi_{i0}^0 I_i(t)[1+v_2(x)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1-\sigma_{i1})Q_i(t)}[1+v_1(x)],$$

где

$$x = \beta\ln|I_i(t)|, \qquad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } I_i^0 = a, \\ -1, & \text{если } I_i^0 = \omega, \end{cases}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' = \beta\Biggl[-\left(1-\frac{I_i^2(t)}{Q_i(t)I_i'(t)}\right)[1+v_1] - \frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{I_i^2(t)}{Q_i(t)I_i'(t)}[1+v_1]^2 + \\ + \frac{I_i(t)[1+v_1]}{I_i'(t)Y_i^{[1]}(t,v_2)}\sum_{j=1}^m \alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)\Biggr], \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} v_2' = \beta\Biggl[-[1+v_2] + \frac{1}{\alpha_i\varphi_{i0}^0 I_i'(t)\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}\times \\ \times\sum_{j=1}^m \alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)\Biggr], \end{aligned}$$

где

$$Y_i^{[1]}(t,v_2) = \Phi_{i1}^{-1}\left(\alpha_i\varphi_{i0}^0 I_i(t)[1+v_2(x)]\right),$$

$$Y_i(t, v_1, v_2) = \frac{(1-\sigma_{i1})Q_i(t)}{I_i(t)[1+v_1(x)]} Y_i^{[1]}(t, v_2(x)),$$

t — функция, обратная к $x = \beta \ln |I_i(t)|$.

По аналогии с доказательством теоремы 3.1, раскладывая функции $\dfrac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}{Y_i^{[1]}(t,v_2)}$ и $\dfrac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}{\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}$ при каждом фиксированном t по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $(0,0) \in D$ с целью выделения линейных частей, приводим систему (3.43) к системе вида (3.32), которая в силу условий теоремы и свойств функций Y_i, $Y_i^{[1]}$ является квазилинейной системой с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части этой системы имеет вид

$$\lambda^2 + \beta\frac{2-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}\lambda + \frac{1}{1-\sigma_{i1}} = 0.$$

Поскольку оно не имеет корней с нулевой действительной частью, а также выполняются другие условия теоремы 2.1 работы [5], система (3.43) имеет решение $(v_k)_{k=1}^2 \colon [x_1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, где $x_1 \geq x_0$, которое стремится к нулю при $x \to +\infty$. Этому решению соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.36). Используя эти представления и условия (3.34), (3.35), нетрудно показать, что $y(t)$ имеет все свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решения.

4. Выводы. В настоящей работе для каждого $i \in M \backslash M_4$ получены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна i-му слагаемому. При этих условиях в случае $i \in M_{2+k}$, $k \in \{0,1\}$, $M_{2+k} \neq \varnothing$, приведены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений уравнения (1.1), а также асимптотические представления таких решений при $t \uparrow \omega$.

1. *Козьма А. А.* Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2006, – **9**, № 4. – С. 490 – 501.
2. *Козьма О. О.* Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 55 – 65.
3. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 3. – С. 338 – 355.
4. *Касьянова В. А.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 5 – 19.
5. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 433 – 444.

Получено 28.01.09