УДК 517.36

А. И. Двирный (Академия пожарной безопасности, Черкассы),
В. И. Слынько (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДВУМ МЕРАМ АБСТРАКТНЫХ МОНОТОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We consider differential equations in a Banach space subjected to pulse influence at fixed times. It is assumed that a partial order is introduced in the Banach space with the use of a certain normal cone and that the differential equations are monotone with respect to initial data. We propose a new approach to the construction of comparison systems in a finite-dimensional space that does not involve auxiliary Lyapunov type functions. On the basis of this approach, we establish sufficient conditions for the stability of this class of differential equations in terms of two measures, choosing a certain Birkhoff measure as the measure of initial displacements, and the norm in the given Banach space as the measure of current displacements. We give some examples of investigation of impulsive systems of differential equations in critical cases and linear impulsive systems of partial differential equations.

Розглядаються диференціальні рівняння у банаховому просторі, що зазнають імпульсного впливу у фіксовані моменти часу. Припускається, що у банаховому просторі введено часткову впорядкованість з допомогою деякого нормального конуса і диференціальні рівняння, монотонні відносно початкових даних. Запропоновано новий підхід до побудови систем порівняння у скінченновимірному просторі без використання допоміжних функцій типу Ляпунова. На основі цього підходу встановлено достатні умови стійкості за двома мірами цього класу диференціальних рівнянь. При цьому за міру початкових відхилень вибрано деяку міру Біркгофа, а за міру поточних відхилень — норму у вихідному банаховому просторі. Наведено приклади дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у критичних випадках і лінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, що зазнають імпульсного впливу.

Введение. Исследование различных явлений и процессов в сложных системах с бесконечномерным фазовым пространством при условии мгновенного изменения вектора состояния системы — актуальная задача современного естествознания [1, 2]. Математической формализацией моделей таких процессов и явлений являются дифференциальные уравнения с импульсным воздействием [3]. Важным вопросом качественного анализа для этого класса дифференциальных уравнений является вопрос об устойчивости тех или иных стационарных решений. Фундаментальные результаты для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в случае конечномерного фазового пространства получены в ряде работ (см., например, [3, 4, 6, 7]). Вместе с тем некоторые вопросы теории устойчивости систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием изучены мало. В частности, к таким вопросам можно отнести исследование нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. Основные, известные авторам, результаты в этом направлении получены и обобщены в работах [5, 8 – 12]. В рамках проблемы исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в критическом случае актуальным является вопрос о распространении известных критериев устойчивости решений автономных монотонных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [13 – 15] на класс монотонных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Основная трудность в процессе такого распространения состоит в отсутствии инвариантности системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием относительно сдвигов по времени. Именно наличие этого свойства для обыкновенных дифференциальных уравнений позволило в работе [13] установить критерий устойчивости нелинейных автономных монотонных систем дифференциальных уравнений.

Проблема исследования устойчивости решений для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в бесконечномерном пространстве является малоизученной. Как обычно, для этого класса систем естественной постановкой проблемы устойчивости является исследование устойчивости в терминах двух мер [16, 17]. Для некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных при наличии импульсных возмущений характерна монотонность правых частей относительно некоторого конуса в банаховом пространстве. Например, для уравнений параболического типа на основе принципа максимума часто можно установить монотонность решений.

Целью настоящей работы является развитие метода сравнения для некоторого класса абстрактных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Предполагается, что рассматриваемые уравнения имеют свойство монотонности по начальным данным относительно некоторого нормального конуса в банаховом пространстве. При этом для таких уравнений строится система сравнения в конечномерном пространстве. Существенным отличием предложенного варианта метода сравнения от известных подходов [18] является то, что при построении системы сравнения не используются вспомогательные функции типа Ляпунова. При таком подходе справедливость теоремы сравнения обеспечивается наличием свойства монотонности решений исходного эволюционного уравнения. Следует также отметить, что в случае отсутствия импульсного воздействия при исследовании устойчивости бесконечномерных систем дифференциальных уравнений, монотонных относительно некоторого конуса, возникает необходимость дополнительных требований относительно соответствующей полугруппы операторов (как, например, ее строгая монотонность [19 – 21]) либо дополнительных требований относительно компактности некоторых полутраекторий (как, например, в работе [22]). Эти требования часто сужают область применимости соответствующих результатов или являются трудно проверяемыми. Вариант принципа сравнения, предложенный в настоящей работе, позволяет снять эти ограничения, а также получить оценки времени переходных процессов.

1. Постановка задачи. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $T \subset \mathbb{R}$ — открытое подмножество $\mathbb{R}$. Произвольное отображение $u\colon T \to X$ называется абстрактной функцией. Для абстрактных функций можно ввести определения предельного перехода, непрерывности и дифференцируемости в сильном или слабом смысле (см. [23]). В настоящей работе будем рассматривать эти понятия в сильном смысле (по норме). Как обычно, обозначим через $C(T;X)$ класс непрерывных на множестве T функций и через $C^k(T;X)$ класс k раз непрерывно дифференцируемых на множестве T функций.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} = f(u), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta u(t) = g(u(t)), \quad t = \tau_k,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $u \in X$, $t \in [0,\infty)$, $f\colon X \to X$, $\Delta u(t) = u(t+0) - u(t)$, $g\colon X \to X$. Последовательность моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную точку сгущения на бесконечности. Определим понятие решения абстрактного дифференциального уравнения (1.1).

Определение 1.1. *Абстрактная функция* $u(t)$ *называется* (*сильным*) *решением уравнения* (1.1) *на интервале* $[0,T]$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*:

1) $u \in C([0,\tau_k) \bigcup (\bigcup_{k=1}^{\infty}(\tau_k,\tau_{k+1}))\,; X)$ *и* $\lim\limits_{t\to\tau_k-0} u(t) = u(\tau_k)$;

2) $u \in C^1([0,T] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau_k\}; X)$ *и*

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau_k\},$$

$$\lim_{t\to\tau_k-0} \frac{du(t)}{dt} = f(u(\tau_k)), \qquad \lim_{t\to\tau_k+0} \frac{du(t)}{dt} = f(u(\tau_k+0));$$

3) *при* $t = \tau_k$ *выполняются равенства*

$$u(t+0) - u(t) = g(u(t)).$$

Предположим, что задача Коши для дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием $u(0) = u_0 \in H$, где H — линейное подмножество пространства X, имеет единственное решение, которое обозначим через $u(t;u_0)$, и при этом $u(t;u_0) \in H$ при всех $t \geq 0$. Решения задачи Коши естественным образом порождают однопараметрическое семейство отображений $\{W^t(\cdot)\}_{t\geq 0}$, $W^t\colon H \to H$, определенное по правилу $W^t(x) = u(t;x)$.

Рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение без импульсного воздействия

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.2}$$

Предположим, что $D(f) \subset H$ и соответствующая задача Коши с начальным условием $x(0) = x_0 \in H$ имеет единственное решение $x(t;x_0) \in H$, определенное при всех $t \geq 0$, а решения задачи Коши для дифференциального уравнения (1.2) порождают полугруппу операторов $\{V^t(\cdot)\}_{t\geq 0}$.

Пусть K — некоторый конус в пространстве X, $\{w_s\}_{s=1}^r \subset K \cap D(f)$ — набор элементов конуса K и

$$P = \left\{ \sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s, \quad \alpha_s \geq 0 \right\}.$$

Конус K естественно порождает структуру порядка в пространстве X:

$$y \overset{K}{\geq} x \Leftrightarrow y - x \in K.$$

В случае телесного конуса K можно также ввести отношение строгого порядка

$$y \overset{K}{>} x \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} K.$$

Напомним [27], что конус K называется нормальным, если существует положительная постоянная a_K такая, что при всех $0 \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} y$ выполняется $\|y\|_X \geq$ $\geq a_K \|x\|_X$. Далее предполагаем нормальность конуса K.

Относительно полугруппы $\{V^t(\cdot)\}_{t\geq 0}$ введем следующие дополнительные предположения:

1) отображение $V^t(\cdot)$ монотонно относительно частичного порядка, порожденного конусом K, т. е. при всех $x, y \in H$ из неравенства $y \overset{K}{\geq} x$ следует неравенство $V^t(y) \overset{K}{\geq} V^t(x)$ при всех $t \geq 0$;

2) существует норма $\|\cdot\|_2$, эквивалентная исходной норме $\|\cdot\|_X$, такая, что полугруппа $V^t(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, точнее для любого ограниченного подмножества $M \subset H$ и достаточно малого положительного числа h_0 существует положительная постоянная L такая, что при всех $x \in M$, $y \in M$ и $h \in [0, h_0]$ выполняется неравенство

$$\|V^h(x) - V^h(y)\|_2 \leq e^{Lh}\|x - y\|_2; \tag{1.3}$$

3) для любого компактного множества $Q \subset P$ и достаточно малого положительного числа h_0 существуют положительные постоянные C и γ такие, что при всех $x \in Q$, $y \in Q$ и $h \in [0, h_0]$ выполняется неравенство

$$\|V^h(x) - x - hf(x)\|_X \leq Ch^{1+\gamma}; \tag{1.4}$$

4) существуют функции $F_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in C(\mathbb{R}^r_+; \mathbb{R})$, $s = \overline{1,r}$, такие, что при всех $\alpha_s \geq 0$, $s = \overline{1,r}$, выполняется неравенство

$$f\left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s\right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} F_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s, \tag{1.5}$$

и при всех $s = \overline{1,r}$ — неравенство $F_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geq 0$, если $\alpha_s = 0$ и $\alpha_m \geq 0$, $m = \overline{1,r}$.

Относительно функции $u + g(u)$ сделаем следующие предположения:

5) существует окрестность N точки $u = 0$ такая, что при всех $x, y \in H \cap N$ неравенство $x \overset{K}{\geq} y$ влечет за собой выполнение неравенства $x + g(x) \overset{K}{\geq} y + g(y)$ (локальная монотонность);

6) существуют функции $G_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $G_s \in C(\mathbb{R}^r_+, \mathbb{R}_+)$, $s = \overline{1,r}$, такие, что при всех $\alpha_s \geq 0$, $s = \overline{1,r}$, выполняется неравенство

$$g\left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s\right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} G_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s \tag{1.6}$$

и функции $\alpha_s + G_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $s = \overline{1,r}$, имеют свойство локальной позитивности, т.е. существуют положительные постоянные α_s^0, $s = \overline{1,r}$, такие, что при всех $0 \leq \alpha_s \leq \alpha_s^0$, $s = \overline{1,r}$, выполняются неравенства

$$\alpha_s + G_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geq 0, \quad s = \overline{1,r}.$$

Отметим, что предположение 5 в сочетании с предположением 1 относительно свойств полугруппы $\{V^t(\cdot)\}_{t\geq 0}$ влечет за собой свойство монотонности отображения $W^t(x)$ по переменной x относительно конуса K.

Предположим, что точка $u = 0$ является изолированным состоянием равновесия абстрактного дифференциального уравнения (1.1). Определим основные понятия устойчивости для состояния равновесия $u = 0$ абстрактного дифференциального уравнения (1.1). Как обычно, понятия устойчивости для уравнений в банаховом пространстве естественно формулировать в терминах двух мер [16, 20]. Определим функции $h_0 \colon H \to \mathbb{R}_+$, $h \colon H \to \mathbb{R}_+$ и подмножества в пространстве X:

$$H^0_\delta = \{x \in H \colon h_0(x) < \delta\}, \qquad H^1_\varepsilon = \{x \in H \colon h(x) < \varepsilon\}.$$

Определение 1.2. *Состояние равновесия $u = 0$ абстрактного дифференциального уравнения* (1.1) *называется*:

1) *устойчивым в конусе K по мерам (h_0, h), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из включения $u_0 \in K \cap H^0_\delta$ следует включение $W^t(u_0) \in K \cap H^1_\varepsilon$ при всех $t \geq 0$*;

2) *асимптотически устойчивым в конусе K по мерам (h_0, h), если $u = 0$ устойчиво в конусе K и существует положительное число ρ такое, что при всех $u_0 \in K \cap H^0_\rho$ выполняется предельное соотношение $\lim_{t\to\infty} h(W^t(u_0)) = 0$.*

Рассмотрим примеры мер, которые будут использованы в дальнейшем. Пусть $w \in K$ и $x \in X$. Предположим, что существует постоянная $\beta > 0$ такая, что $-\beta w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \beta w$, тогда положим

$$h_w(x) = \inf_{\beta>0} \left\{ -\beta w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \beta w \right\},$$

в противном случае будем полагать, что $h_w(x) = +\infty$. Мера $h_w(x)$ называется мерой Биркгофа [27]. Элементы пространства X, для которых $h_w(x) < +\infty$, называются w-измеримыми и образуют линейное подмножество $X_w \subset X$ (если конус K является нормальным, то X_w — подпространство в X [27]). В случае телесного конуса K условие $w \in \operatorname{int} K$ гарантирует, что $h_w(x) < \infty$ при всех $x \in X$, т. е. $X_w = X$. Кроме того, будем рассматривать меру $h(x) = \|x\|_X$.

Целью настоящей работы является исследование устойчивости в конусе состояния равновесия $u = 0$ абстрактного дифференциального уравнения (1.1).

2. Вспомогательные результаты. Основным методом исследования устойчивости (асимптотической устойчивости) в конусе K в настоящей работе избран метод сравнения. Сформулируем сначала принцип сравнения для абстрактного дифференциального уравнения (1.2). Наряду с этим уравнением рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (систему сравнения)

$$\frac{d\chi_s}{dt} = F_s(\chi_1, \ldots, \chi_r), \quad s = \overline{1, r}, \tag{2.1}$$

где $\chi_s \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\chi_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $s = \overline{1, r}$, решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (2.1) с начальным условием $\chi_s(0; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \alpha_s$, $s = \overline{1, r}$, $\omega^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — правый конец максимального интервала существования решения $\chi_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $s = \overline{1, r}$, задачи Коши для дифференциального уравнения (2.1).

Лемма 2.1. *Предположим, что для абстрактного дифференциального уравнения* (1.2) *выполняются предположения* 1 – 4 *из п.* 1.

Тогда при всех $\alpha_s \geq 0$, $s = \overline{1, r}$, и при всех $t \in [0, \omega^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))$ выполняются неравенства

$$V^t \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^r \chi_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s \tag{2.2}$$

и $\chi_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geq 0$ при всех $s = \overline{1, r}$.

Доказательство. Установим сначала справедливость сформулированного утверждения при достаточно малых значениях t. Покажем, что существует $T > 0$ такое, что при всех $t \in [0, T]$ неравенство (2.2) выполняется. Зафиксируем $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)^T$. Пусть $0 < t \leq T$ и l — достаточное большое натуральное число, определим $h = \dfrac{t}{l}$, $d = \sum_{s=1}^{r} \|w_s\|_2$, $d_1 = \sum_{s=1}^{r} \|w_s\|_1$ и подмножества

$$M = \left\{ x \in X \colon \|x - \sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s\|_2 \leq dR \right\},$$

$$Q = \left\{ x \in P \colon \|x - \sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s\|_1 \leq d_1 R \right\},$$

где R — фиксированное положительное число.

Используя метод математической индукции и монотонность полугруппы операторов V^t, нетрудно установить выполнение неравенства

$$V^{mh} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m)} w_s + R_m(h), \tag{2.3}$$

где последовательность $\alpha^{(m)} = (\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_r^{(m)})^T$ является решением системы разностных уравнений

$$\alpha_s^{(m)} = \alpha_s^{(m-1)} + hF_s(\alpha_1^{(m-1)}, \ldots, \alpha_r^{(m-1)}), \quad s = \overline{1, r},$$

с начальными условиями $\alpha_s^{(0)} = \alpha_s, \quad s = \overline{1, r}$, а ошибки $R_m(h)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$R_m(h) = V^h \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s + R_{m-1}(h) \right) -$$
$$- \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s - hf \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s \right) \tag{2.4}$$

с начальным условием $R_0(h) = 0$.

Отметим, что в силу предположения 4 из п. 1 число T можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $\alpha_s^{(m)} \geq 0$ и $|\alpha_s^{(m)} - \alpha_s| < R$ при всех $s = \overline{1, r}$, $m = \overline{1, l}$.

При $m = 1$ элемент $\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s + R_{m-1}(h)$ принадлежит M. Предположим, что существует наименьшее натуральное число N $(N \leq l)$ такое, что

$$\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(N)} w_s + R_N(h) \notin M,$$

$$\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m)} w_s + R_m(h) \in M, \quad m = \overline{1, N-1}.$$

Из уравнения (2.4) следует, что при всех $m = \overline{1, N}$ выполняется оценка

$$\|R_m(h)\|_2 \leq \left\| V^h \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s + R_{m-1}(h) \right) - V^h \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s \right) \right\|_2 +$$
$$+ \left\| V^h \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s \right) - \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s - hf \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s^{(m-1)} w_s \right) \right\|_2.$$

Учитывая предположения 2 и 3 относительно полугруппы $V^t(\cdot)$ и тот факт, что

$$\left\|\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^{(m-1)}w_s-\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right\|_2\le dR,$$

$$\left\|\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^{(m-1)}w_s-\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right\|_1\le d_1R,\quad m=\overline{1,N},$$

получаем

$$\|R_m(h)\|_2\le e^{Lh}\|R_{m-1}(h)\|_2+C_1h^{1+\gamma},$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная. Очевидно, что $\|R_m(h)\|_2\le v_m$, $m=\overline{1,N}$, где v_m удовлетворяет разностному уравнению

$$v_m=e^{Lh}v_{m-1}+C_1h^{1+\gamma},\quad v_0=0.$$

Таким образом, $\|R_m(h)\|_2\le\dfrac{C_1}{L}h^\gamma(e^{LT}-1)$, $m=\overline{1,N}$. Натуральное число l выберем настолько большим, чтобы $\dfrac{C_1}{L}h^\gamma(e^{LT}-1)<\dfrac{dR}{2}$, тогда

$$\left\|\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^{(N)}w_s+R_N(h)-\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right\|_2\le dhN\|F\|_{G_R}+\frac{C_1}{L}h^\gamma(e^{LT}-1)<dR.$$

Как следствие, включение $\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^{(m)}w_s+R_m(h)\in M$ и оценка $\|R_m(h)\|_2\le$ $\le\dfrac{C_1}{L}h^\gamma(e^{LT}-1)$ выполняются при всех $m=\overline{1,l}$. Полагая $m=l$ и переходя к пределу при $h\to0$, получаем $\lim_{h\to0}\|R_l(h)\|_2=0$ и вследствие эквивалентности норм $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_2$ выполняется равенство $\lim\limits_{h\to0}\|R_l(h)\|_X=0$.

Полагая в неравенстве (2.3) $m=l$, имеем

$$V^t\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)\overset{K}{\le}\sum_{s=1}^{r}\alpha_s^{(l)}w_s+R_l(h).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу $h\to0$ $(l\to\infty)$ и учитывая, что $\alpha_s^{(l)}\to\chi_s(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, $s=\overline{1,r}$, при $l\to\infty$ (см. [28], доказательство леммы Пеано), приходим к выводу о справедливости теоремы при достаточно малых t. Таким образом, при всех $t\in[0,T]$ выполняется неравенство

$$V^t\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)\overset{K}{\le}\sum_{s=1}^{r}\chi_s(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)w_s.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}_+$ значений t, для которых неравенство (2.2) выполняется на сегменте $[0,t]$. Предположим, что $\tau^*=\sup\mathcal{T}<\omega^+(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, тогда τ^* принадлежит $\mathcal{T}$ и при достаточно малых положительных числах T^* таких, что $\tau^*+T^*<\omega^+(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ и $T^*\in\mathcal{T}$. Применяя полугрупповое свойство, получаем

$$V^{\tau^*+T^*}\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)=V^{\tau^*}\left(V^{T^*}\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)\right)\overset{K}{\le}$$

$$\overset{K}{\leq} V^{\tau^*}\left(\sum_{s=1}^{r}\chi_s(T^*;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)w_s\right)\overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq}\sum_{s=1}^{r}\chi_s(\tau^*;\chi_1(T^*;\alpha_1,\ldots,\alpha_r),\ldots,\chi_r(T^*;\alpha_1,\ldots,\alpha_r))w_s=$$

$$=\sum_{s=1}^{r}\chi_s(\tau^*+T^*;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)w_s,$$

что противоречит выбору числа τ^* и завершает доказательство леммы.

В некоторых случаях предположение 2 из п. 1 является слишком ограничительным и может быть ослаблено за счет введения дополнительных предположений относительно телесности конуса K и повышения требований относительно гладкости функций F_s, $s=\overline{1,r}$.

Будем говорить, что набор $\{w_s\}_{s=1}^r$ является допустимым, если существуют неотрицательные постоянные δ_s, $s=\overline{1,r}$, такие, что элемент $w=\sum_{s=1}^r\delta_s w_s\in$ $\in\operatorname{int}K$.

Вместо условия 2 из п. 1 введем следующее предположение:

2a) конус K телесный, набор $\{w_s\}_{s=1}^r$ является допустимым, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\|V^\varepsilon(x)-x\|_X=0$$

и $F_s\in\operatorname{Lip}(\mathbb{R}_+^r;\mathbb{R})$, $s=\overline{1,r}$.

Лемма 2.2. *Предположим, что для абстрактного дифференциального уравнения* (1.2) *выполняются предположения* 1, 3, 4 *из п.* 1 *и предположение* 2a *из п.* 2.

Тогда при всех $\alpha_s\geq 0$, $s=\overline{1,r}$, *и* $t\in[0,\omega^+(\alpha_1,\ldots,\alpha_r))$ *выполняется неравенство* (2.2).

Доказательство. Наряду с системой сравнения (2.1) рассмотрим вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\widetilde{\chi}_s}{dt}=F_s(\widetilde{\chi}_1,\ldots,\widetilde{\chi}_r)+\gamma\delta_s,\quad s=\overline{1,r},\tag{2.5}$$

где $\widetilde{\chi}_s\in\mathbb{R}$, γ — малый положительный параметр. Обозначим через $\widetilde{\chi}_s(t)$, $s=$ $=\overline{1,r}$, решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (2.5) с начальным условием $\widetilde{\chi}_s(0)=\alpha_s+\gamma\delta_s$, $s=\overline{1,r}$. Докажем, что при всех $t\in$ $\in[0,\widetilde{\omega}^+(\alpha_1+\gamma\delta_1,\ldots,\alpha_r+\gamma\delta_r))$ выполняется строгое неравенство

$$V^t\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)\overset{K}{<}\sum_{s=1}^{r}\widetilde{\chi}_s(t)w_s.\tag{2.6}$$

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество моментов времени t, для которых неравенство (2.6) выполняется. Множество $\mathcal{T}$ непустое, так как $0\in\mathcal{T}$. Обозначим $\tau^*=\sup\mathcal{T}$ и предположим, что $\tau^*<\widetilde{\omega}^+(\alpha_1+\gamma\delta_1,\ldots,\alpha_r+\gamma\delta_r)$. Тогда вследствие непрерывности полугруппы $\{V^t(\cdot)\}_{t\geq 0}$ и функций $\widetilde{\chi}_s(t)$, $s=\overline{1,r}$, по переменной t выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^{r}\widetilde{\chi}_s(t)w_s-V^t\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)\overset{K}{>}0,\quad t\in[0,\tau^*),\tag{2.7}$$

и имеет место включение

$$\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s - V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \in \partial K. \tag{2.8}$$

Известно [27], что существует функционал $\psi \in K^*$ такой, что

$$\psi \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s - V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) = 0. \tag{2.9}$$

Определим функцию

$$\xi(t) = \psi \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(t) w_s - V^{t} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right).$$

Отметим, что $\xi \in C^1[0, \widetilde{\omega}^+(\alpha_1 + \gamma\delta_1, \ldots, \alpha_r + \gamma\delta_r))$ и

$$\dot{\xi}(\tau^*) = \lim_{h \to 0+0} \frac{\xi(\tau^*) - \xi(\tau^* - h)}{h}.$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что $\xi(\tau^*) = 0$, $\xi(\tau^* - h) > 0$ при $h > 0$, поэтому $\dot{\xi}(\tau^*) \leq 0$.

С другой стороны,

$$\dot{\xi}(t) = \gamma\psi \left(\sum_{s=1}^{r} \delta_s w_s \right) +$$

$$+\psi \left(\sum_{s=1}^{r} F_s(\widetilde{\chi}_1(t), \ldots, \widetilde{\chi}_r(t)) w_s - f \left(V^t \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) \right).$$

Из условия 4 из п. 1 следует неравенство

$$f \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(t) w_s \right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} F_s(\widetilde{\chi}_1(t), \ldots, \widetilde{\chi}_r(t)) w_s.$$

Поэтому

$$\dot{\xi}(t) \geq \gamma\psi \left(\sum_{s=1}^{r} \delta_s w_s \right) + \psi \left(f \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(t) w_s \right) - f \left(V^t \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) \right).$$

При $t = \tau^*$ с учетом включений $\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s \in D(f)$ и $V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \in$ $\in D(f)$, по определению, получим

$$f \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V^{\varepsilon} \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s \right) - \sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s}{\varepsilon},$$

$$f \left(V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{V^{\varepsilon} \left(V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) - V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right)}{\varepsilon}$$

и, как следствие,

$$\psi \left(f \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s \right) - f \left(V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \left[\psi \left(V^{\varepsilon} \left(\sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s \right) - V^{\varepsilon} \left(V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \right) \right) + \right.$$

$$\left. +\psi \left(V^{\tau^*} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) - \sum_{s=1}^{r} \widetilde{\chi}_s(\tau^*) w_s \right) \right].$$

В силу (2.9) последнее слагаемое в квадратных скобках уничтожается, а в силу монотонности полугруппы $\{V^t(\cdot)\}_{t\geq 0}$ и включения (2.8) предпоследнее слагаемое в квадратных скобках неотрицательно, поэтому $\dot{\xi}(\tau^*) \geq \gamma \sum_{s=1}^{r} \delta_s \psi(w_s) > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\tau^* = \widetilde{\omega}^+(\alpha_1 + \gamma\delta_1, \ldots, \alpha_r + \gamma\delta_r)$. Из условия $F_s \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}_+^r; \mathbb{R})$ следует, что (см. [28])

$$\widetilde{\chi}_s(t) \to \chi_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r),$$

$$\liminf_{\gamma\to 0+} \widetilde{\omega}^+(\alpha_1 + \gamma\delta_1, \ldots, \alpha_r + \gamma\delta_r) \geq \omega^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

при $\gamma \to 0+$. Переход к пределу $\gamma \to 0+$ в неравенстве (2.6) завершает доказательство леммы.

Перейдем к формулировке соответствующих результатов для абстрактного дифференциального уравнения (1.1). Наряду с абстрактным дифференциальным уравнением (1.1) рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (систему сравнения)

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_s}{dt} &= F_s(\eta_1, \ldots, \eta_r), \quad s = \overline{1, r}, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta\eta_s &= G_s(\eta_1, \ldots, \eta_r), \quad s = \overline{1, r}, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\eta_s \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\eta_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $s = \overline{1, r}$, решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (2.10) с начальным условием $\eta_s(0; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \alpha_s$, $s = \overline{1, r}$, $\Omega^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — правый конец максимального интервала существования решения $\eta_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $s = \overline{1, r}$. Кроме того, определим величину

$$\widetilde{\Omega}^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leq \Omega^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

такую, что при всех $\tau_k \leq \widetilde{\Omega}^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ имеет место включение

$$W^{\tau_k} \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \in N.$$

Сформулируем принцип сравнения для абстрактного дифференциального уравнения (1.1).

Теорема 2.1. *Предположим, что абстрактное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием* (1.1) *удовлетворяет условиям* 1 – 6 *из п.* 1 (*или условиям* 1, 3 – 6 *из п.* 1 *и* 2a *из п.* 2).

Тогда для произвольных $\alpha_s \geq 0$, $s = \overline{1, r}$, *при всех* $t \in \left[0, \widetilde{\Omega}^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\right)$ *выполняется неравенство*

$$W^t \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s w_s \right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} \eta_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s. \tag{2.11}$$

Доказательство. Введем множество $\mathcal{T} \subset [0, \widetilde{\Omega}^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))$ тех t, при которых равенство (2.11) выполняется на сегменте $[0, t]$. Это множество непустое, так как $0 \in \mathcal{T}$. Обозначим $\tau = \sup \mathcal{T}$ и предположим, что $\tau < \widetilde{\Omega}^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Вследствие непрерывности слева отображения $W^t(\cdot)$ по переменной t истинно включение $\tau \in \mathcal{T}$:

$$W^\tau \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^r \eta_s(\tau; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s. \tag{2.12}$$

Пусть τ не совпадает с моментом импульсного воздействия.

Выберем ε настолько малым, чтобы существовал элемент $V^\varepsilon\Big(W^\tau\Big(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\Big)\Big)$ и полуинтервал $(\tau, \tau+\varepsilon]$ не содержал моментов импульсного воздействия. Применяя к неравенству (2.12) оператор V^ε и учитывая монотонность полугруппы операторов $\{V^t(\cdot)\}_{t \geq 0}$, получаем

$$W^{\tau+\varepsilon} \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) =$$

$$= V^\varepsilon \left(W^\tau \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \right) \overset{K}{\leq} V^\varepsilon \left(\sum_{s=1}^r \eta_s(\tau; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s \right) \overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^r \chi_s(\varepsilon; \eta_1(\tau; \alpha_1, \ldots, \alpha_r), \ldots, \eta_r(\tau; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)) w_s =$$

$$= \sum_{s=1}^r \eta_s(\tau+\varepsilon; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s,$$

что противоречит определению числа τ.

Предположим, что $\tau = \tau_j$, тогда $W^\tau \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \in N$, и вследствие непрерывности слева по переменной t и условия 6 из п. 1

$$W^{\tau_j+0} \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) = W^{\tau_j} \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) + g \left(W^{\tau_j} \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \right) \overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^r \left(\eta_s(\tau_j; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) + G_s(\eta_1(\tau_j; \alpha_1, \ldots, \alpha_r), \ldots, \eta_r(\tau_j; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)) \right) w_k =$$

$$= \sum_{s=1}^r \eta_s(\tau_j+0; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) w_s. \tag{2.13}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — настолько малое число, что существует элемент $V^\varepsilon\Big(W^\tau\Big(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\Big)\Big)$ и полуинтервал $(\tau, \tau+\varepsilon]$ не содержит моментов импульсного воздействия. Тогда, применяя оператор V^ε к неравенству (2.13) и учитывая монотонность полугруппы $\{V^t(\cdot)\}_{t \geq 0}$, получаем

$$W^{\tau+\varepsilon} \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) =$$

$$= V^{\varepsilon}\left(W^{\tau}\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s w_s\right)\right) \overset{K}{\leq} V^{\varepsilon}\left(\sum_{s=1}^{r}\eta_s(\tau;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)w_s\right) \overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r}\chi_s(\varepsilon;\eta_1(\tau;\alpha_1,\ldots,\alpha_r),\ldots,\eta_r(\tau;\alpha_1,\ldots,\alpha_r))w_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{r}\eta_s(\tau+\varepsilon;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)w_s,$$

что противоречит определению числа τ. Таким образом, предположение о том, что $\tau < \widetilde{\Omega}^{+}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, приводит к противоречию. Следовательно, $\tau = \widetilde{\Omega}^{+}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, что завершает доказательство теоремы 2.1.

3. Основной результат. Относительно системы сравнения (2.10) дополнительно предположим $F_s(0) = 0$, $G_s(0) = 0$, $s = \overline{1,r}$, тогда $\eta = 0$ — состояние равновесия этой системы. Для состояния равновесия $\eta = 0$ системы сравнения можно определить понятия устойчивости в конусе $\mathbb{R}^r_+$ аналогично определению 1.1 (см. также [13]).

Теорема 3.1. *Предположим, что для системы* (1.1) *выполняются предположения* 1 – 6 *из п.* 1 (*или предположения* 1, 3 – 6 *из п.* 1, 2*а из п.* 2) *и состояние равновесия* $\eta = 0$ *системы сравнения* (2.10):

1) *устойчиво в конусе* $\mathbb{R}^r_+$;

2) *асимптотически устойчиво в конусе* $\mathbb{R}^r_+$.

Тогда состояние равновесия $u = 0$ *абстрактного дифференциального уравнения* (1.1):

1) *устойчиво в конусе* K *по мерам* $(h_w, \|\cdot\|_X)$;

2) *асимптотически устойчиво в конусе* K *по мерам* $(h_w, \|\cdot\|_X)$.

Доказательство. Пусть элемент u_0 является w-измеримым и $0 \overset{K}{\leq} u_0 \overset{K}{\leq} h_w(u_0)w$. Тогда существует достаточно малое положительное число T такое, что при всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$0 \overset{K}{\leq} W^t(u_0) \overset{K}{\leq} W^t(h_w(u_0)\sum_{s=1}^{r}\delta_s w_s) \overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r}\eta_s\big(t; h_w(x_0)\delta_1,\ldots,h_w(x_0)\delta_r\big)w_s. \tag{3.1}$$

Покажем, что существует достаточно малое положительное число r_0 такое, что при всех $u_0 \in K$, $h_w(u_0) < r_0$ последнее неравенство выполняется при всех $t \geq 0$. Вследствие устойчивости в конусе $\mathbb{R}^r_+$ решения $\eta_s = 0$, $s = \overline{1,r}$, системы сравнения (2.10) положительное число δ_0 можно выбрать так, что при всех α_s, $0 < \alpha_s < \delta_0$, $s = \overline{1,r}$, выполняется равенство $\Omega^{+}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) = +\infty$ и при всех $t \geq 0$

$$\eta_s(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) < \frac{R}{2a_K m r}, \quad s = \overline{1,r},$$

где положительное число R выбрано из условия

$$\{x\colon \|x\|_X < R\} \subset N \cap D,$$

и $m = \max_{s=\overline{1,r}} \|w_s\|_X$. Выберем $r_0 = \min_{s=\overline{1,r}} \left\{ \dfrac{\delta_0}{\delta_s} \right\}$. Обозначим через τ супремум непустого множества моментов времени, для которых неравенство (3.1) выполняется. Пусть τ не является моментом импульсного воздействия. Тогда, по непрерывности, неравенство (3.1) выполняется и при $t = \tau$. Полугруппа $V^t(W^\tau(u_0))$ определена при достаточно малых t, поэтому, применяя лемму 2.1, получаем

$$0 \overset{K}{\leq} W^{t+\tau}(u_0) = V^t(W^\tau(u_0))) \overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} \eta_s\big(t+\tau; h_w(u_0)\delta_1, \ldots, h_w(u_0)\delta_r\big) w_s.$$

Таким образом, существование конечного τ в этом случае приводит к противоречию.

Предположим теперь, что $\tau = \tau_k$. Тогда вследствие непрерывности слева по t эволюционного оператора W^t неравенство (3.1) выполняется и при $t = \tau_k$. Поэтому

$$\|W^{\tau_k}(u_0)\|_X \leq a_K \sum_{s=1}^{r} \eta_s(\tau_k; h_w(u_0)\delta_1, \ldots, h_w(u_0)\delta_r) \|w_s\|_X < R$$

и $W^{\tau_k}(u_0) \in N$, откуда следует, что

$$W^{\tau_k+0}(u_0) = W^{\tau_k}(u_0) + g(W^{\tau_k}(u_0)) \overset{K}{\leq}$$

$$\overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^{r} \eta_s(\tau_k + 0; h_w(u_0)\delta_1, \ldots, h_w(u_0)\delta_r) w_s.$$

Применяя к последнему неравенству оператор V^t, определенный при достаточно малых t, и лемму 3.1, приходим к противоречию. Таким образом, неравенство (3.1) выполняется при всех $t \geq 0$, если только $h_w(u_0) < r_0$.

Зададим произвольное положительное число $\varepsilon > 0$. По условию теоремы 3.1 для заданного положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{a_K m r}$ существует положительное число $\Delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенств $0 \leq \alpha_s < \Delta(\varepsilon)$, $s = \overline{1,r}$, следуют неравенства $\eta_s(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \dfrac{\varepsilon}{a_K m r}$, $s = \overline{1,r}$, при всех $t \geq 0$. Выберем $\delta(\varepsilon) = \min_{s=\overline{1,r}} \left\{ \dfrac{\Delta(\varepsilon)}{\delta_s}, r_0 \right\} > 0$, тогда из условия $u_0 \in H^0_\delta$ и неравенства $W^t(u_0) \overset{K}{\geq} 0$ следует, что

$$\|W^t(u_0)\|_X \leq a_K \sum_{s=1}^{r} \eta_s(t; \delta_1 h_w(u_0), \ldots, \delta_r h_w(u_0)) \|w_s\|_X < \varepsilon$$

при всех $t \geq 0$. Устойчивость в конусе K состояния равновесия $u = 0$ по мерам $(h_w, \|\cdot\|_X)$ доказана. Асимптотическая устойчивость в конусе K состояния равновесия $u = 0$ по мерам $(h_w, \|\cdot\|_X)$ легко выводится из оценки

$$\|W^t(u_0)\|_X \leq a_K \sum_{s=1}^{r} \eta_s(t; \delta_1 h_w(u_0), \ldots, \delta_r h_w(u_0)) \|w_s\|_X,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Обсудим приложение полученных результатов в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, K — телесный конус в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= g(x(t)), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$.

Предположим также, что состояние равновесия системы (3.2) является изолированным.

Определение 3.1. *Функция f удовлетворяет условию Важевского, если для любых x, $y \in K$ и $\psi \in K^*$ таких, что $y \overset{K}{\geq} x$ и $(\psi, y - x) = 0$, выполняется неравенство $(\psi, f(y) - f(x)) \geq 0$.*

Относительно функции $g(x)$ предположим наличие свойства локальной монотонности по переменной x относительно конуса K.

Известно [13], что условие Важевского гарантирует выполнение для локальной полугруппы $\{V^t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ предположения 1 из п. 1. Условия 2 и 3 из п. 1 выполняются вследствие предположений относительно гладкости функции f.

Теорема 3.2. *Предположим, что существует допустимый набор $\{w_s\}_{s=1}^r$ такой, что система дифференциальных уравнений* (3.1) *удовлетворяет условиям предположений* 4 – 6 *из п.* 1 *и условию Важевского*:

1) *состояние равновесия $\eta_s = 0$, $s = \overline{1, r}$, системы сравнения* (2.10) *устойчиво в конусе $\mathbb{R}^r_+$*;

2) *состояние равновесия $\eta_s = 0$, $s = \overline{1, r}$, системы сравнения* (2.10) *асимптотически устойчиво в конусе $\mathbb{R}^r_+$.*

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (3.2):

1) *устойчиво в конусе K*;

2) *асимптотически устойчиво в конусе K.*

При доказательстве этой теоремы существенно используется эквивалентность норм в конечномерном пространстве.

4. Приложение. Приведем некоторые приложения полученных результатов.

***Пример* 1.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -ax_1^3 + \varepsilon x_1 x_2 x_3, \quad t \neq \tau_k, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_2^3 + \varepsilon x_1^2 x_3, \quad t \neq \tau_k, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3^3 + \varepsilon x_1 x_2 x_3, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x_1 &= x_1^3 + \varepsilon x_1 x_2^2, \quad t = \tau_k, \\ \Delta x_2 &= x_2^3 + \varepsilon x_1 x_2 x_3, \quad t = \tau_k, \\ \Delta x_3 &= -bx_3^3 + \varepsilon x_2 x_3^2, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где ε, a, b — положительные постоянные, $K = \mathbb{R}^3_+$,

$$\theta_1 \le \tau_{k+1} - \tau_k \le \theta_2.$$

Положим $w_1 = (1,1,0)^T$, $w_2 = (0,0,1)^T$.

Тогда система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= -a\eta_1^3 + \varepsilon\eta_1^2\eta_2, \quad t \ne \tau_k, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \eta_2^3 + \varepsilon\eta_1^2\eta_2, \quad t \ne \tau_k, \\ \Delta\eta_1 &= (1+\varepsilon)\eta_1^3 + \varepsilon\eta_1^2\eta_2, \quad t = \tau_k, \\ \Delta\eta_2 &= \varepsilon\eta_1\eta_2^2 - b\eta_2^3, \quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Используя метод точечных отображений, можно показать, что условия асимптотической устойчивости в конусе $\mathbb{R}_+^3$ системы сравнения (4.2) сводятся к совместности системы неравенств

$$\lambda > 0, \qquad (1+\varepsilon - a\theta_1)\lambda + \varepsilon\theta_2 < 0, \qquad \varepsilon\theta_2\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \theta_2 - b < 0.$$

Условия совместности этой системы представляют собой достаточные условия асимптотической устойчивости в конусе $\mathbb{R}_+^3$ состояния равновесия $x = 0$ системы (4.1)

$$2\varepsilon^2\theta_2 \le (a\theta_1 - 1 - \varepsilon)\left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon\theta_2(b-\theta_2)} - \varepsilon\right),$$

$$\varepsilon^2 + 4\theta_2(b-\theta_2) > 0, \quad 1+\varepsilon - a\theta_1 < 0.$$

***Пример* 2.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + A\mathbf{w}(t,x), \quad t \ne \tau_k, \\ \mathbf{w}(t+0,x) &= (I+\Gamma)\mathbf{w}(t,x) + \alpha\varepsilon \sin\frac{\pi x}{l}\int\limits_0^l \mathbf{w}(t,x)\,dx, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2$ — действительная матрица, $a_{ij} \ge 0$ при $i \ne j$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{i,j=1}^2$, $\gamma_{ii} > -1$, $\gamma_{ij} \ge 0$, $i \ne j$, $i,j = 1,2$, ε, α — положительные параметры. Относительно последовательности моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ предположим, что выполняется двустороннее неравенство

$$0 < \theta_1 \le \tau_{k+1} - \tau_k \le \theta_2 < \infty.$$

Для системы (4.3) рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(0,x) &= \varphi(x), \quad x \in [0,l], \quad \varphi_i \in C^1(0,l) \cap C[0,l], \\ \mathbf{w}(t,0) &= 0, \quad t \in [0,\infty), \\ \mathbf{w}(t,l) &= 0, \quad t \in [0,\infty). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Введем пространство $X = (L^2(0,l))^2$ с нормой $\|\varphi\|_X = \left\{\|\varphi_1\|^2_{L^2[0,l]} + \|\varphi_2\|^2_{L^2[0,l]}\right\}^{1/2}$, подмножество

$$H = \Big\{(\varphi_1, \varphi_2) \,\big|\, \varphi_i \in C^1(0,l) \cap C[0,l], \;\; \varphi_i(0) = 0, \;\; \varphi_i(l) = 0, \;\; i = 1,2\Big\} \subset X$$

и конус

$$K = \Big\{(\varphi_1, \varphi_2) \,\big|\, \varphi_i(x) \ge 0, \, x \in [0,l], \;\; i = 1,2\Big\}.$$

Конус K нормальный, но не является телесным [27].

Рассмотрим вопрос о проверке основных предположений 1 – 3 и 5 относительно смешанной задачи (4.3), (4.4). С этой целью рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + A\mathbf{v}(t,x) \tag{4.5}$$

с начальными и граничными условиями (4.4).

Покажем, что решения системы дифференциальных уравнений (4.5) порождают полугруппу операторов $\{V^t(\cdot)\}_{t\ge 0}$, удовлетворяющую условиям 1 – 3 из п. 1.

Введем новые переменные $\mathbf{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))^T$ по формуле $\mathbf{v}(t,x) = e^{At}\mathbf{u}(t,x)$, где $\mathbf{v}(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))^T$. В этом случае функция $\mathbf{u}(t,x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}, \tag{4.6}$$

а также начальным и граничным условиям (4.4). Решения смешанной задачи (4.4) – (4.6) порождают линейную полугруппу $U^t(\cdot)$. Из принципа максимума [24, 25] следует, что $U^t(\varphi) \overset{K}{\ge} 0$ при условии $\varphi \overset{K}{\ge} 0$. Неравенство Фридрихса (см. [23]) позволяет установить оценку

$$\|U^t(\varphi_0)\|_X \le e^{-\frac{\pi^2 \varepsilon^2}{l^2} t} \|\varphi_0\|_X,$$

из которой непосредственно следует, что

$$\|V^t(\varphi_0)\|_X \le e^{(\|A\| - \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{l^2})t} \|\varphi_0\|_X.$$

Из линейности полугруппы V^t и позитивности полугруппы U^t следует выполнение условия 1 из п. 2. Условие 2 из п. 2 выполняется вследствие линейности полугруппы V^t.

Выберем $w_1(x) = \Big(\sin\dfrac{\pi x}{l}, 0\Big)$, $w_2(x) = \Big(0, \sin\dfrac{\pi x}{l}\Big)$. Свойство 3 из п. 1 выполняется вследствие того, что функция $\psi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{l}$ является аналитическим вектором (см. [31, с. 457]) для дифференциального оператора

$$\mathcal{A} = \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad D(\mathcal{A}) = \big\{\psi \in C^2[0,l], \psi(0) = \psi(l) = 0\big\}.$$

Условие 5, очевидно, выполняется. Исследуем устойчивость по двум мерам линейной системы (4.3). Система сравнения имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\eta_1}{dt} &= \left(-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{l^2} + a_{11}\right)\eta_1 + a_{12}\eta_2, \quad t \neq \tau_k,\\
\frac{d\eta_2}{dt} &= a_{21}\eta_1 + \left(-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{l^2} + a_{22}\right)\eta_2, \quad t \neq \tau_k,\\
\eta_1(t+0) &= \left(1 + \gamma_{11} + \frac{2\alpha l\varepsilon}{\pi}\right)\eta_1(t) + \gamma_{12}\eta_2(t), \quad t = \tau_k,\\
\eta_2(t+0) &= \gamma_{21}\eta_1(t) + \left(1 + \gamma_{22} + \frac{2\alpha l\varepsilon}{\pi}\right)\eta_2(t), \quad t = \tau_k.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Устойчивость системы (4.7) гарантирует устойчивость по мерам $(h_w, \|\cdot\|_X)$ исходной системы (полагаем $w = w_1 + w_2$) дифференциальных уравнений в частных производных (4.3).

Система сравнения (4.7) может быть исследована известными методами [3]. В случае, когда выполняются условия

$$
\left(-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{l^2} + a_{11}\right)\left(-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{l^2} + a_{22}\right) < 0, \quad \left(\gamma_{11} + \frac{2\alpha l\varepsilon}{\pi}\right)\left(\gamma_{22} + \frac{2\alpha l\varepsilon}{\pi}\right) < 0,
$$

эта система может быть исследована с помощью методов, развитых в работах [2, 26, 29, 30]. Полное исследование системы сравнения возможно в замкнутом виде, но вследствие громоздкости здесь не проводится.

***Пример* 3.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \varepsilon^2\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + A\mathbf{w}(t,x), \quad t \neq \tau_k,\\
\mathbf{w}(t+0,x) &= (I+\Gamma)\mathbf{w}(t,x), \quad t = \tau_k,
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

где $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2$ — действительная матрица, $a_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, $i,j = 1,2$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{i,j=1}^2$, $\gamma_{ii} > -1$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i,j = 1,2$, ε — неотрицательный параметр. Относительно последовательности моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ предположим, что выполняется двустороннее неравенство

$$
0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty.
$$

Для системы (3.1) рассмотрим смешанную задачу

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \quad \varphi \in \left(C^1(0,l) \cap C[0,l]\right)^2,\\
\mathbf{w}(t,0) - \beta\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}(t,0) = 0, \quad t \in [0,\infty),\\
\mathbf{w}(t,l) + \beta\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}(t,l) = 0, \quad t \in [0,\infty),
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

где β — положительная постоянная.

Введем пространство $X = (C[0,l])^2$ с нормой $\|\varphi\|_X = \max\left\{\|\varphi_1\|_{C[0,l]}, \|\varphi_2\|_{C[0,l]}\right\}$, подмножество

$$
H = \Big\{(\varphi_1,\varphi_2) \mid \varphi_i \in C^1(0,l) \cap C[0,l],
$$

$$\left.\varphi_i(0) - \beta\varphi_i'(0) = 0, \;\; \varphi_i(l) + \beta\varphi_i'(l) = 0, \;\; i = 1,2\right\} \subset X$$

и конус

$$K = \Big\{(\varphi_1, \varphi_2) \,|\, \varphi_i(x) \geq 0, \;\; x \in [0,l], \;\; i = 1,2\Big\}.$$

Конус K является телесным и нормальным.

Условия 1 из п. 1 и 2а из п. 2 доказываются так же, как в примере 2. Для проверки условия 3 выберем $w_1(x) = (\psi(x), 0)$, $w_2(x) = (0, \psi(x))$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, где $\psi(x) \in D(\mathcal{A}^3)$, $\mathcal{A}$ — линейный дифференциальный оператор,

$$\mathcal{A} = \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{\varphi \in C^2[0,l], \varphi(0) - \beta\varphi'(0) = 0, \;\; \varphi(l) + \beta\varphi'(l) = 0\Big\}.$$

В этом случае $w \in \operatorname{int} K$ и $w_1(x)$ и $w_2(x)$ удовлетворяют условию 3 из п. 1. Функцию $\psi(x)$ будем выбирать в виде полинома шестой степени

$$\psi(x) = -x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Условие $\psi \in D(\mathcal{A}^3)$ позволяет однозначно выразить коэффициенты a_m, $m = \overline{0,5}$, многочлена $\psi(x)$:

$$\psi(x) = -x^6 + \frac{15l}{4}(5\beta x^4 + x^5) - \frac{5l^2(30\beta^2 + 20l\beta + 3l^2)}{2(l+2\beta)}(3\beta x^2 + x^3) +$$

$$+\frac{l^3(1128l^2\beta^2 + 232\beta l^3 + 1800\beta^4 + 19l^4 + 2400l\beta^3)}{4(l+2\beta)^2}(\beta + x).$$

Предположим, что $\min\limits_{x\in[0,l]} \psi(x) > 0$ и обозначим

$$\omega = \max_{x\in[0,l]} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

Тогда система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_1}{dt} &= (\varepsilon^2\omega + a_{11})\eta_1 + a_{12}\eta_2, \quad t \neq \tau_k, \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= a_{21}\eta_1 + (\varepsilon^2\omega + a_{22})\eta_2, \quad t \neq \tau_k, \\
\eta_1(t+0) &= (1+\gamma_{11})\eta_1(t) + \gamma_{12}\eta_2(t), \quad t = \tau_k, \\
\eta_2(t+0) &= \gamma_{21}\eta_1(t) + (1+\gamma_{22})\eta_2(t), \quad t = \tau_k.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Устойчивость (асимптотическая устойчивость) построенной системы сравнения (4.10) и условие $\min_{x\in[0,l]} \psi(x) > 0$ влекут за собой наличие устойчивости (асимптотической устойчивости) по мерам $(h_w, \|\cdot\|_X)$ исходной системы дифференциальных уравнений (4.8). Ясно также, что система сравнения может быть исследована значительно проще, чем исходная система дифференциальных уравнений [3, 26, 29, 30].

Заключение. Рассмотренные в п. 4 примеры свидетельствуют об эффективности предложенных методов исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Пример 1 показывает, что полученные результаты применимы и для систем с конечномерным фазовым пространством и позволяют исследовать устойчивость в критических случаях для систем высокой размерности. Примеры 2 и 3 показывают возможность исследования устойчивости по двум мерам систем дифференциальных уравнений в частных производных при наличии импульсного воздействия. При этом, как принято в теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных [16, 17], рассматриваются классические постановки смешанных задач. Вместе с тем значительный интерес в случае систем с импульсным воздействием представляют расширение соответствующих постановок задач и введение обобщенных (в том или ином смысле) решений, так как условия согласования граничных условий и импульсного воздействия часто слишком обременительны. Таким образом, актуальной задачей для дальнейшего исследование является введение и исследование обобщенных решений этого класса уравнений, а также установление теорем существования, единственности и устойчивости решений для таких уравнений.

1. *Liu X.* Progress in stability of impulsive systems with applications to population growth models // Advances in Stability Theory at the End of the 20 th Century /Ed. A. A. Martynyuk (Stability and Control: Theory, Methods and Applications). – London: Taylor and Francis, 2003. – **13**. – P. 321 – 340.
2. *Слынько В. И.* Устойчивость движения механических систем: гибридные модели: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 2009. – 24 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
4. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 275 p.
5. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 1. – С. 81 – 94.
6. *Перестюк Н. А.* К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем // Год. на ВУЗ: Прилож. мат. – София, 1976. – **11**, кн. 1. – С. 145 – 150.
7. *Перестюк Н. А.* Устойчивость решений линейных систем с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1977. – № 19. – С. 71 – 76.
8. *Ignat'ev A. O., Ignat'ev O. A., Soliman A. A.* Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action // Math. Notes. – 2006. – **80**, № 4. – P. 491 – 499.
9. *Ignat'ev A. O.* On the stability ofinvariant sets of systems with impulse effect // Nonlinear Anal. – 2008. – **69**. – P. 53 – 72.
10. *Ignat'ev A. O., Ignat'ev O. A.* Stability of solutions of systems with impulse effect // Progr. Nonlinear Anal. Res. – Nova Sci. Publ., Inc., 2009. – P. 363 – 389.
11. *Слынько В. И.* Построение отображений Пуанкаре для голономной механической системы с двумя степенями свободы при наличии ударов // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 5. – С. 115 – 122.
12. *Бабенко С. В., Слынько В. И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 46 – 52.
13. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Исследование устойчивости автономных систем сравнения. – Киев, 1978. – 24 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, 78.28).
14. *Оболенский А. Ю.* Об устойчивости систем сравнения // Доп. АН УРСР. – 1979. – № 8. – С. 607 – 611.
15. *Оболенский А. Ю.* Об устойчивости линейных систем сравнения // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1984. – Вып. 1. – С. 51 – 55.
16. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 231 с.
17. *Мовчан А. А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // Прикл. математика и механика. – 1959. – **23**, № 3. – С. 483 – 493.
18. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 243 с.

19. *Hirsch M. W.* Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems // J. reine und angew. Math. – 1988. – **383**. – S. 1 – 53.
20. *Кедык Т. В., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости по двум мерам гибридных квазимонотонных расширений // Докл. АН УССР. – 1991. – № 8. – С. 80 – 82.
21. *Кедык Т. В.* Об инвариантных многообразиях гибридных квазимонотонных расширений // Докл. АН УССР. – 1991. – № 10. – С. 8 – 11.
22. *Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 5. – С. 574 – 579.
23. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
24. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
25. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій: Навч. пос. – Київ: Либідь, 1993. – 248 с.
26. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 37 – 43.
27. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
28. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
29. *Двирный А. И.* Об оценке границы робастности линейной системы с импульсным воздействием // Доп. НАН України. – 2003. – № 9. – С. 34 – 39.
30. *Слынько В. И.* Об экспоненциальной устойчивости линейной импульсной системы в гильбертовом пространстве // Доп. НАН України. – 2002. – № 12. – С. 44 – 47.
31. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.

Получено 17.11.10,
после доработки — 02.06.11