УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк (Кам'янець-Поділ. нац. ун-т)

ВІДНОСНА ЧЕБИШОВСЬКА ТОЧКА СИСТЕМИ ОБМЕЖЕНИХ ЗАМКНЕНИХ МНОЖИН, ЯКІ НЕПЕРЕРВНО ЗМІНЮЮТЬСЯ

For the problem of finding a relative Chebyshev point of a system of continuously varying (in the sense of the Hausdorff metric) bounded closed sets of a normed space linear over the field of complex numbers, we establish some existence and uniqueness theorems, necessary and sufficient conditions, and criteria for a relative Chebyshev point and describe properties of the extremal functional and the extremal operator.

Для задачи отыскания относительной чебишевской точки системы ограниченных замкнутых множеств линейного над полем комплексных чисел нормированного пространства, которые непрерывно меняются в понимании метрики Хаусдорфа, установлены некоторые теоремы существования, единственности, необходимые, достаточные условия и критерии относительной чебышевской точки, свойства экстремального функционала и экстремального оператора.

1. Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для множини F та елемента g цього простору покладемо $E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\|$. Величину $E_F(g)$ називають найкращим наближенням елемента g множиною F або відстанню від цього елемента до множини F (див., наприклад, [1, с. 11]). Будемо позначати через $B(X)\big(O(X)\big)$ сукупність довільних (опуклих) обмежених замкнених множин простору X, через $H(A,B) =$ $= \max\left\{\sup_{x \in A} E_B(x), \sup_{y \in B} E_A(y)\right\}$ хаусдорфову відстань між множинами A, B із $B(X)$. Нехай, крім того, S — компакт, $C\big(S, B(X)\big)$ $\Big(C\big(S, O(X)\big)\Big)$ — множина багатозначних відображень компакта S у X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = B_s \in B(X)$ $\big(a(s) = O_s \in O(X)\big)$ і вони є неперервними на S відносно метрики Хаусдорфа на $B(X)$, $a \in C\big(S, B(X)\big)$. Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) \;=\; \inf_{g \in V} \sup_{s \in S} E_{a(s)}(g) \;=\; \inf_{g \in V} \sup_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \|g - y\|, \tag{1.1}$$

де V — фіксована множина простору X.

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що $\alpha_a^*(V) = \sup_{s \in S} E_{a(s)}(g^*)$, то будемо називати його чебишовською точкою відносно множини V (у множині V) системи $\{a(s), s \in S\}$ обмежених замкнених множин простору X, які неперервно змінюються щодо хаусдорфової відстані на $B(X)$, або екстремальним елементом для величини (1.1).

Якщо у задачі відшукання величини (1.1) $V = X$ і для $g^* \in X$

$$\sup_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) \;=\; \sup_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^* - y\right\| \;=\; \inf_{g \in X} \sup_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \|g - y\|,$$

то g^* називають чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$.

Якщо S є компактом простору X, а $a(s) = s$ для всіх $s \in S$, то задача (1.1) стає задачею про чебишовський центр компакта S простору X відносно множини V (у множині V) цього простору, тобто задачею відшукання величини

$$\inf_{g\in V} \max_{s\in S} \| g - s \| . \tag{1.2}$$

У випадку задачі відшукання величини (1.2) елемент $g^* \in V$ називають чебишовським центром компакта S у множині V, якщо

$$\max_{s\in S} \left\| g^* - s \right\| = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \| g - s \| .$$

Якщо в задачі відшукання величини (1.2) $V = X$, то елемент $g^* \in X$, для якого виконується рівність $\max_{s\in S} \left\| g^* - s \right\| = \inf_{s\in S} \max_{s\in S} \| g - s \|$, називають чебишовським центром компакта S.

Якщо питанням дослідження задачі про чебишовський центр присвячено низку праць (див., наприклад, [2 – 5]), то лише в небагатьох працях розглядаються питання дослідження задачі відшукання чебишовської точки. Так, у праці [6] побудовано алгоритм відшукання чебишовської точки скінченної кількості гіперплощин простору R^n, у праці [7] розглянуто питання існування і відшукання чебишовської точки системи гіперплощин лінійного нормованого простору, у [8] отримано деякі результати щодо існування і єдиності чебишовської точки системи множин.

Твердження 1.1. *Для будь-яких* $a \in C\left(S, B(X)\right)$, $g \in X$ *функція* $E_{a(s)}(g) = \inf_{y\in a(s)} \| g - y \|$, $s \in S$, *є неперервною по* s *на* S.

З твердження 1.1 випливає, що задачу відшукання величини (1.1) можна записати у еквівалентній формі

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} E_{a(s)}(g) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \| g - y \| . \tag{1.3}$$

2. Теореми існування відносної чебишовської точки системи множин. Для кожного $a \in C\left(S, B(X)\right)$, $g \in X$ позначимо $\Psi_a(g) = \max_{s\in S} E_{a(s)}(g) = \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \| g - y \|$.

Твердження 2.1. *Нехай* $a \in C\left(S, B(X)\right)$. *Тоді функція* $\Psi_a(g)$, $g \in X$, *є неперервною по* g *на* X. *Якщо* $a \in C\left(S, O(X)\right)$, *то ця функція є, крім того, опуклою на* X.

Твердження 2.2. *Нехай* $a \in C\left(S, B(X)\right)$, $g \in X$. *Тоді функція* $\Phi_g^a(s) = \sup_{y\in a(s)} \| g - y \|$, $s \in S$, *є неперервною по* s *на* S.

Теорема 2.1. *Якщо* $a \in C\left(S, B(X)\right)$, *а* V *— замкнена локально компактна множина простору* X, *то чебишовська точка системи* $\left\{a(s), s \in S\right\}$ *у* V *існує.*

Наслідок 2.1. *Якщо* $a \in C\left(S, B(X)\right)$, *а* V *— скінченновимірний підпростір простору* X, *то чебишовська точка системи* $\left\{a(s), s \in S\right\}$ *у* V *існує.*

Нехай $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|$.

Теорема 2.2. *Якщо X — банахів простір, в якому для довільних x, y має місце ,,нерівність паралелограма" вигляду*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \geq c\|x-y\|^2, \tag{2.1}$$

де $c>0$, $a\in C(S,X)$ і V — замкнена опукла множина простору X, то чебишовська точка системи $\{a(s), s\in S\}$ у множині V існує і єдина.

Доведення. За умов теореми задача відшукання величини (1.3) набере вигляду

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\|g-a(s)\|.$$

Для будь-якого натурального n існує елемент $g_n\in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(V) \leq \max_{s\in S}\|g_n - a(s)\| < \alpha_a^*(V) + \frac{1}{n}. \tag{2.2}$$

Оскільки g_m, $g_n\in V$ для всіх натуральних m і n, а V — опукла множина, то $\dfrac{g_m+g_n}{2}$ належить V. Нехай

$$\max_{s\in S}\left\|\frac{g_m+g_n}{2} - a(s)\right\| = \left\|\frac{g_m+g_n}{2} - a\left(s_{(m,n)}\right)\right\|, \quad s_{(m,n)}\in S.$$

Використаємо далі ,,нерівність паралелограма" (2.1), поклавши в ній $x = g_m - a\left(s_{(m,n)}\right)$, $y = g_n - a\left(s_{(m,n)}\right)$. Згідно з цією нерівністю

$$2\left\|g_m - a\left(s_{(m,n)}\right)\right\|^2 + 2\left\|g_n - a\left(s_{(m,n)}\right)\right\|^2 -$$
$$- \left\|g_m + g_n - 2a\left(s_{(m,n)}\right)\right\|^2 \geq c\|g_m - g_n\|^2. \tag{2.3}$$

Оскільки $\dfrac{g_m+g_n}{2}\in V$, то

$$\left\|g_m+g_n-2a\left(s_{(m,n)}\right)\right\|^2 = 4\left\|\frac{g_m+g_n}{2} - a\left(s_{(m,n)}\right)\right\|^2 =$$
$$= 4\left(\max_{s\in S}\left\|\frac{g_m+g_n}{2} - a(s)\right\|\right)^2 \geq 4\left(\alpha_a^*(V)\right)^2.$$

Звідси та з нерівностей (2.2), (2.3) випливає, що

$$c\|g_m-g_n\|^2 \leq 2\left(\max_{s\in S}\|g_m - a(s)\|\right)^2 + 2\left(\max_{s\in S}\|g_n - a(s)\|\right)^2 - 4\left(\alpha_a^*(V)\right)^2 <$$

$$< \; 2\left(\alpha_a^*(V)+\frac{1}{m}\right)^2 \; + \; 2\left(\alpha_a^*(V)+\frac{1}{n}\right)^2 \; - 4\left(\alpha_a^*(V)\right)^2 \; =$$

$$= \; 4\alpha_a^*(V)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{m^2} + \frac{2}{n^2} \, .$$

Тому $\|g_m - g_n\| \le \left(\frac{1}{c}\left(4\alpha_a^*(V)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{m^2}+\frac{2}{n^2}\right)\right)^{1/2}$.

Врахувавши, що права частина останньої нерівності прямує до нуля при $m \to \infty$, $n \to \infty$, робимо висновок, що $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|g_m - g_n\| = 0$. Це означає, що послідовність $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю простору X. Внаслідок повноти цього простору існує $\lim_{n\to\infty} g_n = g^*$. Оскільки V — замкнена множина і $g_n \in V$, $n = 1, 2, \ldots,$ то $g^* \in V$.

З урахуванням неперервності по g функції $g \in X \to \max_{s\in S} \|g - a(s)\|$ (див. твердження 2.1) звідси з урахуванням нерівності (2.2) одержимо

$$\lim_{n\to\infty} \max_{s\in S} \|g_n - a(s)\| \; = \; \max_{s\in S} \left\|g^* - a(s)\right\| \; = \; \alpha_a^*(V)\, .$$

Це й означає, що g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V.

Переконаємось у єдиності цієї точки. Нехай $\bar{g}$ також є чебишовською точкою у множині V системи $\{a(s), s \in S\}$ і

$$\max_{s\in S} \left\| \frac{g^* + \bar{g}}{2} - a(s) \right\| \; = \; \left\| \frac{g^* + \bar{g}}{2} - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right) \right\|, \quad s_{(g^*,\bar{g})} \in S\, . \tag{2.4}$$

Поклавши в нерівності (2.1) $x = g^* - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)$, $y = \bar{g} - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)$, отримаємо

$$2\left\|g^* - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)\right\|^2 \; + \; 2\left\|\bar{g} - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)\right\|^2 \; -$$

$$- \; \left\|g^* + \bar{g} - 2a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)\right\|^2 \; \ge \; c\left\|g^* - \bar{g}\right\|^2 . \tag{2.5}$$

Використавши (2.4), (2.5), одержимо

$$0 \le \left\|g^* - \bar{g}\right\| \; \le$$

$$\le \; \left(\frac{1}{c}\left(2\left\|g^* - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)\right\|^2 + 2\left\|\bar{g} - a\left(s_{(g^*,\bar{g})}\right)\right\|^2 - 4\left(\alpha_a^*(V)\right)^2\right)\right)^{1/2} \; \le$$

$$\le \; \left(\frac{1}{c}\left(2\left(\max_{s\in S}\left\|g^* - a(s)\right\|\right)^2 \; + \; 2\left(\max_{s\in S}\|\bar{g} - a(s)\|\right)^2 - 4\left(\alpha_a^*(V)\right)^2\right)\right)^{1/2} \; =$$

$$= \left(\frac{1}{c} \left(4 \left(\alpha_a^*(V) \right)^2 - 4 \left(\alpha_a^*(V) \right)^2 \right) \right)^{1/2} = 0 .$$

Отже, $\left\| g^* - \bar{g} \right\| = 0$. Тому $\bar{g} = g^*$.

Теорему доведено.

Теорема 2.3. *Якщо* $a \in C\left(S, O(X)\right)$, *а* V *— слабко компактна множина простору* X, *то чебишовська точка системи* $\left\{ a(s), s \in S \right\}$ *у множині* V *існує.*

Доведення. Нехай $\left\{ g_m \right\}_{m=1}^{\infty}$ — екстремальна послідовність для величини (1.3). Оскільки V є слабко компактною множиною простору X, то існує підпослідовність $\left\{ g_{m_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{ g_m \right\}_{m=1}^{\infty}$, яка слабко збігається до $g^* \in V$ (див., наприклад, [10, с. 9]). Переконаємося, що

$$\Psi_a(g^*) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| g^* - y \right\| = \alpha_a^*(V) . \tag{2.6}$$

Припустимо, що $\Psi_a(g^*) > \alpha_a^*(V)$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\Psi_a(g^*) > \alpha_a^*(V) + \varepsilon . \tag{2.7}$$

Розглянемо множину

$$M = \left\{ g : g \in X, \Psi_a(g) \le \alpha_a^*(V) + \varepsilon \right\} .$$

Згідно з твердженням 2.1 функція $\Psi_a(g)$, $g \in X$, є опуклою та неперервною на X . Тому M є опуклою та замкненою множиною простору X . Згідно з (2.7) $g^* \notin M$.

За теоремою про відокремлення замкненої опуклої множини і точки (див., наприклад, [5, с. 31]) існують ненульовий функціонал $f \in X^*$ та число c такі, що

$$\operatorname{Re} f(g^*) > c > \operatorname{Re} f(g) , \quad g \in M . \tag{2.8}$$

Маємо $\lim_{k \to \infty} \Psi_a(g_{m_k}) = \lim_{k \to \infty} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| g_{m_k} - y \right\| = \alpha_a^*(V)$.

Звідси випливає, що існує номер k_0 такий, що $g_{m_k} \in M$ для всіх $k \ge k_0$. Тоді з (2.8) отримуємо

$$\operatorname{Re} f(g^*) > c > \operatorname{Re} f(g_{m_k}) , \quad k \ge k_0 . \tag{2.9}$$

Оскільки $g_{m_k} \xrightarrow[k \to \infty]{\text{сл.}} g^*$, то $\lim_{k \to \infty} \operatorname{Re} f(g_{m_k}) = \operatorname{Re} f(g^*)$. Тому з (2.9) маємо $\operatorname{Re} f(g^*) > c \ge \operatorname{Re} f(g^*)$. Одержана суперечність доводить, що має місце рівність (2.6). Це означає, що g^* є чебишовською точкою у V для системи $\left\{ a(s), s \in S \right\}$.

Теорему доведено.

3. Метричний простір $C(S, B(X))$.

Твердження 3.1. *Нехай* a_1, $a_2 \in C(S, B(X))$. *Тоді функція*

$$H(a_1(s), a_2(s)) = \max\left\{ \sup_{x \in a_1(s)} E_{a_2(s)}(x), \sup_{y \in a_2(s)} E_{a_1(s)}(y) \right\}, \quad s \in S,$$

є неперервною по s *на* S.

З огляду на це твердження для будь-яких a_1, $a_2 \in C(S, B(X))$ покладемо

$$\rho(a_1, a_2) = \max_{s \in S} H(a_1(s), a_2(s)).$$

Можна переконатися, що величина $\rho(a_1, a_2)$, a_1, $a_2 \in C(S, B(X))$, задає метрику на $C(S, B(X))$. Відповідний метричний простір позначимо через $(C(S, B(X)), \rho)$.

4. Властивості екстремального функціонала та екстремального оператора. При фіксованій множині V величина (1.3) задає на $C(S, B(X))$ функціонал, який кожному $a \in C(S, B(X))$ ставить у відповідність число $\alpha_a^*(V)$. Назвемо його екстремальним функціоналом.

Теорема 4.1. *Для будь-якої множини* V *екстремальний функціонал* $\alpha_a^*(V)$, $a \in C(S, B(X))$, *є неперервним по* a *на метричному просторі* $(C(S, B(X)), \rho)$.

Якщо V — підпростір, то функціонал $\alpha_a^*(V)$, $a \in C(S, B(X))$, є напівадитивним і додатно однорідним, тобто

$$\alpha_{a_1+a_2}^*(V) \le \alpha_{a_1}^*(V) + \alpha_{a_2}^*(V), \quad a_1, a_2 \in C(S, B(X)),$$

$$\alpha_{\lambda a}^*(V) = |\lambda| \alpha_a^*(V), \quad a \in C(S, B(X)), \quad \lambda \in R.$$

Нехай тепер V є множиною існування і єдиності екстремального елемента для величини (1.3). Розглянемо деякі властивості оператора P, який кожному $a \in C(S, B(X))$ ставить у відповідність екстремальний елемент P_a для величини (1.3), тобто

$$\alpha_a^*(V) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \| P_a - y \|.$$

Оператор P будемо називати екстремальним оператором для задачі відшукання відносної чебишовської точки системи $\{a(s), s \in S\}$.

Твердження 4.1. *Нехай* g_1, $g_2 \in X$, a_1, $a_2 \in C(S, B(X))$. *Має місце співвідношення*

$$\left| \max_{s \in S} \inf_{y \in a_1(s)} \| g_1 - y \| - \max_{s \in S} \inf_{y \in a_2(s)} \| g_2 - y \| \right| \le \| g_1 - g_2 \| + \rho(a_1, a_2). \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Якщо* V *— підпростір простору* X, *який є множиною існування і єдності екстремального елемента для величини* (1.3), *то екстремальний оператор* P *для задачі відшукання відносної чебишовської точки є однорідним. Якщо, крім того, підпростір* V *скінченновимірний, то оператор* P *є неперервним.*

Доведення. Нехай $a \in C(S, B(X))$, $\lambda \in R$. Використавши теорему 4.1, одержимо

$$\max_{s\in S} \inf_{y\in\lambda a(s)} \|\lambda P_a - y\| = \max_{s\in S} \inf_{y_1\in a(s)} \|\lambda P_a - \lambda y_1\| = |\lambda| \max_{s\in S} \inf_{y_1\in a(s)} \|P_a - y_1\| =$$

$$= |\lambda| \alpha_a^*(V) = \alpha_{\lambda a}^*(V) = \max_{s\in S} \inf_{y\in\lambda a(s)} \|P_{\lambda a} - y\|.$$

Звідси з урахуванням єдиності екстремального елемента для величини (1.3) робимо висновок, що $P_{\lambda a} = \lambda P_a$. Однорідність оператора P встановлено. Доведемо його неперервність у припущенні, що V є скінченновимірним підпростором. Нехай $\lim_{m\to\infty} a_m = a_0$, де a_m, $a_0 \in C(S, B(X))$. Покладемо $P_{a_m} = g_m$, $P_{a_0} = g_0$. Для $m = 1, 2, \ldots$, $s \in S$, $y \in a_m(s)$ з урахуванням твердження 2.2 маємо

$$\|g_m\| \le \|g_m - y\| + \|y\| \le \|g_m - y\| + \max_{s\in S} \sup_{y\in a_m(s)} \|y\|,$$

$$\|g_m\| \le \inf_{y\in a_m(s)} \|g_m - y\| + \max_{s\in S} \sup_{y\in a_m(s)} \|y\|,$$

$$\|g_m\| \le \max_{s\in S} \inf_{y\in a_m(s)} \|g_m - y\| + \max_{s\in S} \sup_{y\in a_m(s)} \|y\| = \alpha_{a_m}^*(V) + \rho(a_m, 0).$$

Звідси випливає, що

$$\|g_m\| \le \alpha_{a_m}^*(V) + \rho(0, a_0) + \rho(a_m, a_0), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Оскільки згідно з теоремою 4.1 $\lim_{m\to\infty} \alpha_{a_m}^*(V) = \alpha_{a_0}^*(V)$, а за припущенням $\lim_{m\to\infty} \rho(a_m, a_0) = 0$, то з (4.2) випливає, що $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю скінченновимірного підпростору V простору X. Тоді існують збіжні підпослідовності послідовності $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$. Нехай $\{g_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — будь-яка збіжна підпослідовність і $\lim_{k\to\infty} g_{m_k} = g'$. Оскільки V — замкнена множина, то $g' \in V$. З урахуванням того, що $g_{m_k} = P_{a_{m_k}}$, маємо

$$\max_{s\in S} \inf_{y\in a_{m_k}(s)} \|g_{m_k} - y\| \le \max_{s\in S} \inf_{y\in a_{m_k}(s)} \|g_0 - y\|. \tag{4.3}$$

Згідно з (4.1)

$$\left| \max_{s\in S} \inf_{y\in a_{m_k}(s)} \| g_{m_k} - y \| - \max_{s\in S} \inf_{y\in a_0(s)} \| g' - y \| \right| \leq$$

$$\leq \| g_{m_k} - g' \| + \rho(a_{m_k}, a_0), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

$$\left| \max_{s\in S} \inf_{y\in a_{m_k}(s)} \| g_0 - y \| - \max_{s\in S} \inf_{y\in a_0(s)} \| g_0 - y \| \right| \leq \rho(a_{m_k}, a_0), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.5}$$

Враховуючи, що

$$\lim_{k\to\infty} g_{m_k} = g' \quad \left(\lim_{k\to\infty} \| g_{m_k} - g' \| = 0 \right),$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = a_0 \quad \left(\lim_{k\to\infty} \rho(a_{m_k}, a_0) = 0 \right),$$

із співвідношень (4.3) – (4.5) отримуємо

$$\max_{s\in S} \inf_{y\in a_0(s)} \| g' - y \| \leq \max_{s\in S} \inf_{y\in a_0(s)} \| g_0 - y \| .$$

Оскільки $g_0 = P_{a_0}$ є екстремальним елементом для величини (1.3) при $a = a_0$, то звідси випливає, що g' також є екстремальним елементом для цієї величини при $a = a_0$. На підставі єдиності екстремального елемента для величини (1.3) при всіх $a \in C(S, O(X))$ робимо висновок, що $g' = g_0$. Звідси випливає, що $\lim_{m\to\infty} g_m = g_0$. Отже, $\lim_{m\to\infty} P_{a_m} = P_{a_0}$ $\left(\lim_{m\to\infty} \| P_{a_m} - P_{a_0} \| = 0 \right)$, якщо $\lim_{m\to\infty} a_m = a_0$ $\left(\lim_{m\to\infty} \rho(a_m, a_0) = 0 \right)$.

Теорему доведено.

5. Субдиференціал функціонала найкращого наближення. Нехай, як і вище, X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір, X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, тобто простір X лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір, спряжений з простором X_R, p — функція, задана на X і, отже, на X_R. Як відомо (див., наприклад, [11, с. 319]), функцією, спряженою з p, називається функція $p^*(\varphi) = \sup_{g\in X_R} \left(\varphi(g) - p(g) \right)$, $\varphi \in X_R^*$.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p в точці $g_0 \in X_R$, якщо

$$p(g) - p(g_0) \geq \varphi(g - g_0), \quad g \in X_R .$$

Множину субградієнтів функції p в точці $g \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці g і позначають $\partial p(g)$.

Відомо, що функція найкращого наближення $E_F(g)$, $g \in X$, є неперервною на X_R для будь-якої множини F (див., наприклад, [1, с. 17]) та, крім того, опуклою на X_R за умови, що F є опуклою множиною (див., наприклад, [9]). Тому у випадку опуклої множини F для кожної точки $g \in X$ $\partial E_F(g)$ є непорожньою опуклою слабко $*$-компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [11, с. 327]).

Твердження 5.1. *Нехай F — опукла замкнена множина простору X, g — довільна точка цього простору. Тоді має місце співвідношення двоїстості*

$$E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right),$$

де $B^* = \left\{ f : f \in X^*, \|f\| \le 1 \right\}$ — одинична куля простору X^*.

Твердження 5.2. *Нехай для опуклої замкненої множини F простору X та елемента g цього простору*

$$B^*(g, F) =$$

$$= \left\{ f : f \in B^*, E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right) = \right.$$

$$\left. = \operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right\}, \quad \operatorname{Re}\left(B^*\left(g, F\right) \right) = \left\{ \operatorname{Re} f : f \in B^*(g, F) \right\}.$$

Тоді має місце рівність

$$\partial E_F(g) = \operatorname{Re}\left(B^*(g, F) \right). \tag{5.1}$$

Доведення. Згідно з твердженням 5.1 множина $B^*(g, F)$ не є порожньою. Тоді для всіх $\varphi \in X_R^*$ маємо

$$E_F^*(\varphi) = \sup_{g \in X_R} \left(\varphi(g) - E_F(g) \right) = \sup_{g \in X_R} \left(\varphi(g) - \inf_{y \in F} \|g - y\| \right) =$$

$$= \sup_{g \in X_R} \sup_{y \in F} \left(\varphi(g) - \|g - y\| \right) = \sup_{y \in F} \sup_{g \in X_R} \left(\varphi(g - y) - \|g - y\| + \varphi(y) \right) =$$

$$= \begin{cases} \sup_{y \in F} \varphi(y), & \|\varphi\|_{X_R^*} \le 1, \\ +\infty, & \|\varphi\|_{X_R^*} > 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Нехай $\varphi \in \operatorname{Re}\left(B^*(g, F) \right)$. Тоді існує $f \in B^*(g, F)$ такий, що $\varphi = \operatorname{Re} f$. Тому $\|\varphi\|_{X_R^*} \le 1$ і $\varphi(g) - \sup_{y \in F} \varphi(y) = E_F(g)$. Звідси $E_F(g) + \sup_{y \in F} \varphi(y) = E_F(g) + E_F^*(\varphi) = \varphi(g)$.

Згідно з теоремою 6.4.2 [11, с. 325] φ належить $\partial E_F(g)$. Отже,

$$\operatorname{Re}\left(B^*(g,F)\right) \subset \partial E_F(g). \tag{5.3}$$

Навпаки, якщо $\varphi \in \partial E_F(g)$, то має місце рівність $E_F(g) + E_F^*(\varphi) = \varphi(g)$ (див., наприклад, теорему 6.4.2 [11, с. 325]). Звідси та з (5.2) випливає, що $\|\varphi\|_{X_R^*} \le 1$ і

$$E_F(g) = \varphi(g) - \sup_{y\in F} \varphi(y). \tag{5.4}$$

Позначимо через f функціонал, заданий на X таким чином: $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$, $x \in X$. Відомо (див., наприклад, [13, c.159]), що f належить B^*. З (5.4) одержуємо $E_F(g) = \operatorname{Re} f(g) - \sup_{y\in F} \operatorname{Re} f(y)$. Тому $f \in B^*(g,F)$ і $\operatorname{Re} f = \varphi$. Звідси робимо висновок, що φ належить $\operatorname{Re}\left(B^*(g,F)\right)$. Оскільки φ вибрано з $\partial E_F(g)$ довільним чином, то це означає, що

$$\partial E_F(g) \subset \operatorname{Re}\left(B^*(g,F)\right). \tag{5.5}$$

З (5.3) та (5.5) випливає справедливість рівності (5.1).

Твердження доведено.

6. Необхідні, достатні умови та критерії відносної чебишовської точки. У подальшому будемо вважати, що $a \in C\left(S, O(X)\right)$ та обмеження $g \in V$ в задачі відшукання величини (1.3) є істотним, тобто $\alpha_a^* < \alpha_a^*(V)$, де $\alpha_a^* = \inf_{g\in X} \max_{s\in S} E_{a(s)}(g)$. Для $a \in C\left(S, O(X)\right)$ та $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s\in S} E_{a(s)}(g^*), \quad C_a^{g^*} = \left\{ g : g \in X, \max_{s\in S} E_{a(s)}(g) < \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s : s \in S, E_{a(s)}(g^*) = \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$B^*\left(g^*, a(s)\right) = \left\{ f : f \in B^*, E_{a(s)}(g^*) = \max_{f\in B^*}\left(\operatorname{Re} f(g^*) - \sup_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right) = \right.$$

$$\left. = \operatorname{Re} f(g^*) - \sup_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right\}, \quad s \in S_a^{g^*},$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*, a(s)\right)\right) = \left\{ \operatorname{Re} f : f \in B^*\left(g^*, a(s)\right) \right\}, \quad s \in S_a^{g^*}.$$

Згідно з твердженням 5.2 $\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*, a(s)\right)\right) = \partial E_{a(s)}(g^*)$, $s \in S_a^{g^*}$. Зрозуміло, що множини $C_a^{g^*}$; $S_a^{g^*}$; $B^*\left(g^*, a(s)\right)$, $s \in S_a^{g^*}$, не є порожніми.

Згідно з [11, с. 12, 13] через $\Gamma(M,g)$, $\Gamma^*(M,g)$ позначатимемо відповідно конуси внутрішніх та граничних напрямків для множини $M \subset X$ із $g \in X$.

Теорема 6.1. *Нехай* $a \in C(S, O(X))$ *і* $g^* \in V$. *Тоді має місце рівність*

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) = \bigcap_{f \in B^*} \bigcap_{\left(g^*, a(s)\right)} \{g : g \in X, \operatorname{Re} f(g) < 0\}.$$

Доведення. Для $s \in S$ позначимо $C_a^{g^*}(s) = \left\{g : g \in X, \ E_{a(s)}(g) < \alpha_a^{g^*}\right\}$. Тоді

$$C_a^{g^*} = \bigcap_{s \in S} \left\{g : g \in X, E_{a(s)}(g) < \alpha_a^{g^*}\right\} = \bigcap_{s \in S} C_a^{g^*}(s).$$

Тому згідно з твердженням 1.2.2 [11, с. 14]

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \subset \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) \subset \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right). \tag{6.1}$$

Для $s_0 \in S \setminus S_a^{g^*}$ $\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) = X$. Звідси з урахуванням (6.1) отримаємо

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \subset \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right). \tag{6.2}$$

Виберемо довільне $g \in \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right)$. Із співвідношення (6.2) випливає, що $g \in \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right)$. Тому згідно з означенням конуса внутрішніх напрямків для будь-якого $s \in S$ існує $\alpha_s > 0$ таке, що $g^* + \alpha_s g \in C_a^{g^*}(s)$. Внаслідок цього

$$E_{a(s)}\left(g^* + \alpha_s g\right) < \alpha_a^{g^*}. \tag{6.3}$$

Зафіксуємо α_s і розглянемо $E_{a(s')}\left(g^* + \alpha_s g\right)$ як функцію s' на S. Згідно з твердженням 1.1 вона є неперервною функцією в кожній точці $s \in S$. Оскільки має місце нерівність (6.3), то існує окіл $\mathrm{O}(s)$ точки s у компакті S такий, що для всіх $s' \in \mathrm{O}(s)$ справджується нерівність

$$E_{a(s')}\left(g^* + \alpha_s g\right) < \alpha_a^{g^*}. \tag{6.4}$$

Внаслідок опуклості функції $E_{a(s')}(g)$, $g \in X$ (див., наприклад, [9]), не– рівності (6.4) та співвідношення $E_{a(s')}(g^*) \le \max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) = \alpha_a^{g^*}$ для всіх $\alpha \in (0, 1]$

$$E_{a(s')}\Big((1-\alpha)g^* + \alpha\big(g^* + \alpha_s g\big)\Big) = E_{a(s')}\big(g^* + \alpha\alpha_s g\big) \le$$

$$\le (1-\alpha)E_{a(s')}\big(g^*\big) + \alpha E_{a(s')}\big(g^* + \alpha_s g\big) < (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} + \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}.$$

Звідси випливає, що

$$E_{a(s')}(g^* + tg) < \alpha_a^{g^*} \tag{6.5}$$

для всіх $t \in (0, \alpha_s]$, $s' \in \mathrm{O}(s)$. Оскільки S є компактом і $\bigcup_{s\in S} \mathrm{O}(s) = S$, то з покриття $\mathrm{O}(s)$ компакта S можна виділити скінченне підпокриття $\mathrm{O}(s_i)$, $i = \overline{1,k}$, тобто $\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{O}(s_i) = S$. Покладемо $\overline{\alpha} = \min_{1\le i\le k} \alpha_{s_i}$. Тоді з (6.5) випливає, що

$$E_{a(s)}(g^* + tg) < \alpha_a^{g^*} \tag{6.6}$$

для всіх $s \in S$ та всіх $t \in \big(0, \overline{\alpha}\big]$. Тому внаслідок неперервності по s на S функції $E_{a(s)}(g^* + \overline{\alpha}g)$, $s \in S$ (див. твердження 1.1), та (6.6) отримаємо $\max_{s\in S} E_{\alpha(s)}(g^* + \overline{\alpha}g) < \alpha_a^{g^*}$.

Звідси маємо $g^* + \overline{\alpha}g \in C_a^{g^*}$. З твердження 2.1 випливає, що $C_a^{g^*}$ є відкритою опуклою множиною і $g^* \in \overline{C_a^{g^*}}$. Тоді згідно з теоремою 1.3.4 [11, с. 19] робимо висновок, що $g \in \Gamma(C_a^{g^*}, g^*)$. Тому $\bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\big(C_a^{g^*}(s), g^*\big) \subset \Gamma\big(C_a^{g^*}, g^*\big)$. Звідси та з (6.2) випливає, що

$$\Gamma\big(C_a^{g^*}, g^*\big) = \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\big(C_a^{g^*}(s), g^*\big). \tag{6.7}$$

Тепер перейдемо до опису конуса $\Gamma\big(C_a^{g^*}(s), g^*\big)$, $s \in S_a^{g^*}$. Для $s \in S_a^{g^*}$ маємо

$$C_a^{g^*}(s) = \Big\{g : g \in X,\, E_{a(s)}(g) < \alpha_a^{g^*} = E_{a(s)}(g^*)\Big\}.$$

Тому згідно з твердженням 6.9.1 [11, с. 352] та твердженням 5.2 для всіх $s \in S_a^{g^*}$

$$\Gamma(C_a^{g^*}(s), g^*) = \Big\{g : g \in X,\, \varphi(g) < 0,\, \varphi \in \partial E_{a(s)}(g^*)\Big\} =$$

$$= \Big\{g : g \in X,\, \mathrm{Re}\, f(g) < 0,\, f \in B^*\big(g^*, a(s)\big)\Big\} =$$

$$= \bigcap_{f\in B^*\left(g^*, a(s)\right)} \big\{g : g \in X,\, \mathrm{Re}\, f(g) < 0\big\}.$$

Звідси з урахуванням рівності (6.7) робимо висновок про справедливість теореми.

Теорему доведено.

Теорема 6.2. *Нехай* $a \in C\big(S, O(X)\big)$ *і* V *— довільна множина простору* X. *Якщо* g^* *є чебишовською точкою системи* $\{a(s), s \in S\}$ *у множині* V, *то для будь-якого елемента* $z \in \Gamma^*(V, g^*)$ *існують елементи* $s_z \in S$, $f_z \in B^*$ *такі, що*

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) \;=\; E_{a(s_z)}(g^*) \;=\; \operatorname{Re} f_z(g^*) - \sup_{y \in a(s_z)} \operatorname{Re} f_z(y), \tag{6.8}$$

$$\operatorname{Re} f_z(z) \;\geq\; 0. \tag{6.9}$$

Доведення. Нехай g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V. Тоді згідно з теоремою 1.4.1 [11, с. 27] $\Gamma\Big(C_a^{g^*}, g^*\Big) \cap \Gamma^*(V, g^*) = \varnothing$. Звідси та з теореми 6.1 випливає, що для будь-якого елемента $z \in \Gamma^*(V, g^*)$ існують елементи $s_z \in S_a^{g^*}$, $f_z \in B^*\big(g^*, a(s_z)\big)$ такі, що має місце співвідношення (6.9). Оскільки $s_z \in S_a^{g^*}$, а $f_z \in B^*\big(g^*, a(s_z)\big)$, то $s_z \in S$, $f_z \in B^*$ і справджується рівність (6.8).

Теорему доведено.

Теорема 6.3. *Нехай* $a \in C\big(S, O(X)\big)$ *і* $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, *де* $(V_i)_{i \in I}$ *— сім'я опуклих множин простору* X, $g^* \in V$ *і* $V_{g^*} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ g^* \in \overline{V_i}}} V_i$. *Якщо* g^* *є чебишовською точкою системи* $\{a(s), s \in S\}$ *у множині* V, *то для будь-якого елемента* $g \in V_{g^*}$ *існують елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ *такі, що*

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) \;=\; E_{a(s_g)}(g^*) \;=\; \operatorname{Re} f_g(g^*) \;-\; \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y), \tag{6.10}$$

$$\operatorname{Re} f_g(g - g^*) \;\geq\; 0. \tag{6.11}$$

Доведення. Нехай g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V. Згідно з твердженням 1.2.3 [11, с.15]

$$\Gamma^*(V, g^*) \;\supset\; \bigcup_{i \in I} \Gamma^*(V_i, g^*) \;=\; \bigcup_{\substack{i \in I, \\ g^* \in \overline{V_i}}} \Gamma^*(V_i, g^*). \tag{6.12}$$

Нехай $g \in V_{g^*}$. Тоді існує $i_g \in I$ таке, що $g^* \in \overline{V}_{i_g}$ та $g \in V_{i_g}$. Оскільки V_{i_g} є опуклою множиною, то за теоремою 1.3.4 [11, с. 19] $g - g^* \in \Gamma^*(V_{i_g}, g^*)$. Звідси та з співвідношення (6.12) випливає, що $g - g^* \in \Gamma^*(V, g^*)$. Згідно з теоремою 6.2 існують такі елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення (6.10), (6.11).

Теорему доведено.

Теорема 6.4. *Нехай* $a \in C(S, O(X))$, V *— довільна множина простору* X, $g^* \in V$. *Якщо для кожного елемента* $g \in V$ *існують елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ *такі, що мають місце співвідношення* (6.10), (6.11), *то* $g^* \in V$ *є чебишовською точкою системи* $\{a(s), s \in S\}$ *у множині* V.

Доведення. Нехай g є довільним елементом множини V. Згідно з умовою теореми існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких мають місце співвідношення (6.10), (6.11).

З урахуванням цих співвідношень одержимо

$$0 \le \operatorname{Re} f_g(g - g^*) = \operatorname{Re} f_g(g) - \operatorname{Re} f_g(g^*) =$$

$$= \operatorname{Re} f_g(g) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) - \max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) \le$$

$$\le \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f(y) \right) - \max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) =$$

$$= E_{a(s_g)}(g) - \max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*).$$

Отже, $\max_{s\in S} E_{a(s)}(g^*) \le E_{a(s_g)}(g) \le \max_{s\in S} E_{a(s)}(g)$. Тому

$$\max_{s\in S} E_{a(s)}(g^*) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} E_{a(s)}(g).$$

Звідси випливає, що g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V.

Теорему доведено.

Згідно з [12] множину M лінійного нормованого простору Y будемо називати Γ^*-множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо $y - y_0 \in \Gamma^*(M, y_0)$ для всіх $y \in M$. Прикладами Γ^*-множин є, зокрема, зіркові відносно g^*, в тому числі опуклі множини.

Теорема 6.5. *Нехай* $a \in C(S, O(X))$, $g^* \in V$ *і* V *є* Γ^**-множиною відносно точки* g^*. *Для того щоб елемент* g^* *був чебишовською точкою системи* $\{a(s), s \in S\}$ *у множині* V, *необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, *для яких виконуються співвідношення* (6.10), (6.11).

Доведення. *Необхідність.* Нехай g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V і V є Γ^*-множиною відносно g^*. Тоді для будь-якого $g \in V$ $g - g^* \in \Gamma^*(V, g^*)$. Згідно з теоремою 6.2 для $g - g^* \in \Gamma^*(V, g^*)$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення (6.10), (6.11). Необхідність доведено.

Достатність випливає з теореми 6.4.

Теорему доведено.

***Наслідок* 6.1.** *Нехай* $a \in C(S, O(X))$, $g^* \in V$ *і* V *— підпростір простору* X. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був чебишовською точкою системи* $\{a(s), s \in S\}$ *у* V, *необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ *такі, що*

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) = E_{a(s_g)}(g^*) = \operatorname{Re} f_g(g^*) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y), \quad \operatorname{Re} f_g(g) \geq 0 .$$

Зі встановлених вище тверджень можна отримати необхідні, достатні умови та критерії чебишовського центра компакта $S \subset X$ відносно множини $V \subset X$.

***Наслідок* 6.2.** *Нехай* $V \subset X$ *є* Γ^**-множиною відносно точки* $g^* \in V$. *Для того щоб елемент* g^* *був чебишовським центром компакта* $S \subset X$ *відносно множини* V, *необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, *для яких виконуються співвідношення*

$$\operatorname{Re} f_g(g^* - s_g) = \max_{s \in S} \left\| g^* - s \right\|, \quad \operatorname{Re} f_g(g - g^*) \geq 0 .$$

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Гаркави А. Л.* О чебышевском центре множества в нормированном пространстве // Исслед. по соврем. пробл. конструктив. теории функций. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 328 – 331.
3. *Сосов Е. Н.* Достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества геодезического пространства // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 6. – С. 47 – 51.
4. *Гнатюк В. О., Гнатюк Ю. В., Гудима У. В.* Модифікація методу Ремеза на випадок задачі відшукання чебишовського центра компакта нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишовського підпростору // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. праць. – Київ; Кам'янець-Подільський, 2004. – С. 29 – 40.
5. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
6. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
7. *Белобров П. К.* О чебышевской точке системы множеств // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 18 – 24.
8. *Белобров П. К.* К задаче выпуклого чебышевского приближения в нормированном пространстве // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – 1965. – **125**, кн. 2. – С. 3 – 6.
9. *Гнатюк В. А., Щирба В. С.* Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции // Укр. мат. журн. – 1982. – **4**, № 5. – С. 608 – 613.
10. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. – 178 с.
11. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496с.
12. *Гудима У. В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1601 – 1619.
13. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 455 с.

Одержано 30.03.10,
після доопрацювання — 19.11.10