УДК 517.96

С. В. Грищук, С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ*

We obtain integral representations of generalized axial symmetric potentials via analytic functions of complex variable that are defined in an arbitrary simply connected bounded domain symmetric with respect to the real axis. We prove that these integral representations establish a one-to-one correspondence between analytic functions of complex variable that take real values on the real axes and generalized axial symmetric potentials belonging to certain classes.

Встановлено інтегральні зображення узагальнених осесиметричних потенціалів через аналітичні функції комплексної змінної, задані в довільній однозв'язній обмеженій області, що є симетричною відносно дійсної осі. Доведено, що ці інтегральні зображення задають взаємно однозначну відповідність між аналітичними функціями комплексної змінної, що набувають дійсних значень на дійсній осі, та узагальненими осесиметричними потенціалами певних класів.

Уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)+\frac{m}{y}\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

с линией вырождения Ox имеет фундаментальное значение в теории обобщенного осесимметричного потенциала (см. [1 – 10]). Ряд эффективных методов исследования осесимметричных потенциальных полей основывается на интегральных представлениях решений уравнения (1) через аналитические функции комплексной переменной (см. [1, 3 – 6, 9, 11, 12]).

Известно также, что решение уравнения (1) является компонентой обобщенной аналитической функции [13] или p-аналитической функции [7] комплексной переменной, а при $m=1$ — компонентой моногенной функции, принимающей значения в бесконечномерной коммутативной банаховой алгебре [14].

Отметим, что большинство упомянутых интегральных представлений (см. [1, 3 – 7, 13, 14]) получены в областях специального вида (полностью содержащих перпендикулярные к линии вырождения отрезки при условии, что их концы принадлежат самим областям) или в дополнении к замыканию указанных областей.

В работе [11] установлены интегральные представления решений уравнения (1) при $m=1$ через аналитические функции комплексной переменной в произвольной ограниченной односвязной области, симметричной относительно оси Ox. В данной работе устанавливаются некоторые аналоги результатов работы [11] при $m>0$ в случае $m\neq 1$.

1. Интегральные представления обобщенных осесимметричных потенциалов и краевые задачи. Пусть D — ограниченная односвязная область декартовой плоскости xOy, симметричная относительно оси Ox. Обозначим через $\mathbb{R}$ действительную ось, а через D_z — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D при соответствии $z=x+iy$.

Для каждой точки $z\in D_z$, для которой $\operatorname{Im} z\neq 0$, зафиксируем произвольную гладкую жорданову кривую $\Gamma_{z\bar{z}}$, лежащую в области D_z и соединяющую точки

*Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 25.1/084) и Государственной программы Украины № 0107U002027.

z, $\bar{z}$, при этом условимся началом кривой считать точку с отрицательной мнимой частью.

Если $z \in D_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^\alpha$ понимаем как ветвь аналитической функции $L(t) := \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^\alpha$ с разрезом вдоль жордановой кривой, последовательно соединяющей точки z, ∞, $\bar{z}$ и имеющей с множеством $\Gamma_{z\bar{z}} \cup \mathbb{R}$ общими только точки z, $\bar{z}$, такую, что $L(t) > 0$ при всех $t > \max\limits_{\tau \in \Gamma_{z\bar{z}}} \operatorname{Re} \tau$.

Если $m > 0$ и функция F голоморфна в области D_z, то функция

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i |y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} F(t)\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{m/2-1}\, dt\,, \quad z = x+iy, \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1) на множестве $\big\{(x,y) \in D\colon y \neq 0\big\}$. При этом существует предел

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \frac{\mathrm{B}\,(m/2, 1/2)}{2\pi}\, F(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}\colon (x_0, 0) \in D\,, \tag{3}$$

где $\mathrm{B}(p,q)$ — бета-функция Эйлера.

Отметим, что в работе [15] интегральные представления x^k-аналитических функций, схожие по своему виду с выражением (2), по-видимому, впервые распространены на произвольные области, симметричные относительно линии вырождения соответствующих уравнений.

Обозначим $D^+ := \{(x,y) \in D\colon y > 0\}$. Через Γ обозначим пересечение границы ∂D области D с полуплоскостью $\{(x,y)\colon y \geq 0\}$, а через b_1 и b_2 — точки пересечения границы ∂D_z области D_z с действительной осью, полагая при этом $b_1 < b_2$.

Из равенства (3) следует, что решение (2) уравнения (1) принадлежит классу $C_2(D^+)$ функций, непрерывных на множестве $D^+ \cup \big\{(x,0) \in D\colon b_1 < x < b_2\big\}$ и имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D^+. Кроме того, легко проверить, что функция (2) принадлежит подклассу $N_2(D^+)$ класса $C_2(D^+)$, состоящему из функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\lim_{(x_0,y)\to(x_0,0)} y^m \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \quad \forall x_0 \in (b_1, b_2)\,.$$

Целью данной работы является доказательство следующих результатов о представлении решений уравнения (1) формулой (2).

Теорема 1. *Для каждой действительнозначной функции* $u(x,y)$ *класса* $C_2(D^+)$, *которая при* $m \in [1,2)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в области* D^+, *существует единственная голоморфная функция* $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию*

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \quad \forall z \in D_z\,, \tag{4}$$

такая, что равенство (2) *выполняется при всех* $(x,y) \in D^+$.

Теорема 2. *Для каждой действительнозначной функции* $u(x,y)$ *класса* $N_2(D^+)$, *которая при* $m \in (0,1)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в области* D^+, *существует единственная голоморфная функция* $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию* (4), *такая, что равенство* (2) *выполняется при всех* $(x,y) \in D^+$.

Доказательство теорем 1, 2, которое приводится в п. 6, осуществляется методом, разработанным в [11] для уравнения (1) при $m = 1$. Схема доказательства включает, в частности, редукцию интегрального уравнения (2) с искомой функцией F к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на вещественной прямой и позволяет получить (при некоторых естественных предположениях о границе области и заданной функции) формулы решений следующих краевых задач для уравнения (1):

задача $\boldsymbol{E}$: при $1 \le m < 2$ найти решение $u\colon D^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) класса $C_2(D^+)$, которое принимает на Γ значения заданной непрерывной функции u_Γ;

задача $\boldsymbol{N_0}$: при $m \in (0;1)$ найти решение $u\colon D^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) класса $N_2(D^+)$, которое принимает на Γ значения заданной непрерывной функции u_Γ.

Известно, что заменой переменных $\xi = x$, $\eta = y^2/4$ уравнение (1) приводится к уравнению

$$\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{(1+m)}{2}\,\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0\,,$$

для которого в работе [16] установлена однозначная разрешимость задачи E в случае гладкой кривой Γ. Существование и единственность решения задачи N_0 в случае кусочно-гладкой кривой Γ установлены в работе [17].

2. Редукция вспомогательной задачи к сингулярному интегральному уравнению. Для функции $u_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, непрерывной на дуге Γ, введем в рассмотрение функцию $u_{\partial D}\colon \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемую равенством $u_{\partial D}(x,y) := u_\Gamma(x,|y|)$ при $(x,y) \in \partial D$.

Через $\Gamma^\gamma_{z\bar z}$ обозначим дугу границы $\partial D_z =: \gamma$ с концами z, $\bar z$, содержащую точку b_1, при этом условимся считать началом кривой $\Gamma^\gamma_{z\bar z}$ ту из точек z, $\bar z$, мнимая часть которой отрицательна.

Рассмотрим *вспомогательную задачу* для заданной граничной функции $u_{\partial D}(x,y)$ об отыскании голоморфной в D_z и непрерывной в $\overline{D_z}$ функции F, удовлетворяющей дополнительному условию симметрии (4), такой, что ее граничные значения удовлетворяют интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi i\,|y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma^\gamma_{z\bar z}} F(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\,dt = u_{\partial D}(x,y)\,, \tag{5}$$

где $(x,y) \in \partial D\colon y \ne 0$, $z = x + iy$.

При решении вспомогательной задачи будем использовать некоторое конформное отображение $\sigma(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| < 1\}$ на область D_z такое, что $\sigma(-1) = b_1$, $\sigma(1) = b_2$ и образом полукруга $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| < 1, \operatorname{Im} Z > 0\}$ при отображении $\sigma(Z)$ является область $\{z \in D_z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Легко видеть, что такое отображение существует и при всех $Z \in \{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| \le 1\}$ удовлетворяет условию $\sigma(\bar Z) = \overline{\sigma(Z)}$.

Введем в рассмотрение функцию

$$M(Z,T) := \left(\frac{(T-Z)(T-\bar Z)}{(\sigma(T)-\sigma(Z))(\sigma(T)-\sigma(\bar Z))}\right)^{1-m/2}, \tag{6}$$

которую при каждом фиксированном $Z \ne -1$ будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M(Z,-1) > 0$.

Рассмотрим также функцию

$$m(\xi,\tau) := -i\,\frac{\exp(i\pi m/2)}{4^{1-m/2}}\,\frac{(\tau+i)^{2-m}}{\tau+i}\,M\left(\frac{\xi-i}{\xi+i},\ \frac{\tau-i}{\tau+i}\right), \quad \xi,\ \tau\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

где голоморфная ветвь функции $(\tau+i)^{2-m}$ определена вне разреза $\{\tau = i\eta\colon \eta \le \le -1\}$ и принимает значение $-\exp(-i\pi m/2)$ при $\tau = 0$.

Пусть $\omega\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой выполняется равенство $\omega(0) = 0$ и существуют постоянные C и ν такие, что при всех $k > 1$ и всех $\xi > 0$ выполняется неравенство $\omega(k\xi) \le C\,k^{\nu}\,\omega(\xi)$. Тогда при $\alpha \in \in (0;1]$ введем в рассмотрение класс $\mathcal{H}_\alpha^\omega$ функций $g\colon \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\big|g(z_1) - g(z_2)\big| \le c\omega(r_{z_1 z_2})\left(\frac{|z_1 - z_2|}{r_{z_1 z_2}}\right)^{\alpha} \quad \forall z_1,\ z_2 \in \partial D_z\,,$$

где $r_{z_1z_2} := \max\big\{|z_1 - b_1||z_1 - b_2|, |z_2 - b_1||z_2 - b_2|\big\}$ и постоянная c не зависит от $z_1,\ z_2$. Обозначим через $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$ класс функций $g_{\partial D}\colon \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, для каждой из которых функция g, определяемая равенством $g(x+iy) := g_{\partial D}(x,y)$ при $(x,y) \in \in \partial D$, принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha^\omega$.

Отметим, что если функция u_* суммируема на отрезке $[a, a_1]$, а на отрезке $[a_1, a_2]$ удовлетворяет условию Гельдера

$$|u_*(\xi_1) - u_*(\xi_2)| \le\ c\,|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in [a_1, a_2]\,,$$

где $\alpha > \mu$, $0 < \mu < 1$, и постоянная c не зависит от $\xi_1,\ \xi_2$, то по стандартной схеме [18, с. 573] при любом $\xi \in (a_1, a_2)$ получаем равенство

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_a^{\xi} \frac{s u_*(s)}{(\xi^2 - s^2)^{\mu}\big(s^2 - a^2\big)^{1-\mu}}\,ds = -2\mu\xi\int\limits_a^{\xi} \frac{s\big(u_*(s) - u_*(\xi)\big)}{(\xi^2 - s^2)^{1+\mu}\big(s^2 - a^2\big)^{1-\mu}}\,ds \tag{8}$$

и, кроме того, справедливо также равенство

$$\lim_{\tau\to\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s u_*(s)}{(\xi^2 - s^2)^{\mu}\big(s^2 - \tau^2\big)^{1-\mu}}\,ds = \frac{\pi}{2\sin(\pi\mu)}u_*(\xi) \quad \forall \xi \in (a_1, a_2]. \tag{9}$$

В следующей теореме, которая доказывается по схеме доказательства теоремы 2 из [11], в случае $0 < m < 2$ приведены достаточные условия редукции вспомогательной задачи для заданной граничной функции $u_{\partial D}(x,y)$ к сингулярному интегральному уравнению на действительной оси.

Теорема 3. *Пусть $0 < m < 2$ и функция $u_{\partial D}$ принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$, $m/2 < \alpha \le 1$. Пусть при этом отображение $\sigma(Z)$ дифференцируемо в точках множества $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| = 1,\ Z \ne \pm 1\}$, функция $\sigma'(Z)$ в тех же точках непрерывна и не равна нулю, а в окрестности точек $Z = \pm 1$ удовлетворяет оценке*

$$|\sigma'(Z)| \le c\big(|Z+1|^{-\beta} + |Z-1|^{-\beta}\big),$$

где $\beta \in (0;1)$ и постоянная c не зависит от Z.

Пусть, кроме того, функция $M(Z,T)$ при любых $A_1,\ A_2 \in (-1;1)$, $A_1 < A_2$, удовлетворяет условию

$$\left|M(Z_1,T)-M(Z_2,T)\right|\le c|Z_1-Z_2|^{\alpha'}$$

$$\forall T,\ Z_1,\ Z_2\in\{Z\in\mathbb{C}\colon |Z|=1\}\colon\ -1<\operatorname{Re}T<A_1<\operatorname{Re}Z_1<\operatorname{Re}Z_2<A_2,$$

$$\operatorname{Im}Z_1\operatorname{Im}T>0,\qquad \operatorname{Im}Z_2\operatorname{Im}T>0,$$

где $m/2<\alpha'\le 1$ *и постоянная* c *не зависит от* Z_1 *и* Z_2.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *каждое решение* F *вспомогательной задачи для граничной функции* $u_{\partial D}$ *по формуле*

$$U_p(\xi)=\operatorname{Re}\frac{i\left(F\left(\sigma\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)-2\pi\,u_{\partial D}(b_2,0)/\mathrm{B}\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{1}{2}\right)\right)\sigma_+'\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)}{2\sin\dfrac{\pi m}{2}\,(\xi+i)}\qquad\forall\xi>0$$

порождает решение сингулярного интегрального уравнения

$$A(\xi,\xi)\,U_p(\xi)+\frac{2\xi}{\pi}B(\xi,\xi)\int\limits_0^\infty\frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau-$$

$$-\frac{4m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi^2}\,\xi\int\limits_0^\xi\left(\int\limits_\tau^\xi\frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\int\limits_0^\infty\frac{\tau\,U_p(\eta)}{\eta^2-\tau^2}\,d\eta\right)d\tau-$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^\xi\int\limits_\tau^\xi\frac{U_p(\tau)\,s\,(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau=f_*(\xi)\quad\forall\xi>0,\tag{10}$$

в котором

$$A(\xi,\tau):=2\operatorname{Re}m(\xi,\tau),\qquad B(\xi,\tau):=2\operatorname{Im}m(\xi,\tau),\tag{11}$$

$$f_*(\xi):=u_*(\xi)\xi^{1-m}-m\,\xi\int\limits_0^\xi\frac{s(u_*(s)-u_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\tag{12}$$

и функция u_* *выражается через заданную функцию* $u_{\partial D}$ *равенством*

$$u_*(\xi):=\frac{|y|^{m-1}}{(\xi^2+1)^{1-m/2}}\Big(u_{\partial D}(x,y)-u_{\partial D}(b_2,0)\Big),$$

где $x+iy=\sigma\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)$;

2) *если в сингулярном интегральном уравнении* (10) *функции* A, B, f_* *определяются равенствами* (11), (12) *и функция* U_p *является таким его решением, что функция*

$$F_0(z)=-\frac{2\sin\dfrac{\pi m}{2}(\xi+i)}{\pi\,\sigma_+'\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau,\qquad z=\sigma\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right),\quad\operatorname{Im}\xi>0,\tag{13}$$

непрерывно продолжается из области D_z на границу ∂D_z, то функция

$$F(z) = F_0(z) + \frac{2\pi\, u_{\partial D}(b_2, 0)}{\mathrm{B}\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{1}{2}\right)} \tag{14}$$

является решением вспомогательной задачи для заданной граничной функции $u_{\partial D}$.

Доказательство. Перепишем интегральное уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{2\pi i|y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma^{\gamma}_{z\bar z}} F_0(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\, dt = u_{\partial D}(x,y) - u_{\partial D}(b_2,0)\,, \tag{15}$$

где $F_0(t) := F(t) - 2\pi\, u_{\partial D}(b_2,0)/\mathrm{B}\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Использовав конформное отображение $z = \sigma(Z)$ единичного круга на область D_z и обозначив через $C_{z\bar z}$ прообраз дуги $\Gamma^{\gamma}_{z\bar z}$ при этом отображении, преобразуем уравнение (15) к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z\bar z}} \frac{F_0\big(\sigma(T)\big)\, \sigma'(T)}{\Big(\big(\sigma(T)-\sigma(Z)\big)\big(\sigma(T)-\sigma(\bar Z)\big)\Big)^{1-m/2}}\, dT =$$

$$= \big|\operatorname{Im}\sigma(Z)\big|^{m-1}\Big(u_{\partial D}(\operatorname{Re}\sigma(Z), \operatorname{Im}\sigma(Z)) - u_{\partial D}(b_2,0)\Big). \tag{16}$$

Пусть $Z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} Z \neq 0$. Введем в рассмотрение непрерывную ветвь $\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}$ функции $L_m(T) := \big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}$, аналитической вне разреза $\{T \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} T| \geq |\operatorname{Im} Z|\}$, такую, что $L_m(T) > 0$ при всех $T \in \mathbb{R}\colon T > 1$.

Легко устанавливается равенство

$$\Big(\big(\sigma(T)-\sigma(Z)\big)\big(\sigma(T)-\sigma(\bar Z)\big)\Big)^{1-m/2} = \frac{\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}}{M(Z,T)},$$

с учетом которого уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z\bar z}} \frac{F_+(T)\, M(Z,T)\, \sigma'(T)}{\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}}\, dT =$$

$$= \big|\operatorname{Im}\sigma(Z)\big|^{m-1}\Big(u_{\partial D}(\operatorname{Re}\sigma(Z), \operatorname{Im}\sigma(Z)) - u_{\partial D}(b_2,0)\Big), \tag{17}$$

где $F_+(T) := F_0(\sigma(T))$.

Выполним теперь конформное отображение $\xi = i\dfrac{1+Z}{1-Z}$ комплексной плоскости. При этом отображении образом дуги $C_{z\bar z}$ является отрезок $\big[-|\xi|, |\xi|\big]$, причем точки T, $\bar T$ дуги $C_{z\bar z}$, симметричные относительно вещественной прямой, отображаются соответственно в точки τ и $-\tau$ отрезка $[-|\xi|, |\xi|]$, симметричные относительно точки 0. Используя равенство

$$\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2} = -\frac{4^{1-m/2}\exp\left(-\dfrac{i\pi m}{2}\right)}{(\tau+i)^{2-m}}\, \frac{\big(\xi^2-\tau^2\big)^{1-m/2}}{(\xi^2+1)^{1-m/2}} \quad \forall T \in C_{z\bar z}\,,$$

в котором соответствующие точки $T \in C_{z\bar z}$ и $\tau \in \big[-|\xi|, |\xi|\big]$ связаны соотношением $T = \dfrac{\tau - i}{\tau + i}$, указанным конформным отображением плоскости уравнение (17) приводится к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-|\xi|}^{|\xi|} \frac{F_*(\tau)\, m(\xi,\tau)}{(\xi^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, d\tau = u_*(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{18}$$

где функция $F_*(\tau) := i\,F_+(T)\,\sigma'(T)/(\tau+i)$ голоморфна в полуплоскости $\{\tau \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\tau > 0\}$, нерерывно продолжается на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и равна нулю на бесконечности.

Вследствие четности функции u_* уравнение (18) равносильно уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\xi} \frac{F_*(\tau)\, m(\xi,\tau) + F_*(-\tau)\, m(\xi,-\tau)}{(\xi^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, d\tau = u_*(\xi) \quad \forall \xi > 0. \tag{19}$$

Полагая в равенстве (19) $\xi = s$, а затем умножая обе его части на $s(\xi^2-s^2)^{-m/2}$ и, наконец, интегрируя по переменной s на отрезке $[0,\xi]$, имеем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\xi} \frac{s}{(\xi^2-s^2)^{m/2}} \int\limits_0^{s} \frac{F_*(\tau)\, m(s,\tau) + F_*(-\tau)\, m(s,-\tau)}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, d\tau\, ds = \int\limits_0^{\xi} \frac{s u_*(s)}{(\xi^2-s^2)^{m/2}}\, ds.$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, из этого равенства получаем соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s\big(F_*(\tau)\, m(s,\tau) + F_*(-\tau)\, m(s,-\tau)\big)}{(\xi^2-s^2)^{m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds\, d\tau = \int\limits_0^{\xi} \frac{s\, u_*(s)}{(\xi^2-s^2)^{m/2}}\, ds. \tag{20}$$

Далее, дифференцируя равенство (20) по переменной ξ и учитывая при этом равенства (8), (9), находим

$$-\frac{m\,\xi}{\pi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{F_*(\tau)\big(m(s,\tau) - m(\xi,\tau)\big) + F_*(-\tau)\big(m(s,-\tau) - m(\xi,-\tau)\big)}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds\, d\tau\, +$$

$$+\ \frac{1}{2\sin(\pi m/2)}\big(F_*(\xi)\, m(\xi,\xi) + F_*(-\xi)\, m(\xi,-\xi)\big) = f_*(\xi)\,. \tag{21}$$

Очевидно, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$m(\xi,-\tau) = \overline{m(\xi,\tau)}. \tag{22}$$

Функция F_*, в свою очередь, удовлетворяет соотношению (см. равенство (27) работы [11])

$$F_*(-\tau) = \overline{F_*(\tau)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{23}$$

Введем в рассмотрение функции $U_p(\xi) := \operatorname{Re} F_*(\xi)\Big/\Big(2\sin\dfrac{\pi m}{2}\Big)$, $V_p(\xi) := \operatorname{Im} F_*(\xi)\Big/\Big(2\sin\dfrac{\pi m}{2}\Big)$ и с учетом соотношений (22), (23) перепишем равенство (21) в виде

$$A(\xi,\xi)U_p(\xi) - B(\xi,\xi)V_p(\xi) -$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{U_p(\tau)\,s\,\big(A(s,\tau)-A(\xi,\tau)\big)}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau+$$

$$+\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{V_p(\tau)\,s\,(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau = f_*(\xi). \tag{24}$$

Используя формулу Гильберта для обращения сингулярного интеграла Коши [18, с. 93], с учетом четности функции U_p имеем равенства

$$V_p(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = -\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau \quad \forall\xi>0\,. \tag{25}$$

Наконец, подставляя выражение (25) в равенство (24), получаем сингулярное интегральное уравнение (10) для нахождения функции U_p. Таким образом, утверждение 1 теоремы доказано, а для завершения доказательства утверждения 2 остается заметить, что функция F выражается через функцию U_p по формуле (13) в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [19, с. 209].

3. Вспомогательные утверждения. Предположим, что конформное отображение $\sigma(Z)$ имеет непрерывную контурную производную на единичной окружности, не равную нулю ни в одной точке окружности. В этом случае при всех $T, Z \in \{Z\in\mathbb{C}\colon |Z|=1\}$ выполняются неравенства

$$0 < c_1 \le \left|\frac{\sigma(T_0)-\sigma(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \le c_2, \tag{26}$$

где c_1, c_2 — некоторые абсолютные постоянные, и при всех T_0, T_1, Z_1, $Z_0 \in \{Z \in \mathbb{C}\colon |Z|=1\}$ таких, что $-1<\operatorname{Re}T_0<\operatorname{Re}T_1<\operatorname{Re}Z_1<\operatorname{Re}Z_0<1$, $\operatorname{Im}T_1\operatorname{Im}T_0 > 0$, $\operatorname{Im}Z_1\operatorname{Im}T_0>0$, $\operatorname{Im}Z_0\operatorname{Im}T_0>0$, справедливы оценки

$$\left|\frac{\sigma(T_0)-\sigma(Z_1)}{T_0-Z_1}-\frac{\sigma(T_0)-\sigma(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \le c\frac{\omega(\sigma',|T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}\,|Z_1-Z_0|, \tag{27}$$

$$\left|\frac{\sigma(T_1)-\sigma(Z_0)}{T_1-Z_0}-\frac{\sigma(T_0)-\sigma(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \le c\,\frac{\omega(\sigma',|T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}\,|T_1-T_0|. \tag{28}$$

Здесь c — некоторая абсолютная постоянная и

$$\omega(\sigma',\varepsilon) := \sup_{|T_1|=|T_2|=1,\,|T_1-T_2|\le\varepsilon}|\sigma'(T_1)-\sigma'(T_2)|\,.$$

Лемма 1. *Пусть* $0<m<2$, *функция* $v\colon(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$ *суммируема на интервале* $(0,1)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\xi\to\infty}v(\xi)=0, \tag{29}$$

$$|v(s)-v(\xi)| \le c\,\omega(s^{-1})\,\frac{(\xi-s)^{\alpha}}{s\,\xi^{\alpha}} \quad \forall s,\xi\colon 1\le s<\xi, \tag{30}$$

где $\omega\colon (0,2] \longrightarrow (0,\infty)$ — *неубывающая ограниченная функция,* $\alpha \in (m/2;1]$ *и постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ.

Тогда при всех $\xi \geq 2$ *справедливы оценки*

$$\left|v(\xi)\xi^{1-m}\right| + \left|\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right| \leq \frac{c}{\xi^{1+m}}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\,, \tag{31}$$

$$\left|v(\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon)^{1-m} - v(\xi)\xi^{1-m}\right| +$$

$$+\left|(\xi+\varepsilon)\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}\frac{s(v(s)-v(\xi+\varepsilon))}{((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds - \xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\Bigg)\right| \leq$$

$$\leq \frac{c}{\xi^m}\left(\omega(2/\xi)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}} + \frac{\varepsilon}{\xi^2}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right) \quad \forall\varepsilon \in (0;\xi/2], \tag{32}$$

где постоянная c *не зависит от* ξ *и* ε.

Лемма 2. *Пусть* $0 < m < 2$ *и функция* $v\colon (0,3) \longrightarrow \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию*

$$\left|v(s)-v(\xi)\right| \leq c\omega(\xi)\,\frac{(\xi-s)^{\alpha}}{s^{\alpha_0}} \quad \forall s,\xi\colon 0 < s < \xi < 3,$$

где $\omega\colon (0,9/2) \longrightarrow (0,\infty)$ — *неубывающая ограниченная функция,* $\alpha \in (m/2;1]$, $\alpha_0 \in (-\infty;2)$ *и постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ.

Тогда при всех $\xi \in (0;2)$ *справедливы оценки*

$$\left|\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right| \leq c\,\omega(\xi)\,\xi^{1+\alpha-m-\alpha_0}, \tag{33}$$

$$\left|(\xi+\varepsilon)\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}\frac{s(v(s)-v(\xi+\varepsilon))}{((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds - \xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right| \leq$$

$$\leq c\omega(3\xi/2)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}} \quad \forall\varepsilon \in (0;\xi/2], \tag{34}$$

где постоянная c *не зависит от* ξ *и* ε.

Оценки (31) – (34) устанавливаются аналогично соответствующим оценкам леммы 3 из [20].

Лемма 3. *Пусть* $0 < m < 2$ *и функция* $u_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}(\partial D)$, $m/2 < \alpha \leq 1$. *Если при этом конформное отображение* $\sigma(Z)$ *имеет непрерывную контурную производную на окружности* $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| = 1\}$, *не равную нулю ни в одной точке этой окружности, то функция* (12) *имеет предел*

$$f_*(0) := \lim_{\xi\to 0} f_*(\xi) = (1+a_0)\,\varphi_*(0)\,,$$

где

$$\varphi_*(0) := 2^{m-1}\,|\sigma'(-1)|^{m-1}\big(u_{\partial D}(b_1,0) - u_{\partial D}(b_2,0)\big),$$

$$a_0 := \int\limits_0^1 \frac{\tau^m - \tau}{(1-\tau^2)^{1+m/2}}\,d\tau\,,$$

и при всех $\xi \in (0;2)$ *справедливы оценки*

$$|f_*(\xi) - f_*(0)| \le c\,\left(\omega(\xi) + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\right)\,,$$

$$|f_*(\xi+\varepsilon) - f_*(\xi)| \le c\left(\omega(\xi)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}} + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{\xi^{1-m/2}}\right) \quad \forall\varepsilon \in (0,\xi/2],$$

а при всех $\xi \ge 2$ *— оценки*

$$|f_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{1+m}} \int\limits_{1/\xi}^1 \frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\,, \tag{35}$$

$$|f_*(\xi+\varepsilon) - f_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^m}\left(\omega(\xi^{-1})\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}} + \frac{\varepsilon}{\xi^2}\int\limits_{1/\xi}^1 \frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right) \quad \forall\varepsilon \in (0;\xi/2], \tag{36}$$

в которых постоянная c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство. Легко устанавливается равенство вида (29) для функции u_*. Поскольку функция $u_{\partial D}$ принадлежит классу $\mathcal{H}^\omega_\alpha(\partial D)$, где $\alpha \in (m/2;1]$, с использованием оценок (26), (28) получаем неравенство (30) при $v = u_*$. Поэтому оценки (35), (36) являются следствием оценок (31), (32).

Для доказательства других утверждений леммы представим функцию u_* в виде $u_*(\xi) = \xi^{m-1}\,\varphi_*(\xi)$, где

$$\varphi_*(\xi) := \left(\frac{|y|}{\xi}\right)^{m-1} (\xi^2+1)^{m/2-1}\big(u_{\partial D}(x,y) - u_{\partial D}(b_2,0)\big).$$

Используя условие $u_{\partial D} \in \mathcal{H}^\omega_\alpha(\partial D)$, $m/2 < \alpha \le 1$, а также оценки (26), (27), для функции φ_* при всех s и ξ таких, что $0 < s < \xi < 3$, получаем неравенство

$$\big|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi)\big| \le c\left(\omega(\xi)\,\frac{(\xi-s)^\alpha}{\xi^\alpha} + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\,\frac{\xi-s}{\xi}\right), \tag{37}$$

выполняя в котором предельный переход при $s \to 0$, имеем также

$$\big|\varphi_*(\xi) - \varphi_*(0)\big| \le c\,\left(\omega(\xi) + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\right) \tag{38}$$

(здесь и далее в доказательстве через c обозначены постоянные, не зависящие от ξ и s).

Представим теперь функцию f_* в виде

$$f_*(\xi) = \varphi_*(\xi) + a_0\,\varphi_*(0) + \xi\int\limits_0^\xi \frac{s\,(\widehat{\varphi}_*(s) - \widehat{\varphi}_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\,,$$

где $\widehat{\varphi}_*(\xi) := \xi^{m-1}(\varphi_*(\xi) - \varphi_*(0))$. С использованием оценок (37), (38) при всех s и ξ таких, что $0 < s < \xi < 3$, легко устанавливается неравенство

$$\big|\widehat{\varphi}_*(s) - \widehat{\varphi}_*(\xi)\big| \leq c\left(\omega(\xi)\,\frac{(\xi - s)^\alpha}{\xi^{1+\alpha-m}} + |m-1|\Big(\omega(\xi) + \omega(\sigma', \xi)\Big)\frac{\xi - s}{\xi^{1+\alpha_*}\,s^{\alpha^*}}\right),$$

в котором $\alpha_* := \min\{0, 1-m\}$, $\alpha^* := \max\{0, 1-m\}$.

Наконец, для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 2 при $v = \widehat{\varphi}_*$.

Лемма доказана.

Следствием неравенства (26) и оценок (27), (28) являются аналогичные оценки для функции (6):

$$\big|M(Z_1, T_0) - M(Z_0, T_0)\big| \leq c\,\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\,|Z_1 - Z_0|,$$

$$\big|M(Z_0, T_1) - M(Z_0, T_0)\big| \leq c\,\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\,|T_1 - T_0|$$

$$\forall T_0,\ T_1,\ Z_1,\ Z_0 \in \{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| = 1\}\colon\ -1 < \operatorname{Re} T_0 < \operatorname{Re} T_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_0 < 1,$$

$$\operatorname{Im} T_1 \operatorname{Im} T_0 > 0, \qquad \operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T_0 > 0, \qquad \operatorname{Im} Z_0 \operatorname{Im} T_0 > 0$$

(здесь c — некоторая абсолютная постоянная), с использованием которых получаем такие неравенства для функции (7):

$$\big|m(\xi_1, \tau_0) - m_0(\xi_0, \tau_0)\big| \leq c\,\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\,\frac{(\tau_0 + 1)^{1-m}\,(\xi_0 - \xi_1)}{(\xi_0 + 1)(\xi_1 + 1)}\,, \tag{39}$$

$$\big|m(\xi_0, \tau_1) - m(\xi_0, \tau_0)\big| \leq c\left(\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\,\frac{1}{(\tau_1 + 1)} + 1\right)\frac{(\tau_1 - \tau_0)}{(\tau_0 + 1)^m} \tag{40}$$

$$\forall \tau_0,\ \tau_1,\ \xi_1,\ \xi_0 : 0 < \tau_0 < \tau_1 < \xi_1 < \xi_0.$$

Здесь c — некоторая абсолютная постоянная, $Z_0 := (\xi_0 - i)/(\xi_0 + i)$, $T_0 := (\tau_0 - - i)/(\tau_0 + i)$.

Лемма 4. *Для функции*

$$\widehat{m}(\xi, \tau) = \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s(m(s, \tau) - m(\xi, \tau))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}(s^2 - \tau^2)^{1-m/2}}\,ds$$

справедливы оценки

$$\big|\widehat{m}(\xi, \tau)\big| \leq c\,\frac{\omega(\sigma', |T - Z|)}{|T - Z|}\,\frac{1}{(\xi + 1)^{1+m/2}(\tau + 1)^{m/2}} \quad \forall \xi > \tau > 0, \tag{41}$$

$$\big|\widehat{m}(\xi, \tau) - \widehat{m}(\xi - \varepsilon, \tau)\big| \leq$$

$$\leq c\,\frac{\omega(\sigma', |T - Z|)}{|T - Z|}\,\frac{1}{(\xi + 1)^{1+m/2}(\tau + 1)^{m/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\xi - \tau}\right)^{1-m/2} \tag{42}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \tau > 0 \quad \forall \xi > \tau + 3\varepsilon,$$

$$\left|\widehat{m}(\xi,\tau+\varepsilon)-\widehat{m}(\xi,\tau)\right|\le$$

$$\le c\left(\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\tau+1)^{m+1}}+\frac{1}{(\tau+1)^{m}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{\beta_m} \tag{43}$$

$$\forall\varepsilon\in(0;1)\quad\forall\tau>0\quad\forall\xi>\tau+3\varepsilon,$$

где $T:=(\tau-i)/(\tau+i)$, $Z:=(\xi-i)/(\xi+i)$, $\beta_m:=\min\{m/2,1-m/2\}$ *и постоянная* c *не зависит от* τ, ξ, ε.

Доказательство леммы 4 проводится с использованием оценок (39), (40) аналогично доказательству леммы 3 из [11] или леммы 1 из [21].

Всюду в дальнейшем $\alpha^*:=\max\{0,1-m\}$.

Лемма 5. *Пусть модуль непрерывности контурной производной конформного отображения* $\sigma(Z)$ *на окружности* $\{Z\in\mathbb{C}\colon |Z|=1\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,d\eta<\infty\,,$$

а для функции $\widehat{m}(\xi,\tau)$ *справедливы оценки* (41), (42).

Тогда справедливы также оценки

$$\int\limits_0^\xi\frac{|\widehat{m}(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau\le$$

$$\le\frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2+\alpha_*}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta((\xi+1)^{m/2-1}+\eta^{1-m/2})}\,d\eta\quad\forall\xi\ge1,$$

$$\int\limits_0^\xi\frac{|\widehat{m}(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau\le c\int\limits_0^\xi\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,d\eta\quad\forall\xi\in(0;1]\,,$$

$$\left|\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}\frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau-\int\limits_0^\xi\frac{|\widehat{m}(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau\right|\le$$

$$\le c\frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^{m+\alpha_*}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1-m/2}+\eta^{1-m/2})}\,d\eta\quad\forall\xi>4\varepsilon>0,$$

где $\varepsilon_1:=\varepsilon/(\xi^2+1)$ *и постоянная* c *не зависит от* ξ *и* ε.

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 2 из [21].

Лемма 6. *Пусть модуль непрерывности контурной производной конформного отображения* $\sigma(Z)$ *на окружности* $\{Z\in\mathbb{C}\colon |Z|=1\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,\ln\frac{1}{\eta}\,d\eta<\infty\,,$$

а для функции $\widehat{m}(\xi,\tau)$ *справедливы оценки* (41) – (43).

Тогда для функции

$$m_p(\xi,\tau) := \int\limits_0^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\, ds\,,$$

в свою очередь, справедливы оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, d\tau \le c\, \frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{1+m/2+\alpha_*}} \times$$

$$\times \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta} \frac{\ln(3/\eta)}{(\xi+1)^{m/2-1}\ln(\xi+1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\, d\eta \quad \forall \xi \ge 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, d\tau \le c \int\limits_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\, \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta \quad \forall \xi \in (0,1]\,,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi+\varepsilon,\tau)-m_p(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, d\tau \le \frac{c}{(\xi+1)^{m+\alpha_*}}\, {\varepsilon_1}^{1-m/2} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\, \frac{\ln(3/\eta)}{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\, d\eta \quad \forall \xi > 4\varepsilon > 0,$$

где $\varepsilon_1 := \varepsilon/(\xi^2+1)$ *и постоянная* c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство леммы 6 проводится по схеме доказательства леммы 3 из [21].

4. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения. Обозначим через $C(\mathbb{R})$ банахово пространство функций $g_*\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, непрерывных на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, с нормой $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})} := \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}} \big|g_*(\tau)\big|$. При этом введем в рассмотрение локальный центрированный (относительно бесконечно удаленной точки) модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\varepsilon) := \sup_{\tau\in\mathbb{R}:|\tau|\ge 1/\varepsilon} \big|g_*(\tau_1)-g_*(\infty)\big|$$

функции $g_* \in C(\mathbb{R})$, а также ее модуль непрерывности

$$\omega_E(g_*,\varepsilon) := \sup_{\tau_1,\tau_2\in E:\, |\tau_1-\tau_1|\le\varepsilon} \big|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)\big|$$

на множестве $E \subset \mathbb{R}$.

Теперь через $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$ обозначим класс функций $g_* \in C(\mathbb{R})$, модули непрерывности которых удовлетворяют условиям Дини

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\eta)}{\eta}\, d\eta < \infty, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)}(g_*,\eta)}{\eta}\, d\eta < \infty$$

при всех $a > 0$.

Обозначим через $C_e(\mathbb{R})$ подпространство банахова пространства $C(\mathbb{R})$, состоящее из четных функций, а через $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$ множество четных функций класса $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$.

Введем в рассмотрение функции

$$\widehat{m}(\xi,\tau) :=$$

$$:= \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi} \displaystyle\int_{\tau}^{\xi} \dfrac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds & \text{при } \ \xi\tau>0, \ \ |\tau|<|\xi|, \\ 0 & \text{при } \ \xi\tau<0 \ \text{ или } \ \xi\tau>0, \ \ |\tau|>|\xi|, \end{cases}$$

$$\widehat{A}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Re}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,, \qquad \widehat{B}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Im}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,,$$

$$k_p(\xi,\tau) := -\frac{\xi}{|\xi|}\,\widehat{A}(\xi,\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{\widehat{B}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}\, d\eta\,,$$

$$\widehat{f_*}(\tau) := \begin{cases} f_*(\tau) & \text{при } \ \tau\ge 0\,, \\ f_*(-\tau) & \text{при } \ \tau<0, \end{cases}$$

а также интегральные операторы

$$(k_p f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_p(\xi,\tau)}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, f(\tau)\, d\tau\,,$$

$$(Rf)(\xi) := (\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}\left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}\, f(\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{P(\xi)}{2^m\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\tau^2+1)\left|\mathrm{Im}\,\sigma\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2\,|\tau|}\right)^{1-m/2} \frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\, d\tau\right),$$

где

$$P(\xi) := \exp\!\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)(\xi+i)^{m-1}\left(\sigma'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)^{1-m/2} +$$

$$+ \exp\!\left(\frac{i\pi m}{2}\right)(\xi-i)^{m-1}\left(\sigma'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)\right)^{1-m/2},$$

при этом голоморфная ветвь функции $(\xi+i)^{m-1}$ определена вне разреза $\{\xi = i\eta\colon \eta\le -1\}$ и принимает значение $\exp\left(i\dfrac{\pi}{2}(m-1)\right)$ при $\xi=0$, голоморфная ветвь функции $(\xi-i)^{m-1}$ определена вне разреза $\{\xi = i\eta\colon \eta\ge 1\}$ и принимает значение $\exp\left(i\dfrac{\pi}{2}(1-m)\right)$ при $\xi=0$, а значения голоморфных соответственно в полуплоскостях $\{\xi\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}\,\xi>0\}$, $\{\xi\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}\,\xi<0\}$ функций $(\sigma'((\xi-i)/(\xi+i)))^{1-m/2}$, $(\sigma'((\xi+i)/(\xi-i)))^{1-m/2}$ положительны при $\xi=0$.

В следующей теореме приведены условия, достаточные для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (10).

Теорема 4. *Пусть* $0 < m < 2$ *и функция* $u_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$, $m/2 < \alpha \le 1$, *при этом конформное отображение* $\sigma(Z)$ *имеет на окружности* $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| = 1\}$ *непрерывную контурную производную, которая не равна нулю ни в одной точке этой окружности и модуль непрерывности которой удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta} \ln^3 \frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty\,.$$

Тогда каждое решение сингулярного интегрального уравнения (10) *вида*

$$U_p(\xi) = \frac{U_0(\xi)}{(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}, \tag{44}$$

где $U_0 \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$, *может быть получено в результате решения интегрального уравнения Фредгольма*

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = (R\widehat{f}_*)(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

в котором оператор $R\,k_p$ *компактен в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$. *При этом уравнение* (45) *имеет единственное решение в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$, *которое принадлежит классу* $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$.

Доказательство. Как и в случае $m = 1$ при доказательстве теоремы 3 из [11], запишем сингулярное интегральное уравнение (10) в виде

$$A(\xi,\xi)U_p(\xi) + \frac{iB(\xi,\xi)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_p(\xi,\tau)U_p(\tau)\,d\tau = \widehat{f}_*(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{46}$$

при этом вследствие четности обеих частей равенства (46) уравнения (46) и (10) эквивалентны.

Рассмотрим соответствующее уравнению (46) характеристическое уравнение [18]

$$A(\xi,\xi)\,U_*(\xi) + \frac{iB(\xi,\xi)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{47}$$

в котором $f \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$. Для нахождения решения уравнения (47) в классе функций, представимых в виде $U_*(\xi) = U_0(\xi)/(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}$, где $U_0 \in\in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$, используем классический метод [18] приведения характеристического уравнения к краевой задаче Римана

$$\Phi^+(\xi) = G(\xi)\Phi^-(\xi) + g(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{48}$$

коэффициент G и свободный член g которой задаются равенствами

$$G(\xi) := \frac{A(\xi,\xi) - i\,B(\xi,\xi)}{A(\xi,\xi) + i\,B(\xi,\xi)}, \qquad g(\xi) := \frac{f(\xi)}{A(\xi,\xi) + i\,B(\xi,\xi)}\,.$$

Функция G представима в виде $G(\xi) = X^+(\xi)/X^-(\xi)$, где

$$X^+(\xi) = \exp(-i\pi m)(\xi + i)^{m-1}(\sigma'((\xi - i)/(\xi + i)))^{1-m/2},$$

$$X^-(\xi) = -(\xi - i)^{m-1}(\sigma'((\xi + i)/(\xi - i)))^{1-m/2}.$$

Поэтому, используя решение краевой задачи (48) и формулы Сохоцкого для предельных значений $\Psi^{\pm}(\xi)$ в точке $\xi \in \mathbb{R}$ функции

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}$$

соответственно из полуплоскостей $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon \pm \operatorname{Im} \zeta > 0\}$, получаем

$$U_*(\xi) = \Phi^{+}(\xi) - \Phi^{-}(\xi) = X^{+}(\xi)\Psi^{+}(\xi) - X^{-}(\xi)\Psi^{-}(\xi) =$$

$$= \frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2 + (B(\xi,\xi))^2} f(\xi) + \frac{X^{+}(\xi) - X^{-}(\xi)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \xi} =$$

$$= \frac{(Rf)(\xi)}{(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}. \qquad (49)$$

Применяя метод Карлемана – Векуа регуляризации уравнения (46) и используя при этом формулу (49) решения характеристического уравнения (47), получаем интегральное уравнение (45), равносильное уравнению (46).

С использованием лемм 2, 3, 5, 6 так же, как и в случае $m = 1$ при доказательстве теоремы 3 из [11], устанавливается, что оператор $R\,k_p$ компактен в пространстве $C_e(\mathbb{R})$ и любое решение U_0 уравнения (45) из этого пространства принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$.

Докажем, наконец, что уравнение (45) имеет единственное решение в пространстве $C_e(\mathbb{R})$. С этой целью покажем, что однородное уравнение

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \qquad (50)$$

имеет в пространстве $C_e(\mathbb{R})$ только нулевое решение.

Действительно, согласно теореме 3 уравнение (50) равносильно уравнению (5) с нулевой правой частью. Тогда в силу единственности решения задач E и N_0 при всех $(x,y) \in D^{+}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2\pi i\, y^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} \frac{F(t)}{\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{1-m/2}}\, dt = 0, \quad z = x + iy\,. \qquad (51)$$

Выберем теперь круг с центром в точке оси Ox, содержащийся в области D, и рассмотрим равенство (51) при (x,y) из пересечения указанного круга с областью D^{+}. Без ограничения общности считая, что $\Gamma_{z\bar{z}}$ является отрезком с началом в точке $\bar{z}$ и концом в точке z, и выполняя затем замену переменных $t = x + iy(1-2\tau)$, получаем равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{F(x+iy(1-2\tau))}{\big(\tau(1-\tau)\big)^{1-m/2}}\, d\tau = 0\,,$$

на основании которого и теоремы из работы [5], а также с учетом теоремы единственности аналитических функций [19, с. 68] заключаем, что функция F тождественно равна нулю.

Единственному решению $F(t) \equiv 0$ уравнения (5) с нулевой правой частью соответствует единственное решение $U_0(\xi) \equiv 0$ однородного уравнения (50). Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма уравнение (45) имеет единственное решение в пространстве $C_e(\mathbb{R})$ и доказательство завершено.

Следствием теорем 3, 4 является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 4. *Тогда решение задачи* E *при* $m \in [1,2)$ *или же решение задачи* N_0 *при* $m \in (0,1)$ *представляется формулой* (2)*, в которой* F *является единственным решением вспомогательной задачи для заданной граничной функции* $u_{\partial D}$ *и имеет вид* (14)*, где голоморфная функция* F_0 *выражается равенством* (13)*; при этом функция* U_p *имеет вид* (44)*, где* U_0 *является решением уравнения Фредгольма* (45) *в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$.

6. Доказательство теорем 1 и 2. Пусть действительнозначная функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C_2(D^+)$ при $m \in [1,2)$ или же классу $N_2(D^+)$ при $m \in (0,1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+. Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C}\colon |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma(Z)$, а через $D_{z,\rho}$ область, ограниченную кривой γ_ρ. Для каждой точки $(x,y) \in D^+$ рассмотрим ту кривую γ_ρ, которая содержит точку $z = x + iy$, и через $\Gamma_{z\bar{z}}$ обозначим одну из ее дуг с концами в точках z, $\bar{z}$.

Покажем, что существует единственная голоморфная в области D_z функция F, удовлетворяющая условию (4) и равенству (2) при всех $z \in \gamma_\rho\colon \operatorname{Im} z > 0$ и всех $\rho \in (0;1)$. Действительно, согласно теоремам 3, 4 существует единственная голоморфная в области $D_{z,\rho}$ функция F_ρ, удовлетворяющая равенству (2) при $F = F_\rho$ и условию вида (4) в области $D_{z,\rho}$. Заметим, что при этом в силу соотношения 3 выполняется также равенство $F_\rho(x) = 2\pi\, u(x,0)/\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ при всех $x \in D_{z,\rho} \cap \mathbb{R}$. С учетом последнего замечания становится очевидным, что функции F_ρ при различных значениях $\rho \in (0;1)$ являются сужением на область $D_{z,\rho}$ единственной функции F, голоморфной в области D_z.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

1. *Bateman H.* Partial differential equations of mathematical physics. – Dover Publ., 1944. – 522 p.
2. *Weinstein A.* Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1953. – **59**. – P. 20 – 38.
3. *Mackie A. G.* Contour integral solutions of a class of differential equations // J. Ration. Mech. and Anal. – 1955. – **4**, № 5. – P. 733 – 750.
4. *Henrici P.* On the domain of regularity of generalized axially symmetric potentials // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**, № 1. – P. 29 – 31.
5. *Кривенков Ю. П.* О некотором представлении решений уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Докл. АН СССР. – 1957. – **116**, № 3. – С. 351 – 354.
6. *Кривенков Ю. П.* Представление решений уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу через аналитические функции // Там же. – № 4. – С. 545 – 548.
7. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1973. – 423 с.
8. *Gilbert R. P.* Function theoretic methods in partial differential equations. – New York; London: Acad. Press, 1969. – 311 p.
9. *Раджабов Н.* Некоторые краевые задачи для уравнения осесимметрической теории поля // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. – Душанбе: АН ТаджССР. – 1965. – С. 79 – 128.
10. *Раджабов Н.* Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу на плоскости // Докл. АН ТаджССР. – 1974. – **17**, № 8. – С. 7 – 11.

11. *Плакса С. А.* Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1623 – 1640.
12. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Приложение аналитических функций к задачам обтекания осесимметричных тел идеальной жидкостью // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 22 – 29.
13. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представления и их обращение для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией // Докл. АН ТаджССР. – 1968. – **11**, № 4. – С. 14 – 18.
14. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 228 – 243.
15. *Положій Г. М.* Зауваження до основного інтегрального зображення p-аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k$ // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 7. – С. 839 – 841.
16. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 2. – С. 181 – 183.
17. *Кривенков Ю. П.* Задача D для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Исследование по механике и прикладной математике: Тр. МФТИ. – 1960. – № 5. – С. 134 – 145.
18. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
19. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
20. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 491 – 511.
21. *Плакса С. А.* Задача Дирихле для функции тока Стокса в односвязной области меридианной плоскости // Там же. – 2003. – **55**, № 2. – С. 197 – 231.

Получено 17.06.08