УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т,
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Р. О. Биличенко (Днепропетр. нац. ун-т)

АППРОКСИМАЦИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ОГРАНИЧЕННЫМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The best approximation of arbitrary power A^k of an unbounded self-adjoint operator A in the Hilbert space H on the class $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$, $k < r$, is found.

Знайдено найкраще наближення довільного степеня A^k необмеженого самоспряженого оператора A у гільбертовому просторі H на класі $\{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$, $k < r$.

Задача наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С. Б. Стечкина в 1965 году [1]. В его работе [2] приведены постановка задачи, первые принципиальные результаты и решение задачи для операторов дифференцирования малого порядка. Обзор дальнейших результатов по исследованию той или иной задачи и соответствующие ссылки можно найти в [3].

Общая постановка задачи наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами (см., например, [1 – 3], [4], § 7.1) такова.

Пусть X, Y — банаховы пространства; $A : X \to Y$ — некоторый оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D(A) \subset X$; $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$ — множество линейных ограниченных операторов T из X в Y, нормы которых $\|T\| = \|T\|_{X \to Y}$ не превышают числа $N > 0$; $Q \subset D(A)$ — некоторый класс элементов. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|Ax - Tx\|_Y : x \in Q\right\}$$

называется уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а величина

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{1}$$

— наилучшим приближением оператора A множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q.

Задача Стечкина наилучшего приближения оператора A на классе Q состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, т. е. оператора, реализующего нижнюю грань в правой части (1).

Задача Стечкина тесно связана с задачей отыскания модуля непрерывности оператора A на классе элементов Q, которая, по существу, является абстрактной версией задачи Колмогорова об оценках промежуточной производной. Модулем непрерывности $\omega(\delta)$ оператора A на классе Q называется функция вещественной переменной $\delta \in [0, \infty)$, которая определяется следующим образом:

$$\omega(\delta) = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in Q, \|x\|_X \le \delta\}. \tag{2}$$

Следующая теорема С. Б. Стечкина [2] дает эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения (1) оператора через его модуль непрерывности.

Теорема 1. *Если A — однородный (в частности, линейный) оператор, Q — центрально-симметричное, выпуклое множество из области определения оператора A, то выполняются неравенства*

$$E(N) \ge \sup_{\delta>0}\{\omega(\delta) - N\delta\}, \quad N \ge 0, \tag{3}$$

$$\omega(\delta) \le \inf_{N\ge 0}\{E(N) + N\delta\}, \quad \delta \ge 0. \tag{4}$$

Приведем известные результаты для оператора дифференцирования в пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$. Через $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство всех функций $x \in L_2(\mathbb{R})$, $(r-1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Через $W^r_{2,2}(\mathbb{R})$ обозначим множество $\left\{x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R}) : \left\|x^{(r)}\right\|_2 \le 1\right\}$.

Пусть $r, k \in \mathbb{N}, k < r$. Для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ известно неулучшаемое неравенство Харди – Литтлвуда – Полиа [5]:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \|x\|_2^{1-\frac{k}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^{\frac{k}{r}}, \tag{5}$$

из (5) следует оценка для модуля непрерывности оператора дифференцирования d^k/dx^k на классе $W^r_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$\omega(\delta) \le \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{6}$$

На самом деле в (6) имеет место равенство

$$\omega(\delta) = \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{7}$$

***Замечание* 1.** Доказательство соотношения (7) существенно опирается на тот факт, что вместе с любой функцией x пространство $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ содержит любую функцию вида $ax(bt)$, где $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$.

Наилучшее приближение оператора $A = d^k/dt^k$ на классе функций $Q = W^r_{2,2}$ найдено Ю. Н. Субботиным и Л. В. Тайковым [6]. Они доказали, что в этом случае

$$E(N) = \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, A — линейный, неограниченный, самосопряженный оператор в H, $D(A)$ — область его определения, k, r — натуральные числа $(k < r)$. Мы будем рассматривать задачу о вычислении модуля непрерывности и задачу аппроксимации ограниченными операторами для степеней A^k оператора A и класса $Q = WD(A^r) = \{x \in D(A^r): \|A^r x\| \le 1\}$.

Приведем некоторые сведения из спектральной теории самосопряженных операторов, которые можно найти, например, в [7] (§ 75, 88).

Разложением единицы называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов $E_t : H \to H$, заданное в конечном или бесконечном интервале $[\alpha, \beta]$ (если интервал $[\alpha, \beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается $E_{-\infty} = \lim\limits_{t \to -\infty} E_t$, $E_{\infty} = \lim\limits_{t \to \infty} E_t$, в смысле сильной сходимости) и удовлетворяющее следующим условиям:

а) $E_u E_v = E_s \; \forall u, v \in [\alpha, \beta]$, где $s = \min\{u, v\}$;

б) в смысле сильной сходимости

$$E_{t-0} = E_t, \quad \alpha < t < \beta;$$

в) $E_\alpha = 0$, $E_\beta = I$ (I — тождественный оператор: $Ix = x \; \forall x \in H$).

Полагаем $E_t = 0$ при $t \le \alpha$ и $E_t = I$ при $t \ge \beta$.

Из определения следует, что для любого $x \in H$ функция

$$\sigma(t) = (E_t x, x), \quad -\infty < t < \infty,$$

является непрерывной слева, неубывающей функцией ограниченной вариации, для которой

$$\sigma(\alpha) = 0, \qquad \sigma(\beta) = (x, x).$$

Согласно спектральной теореме каждому самосопряженному оператору A соответствует разложение единицы E_t, $t \in \mathbb{R}$, такое, что вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t x, x) < \infty,$$

и если $x \in D(A)$, то

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} t \, d E_t x.$$

При этом

$$\| Ax \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t x, x) < \infty.$$

Функцией $\varphi(A)$ *от оператора* A называется оператор, определяемый формулой

$$\varphi(A)x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \, d E_t x$$

на всех тех векторах $x \in H$, для которых выполнено соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 \, d(E_t x, x) < \infty.$$

При этом

$$\|\varphi(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 \, d(E_t x, x).$$

В частности, для $x \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k x = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, dE_t x$$

и

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \, d(E_t x, x).$$

Следующая теорема дает аналог равенства (7) для самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H.

Теорема 2. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и A — неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности оператора A^k на классе $Q = WD(A^r)$. Тогда*

$$\omega(\delta) \le \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{8}$$

Если оператор A таков, что

$$(E_t - E_s)\, D\left(A^{2r}\right) \ne \{\theta\}, \quad 0 \le s < t \le \infty, \tag{9}$$

то

$$\omega(\delta) = \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{10}$$

***Замечание* 2.** Выполнение для оператора A условия (9) заменяет в общем случае отмеченное в замечании 1 свойство пространств $L_{2,2}^r$.

Доказательство. Для любого $x \in D(A^r)$ имеет место неравенство (см., например, [4], § 5.1)

$$\left\|A^k x\right\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \left\|A^r x\right\|^{\frac{k}{r}}.$$

Отсюда для $x \in WD(A^r)$ такого, что $\|x\| = \delta$, получаем

$$\left\|A^k x\right\| \le \delta^{1-\frac{k}{r}},$$

так что

$$\omega(\delta) \le \delta^{1-\frac{k}{r}}$$

и (8) доказано.

Теперь докажем, что при выполнении условия (9)

$$\omega(\delta) \ge \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

Пусть $\delta > 0$ задано. Для этого δ и произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $t = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{r}}$ и $s = (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{r}}$.

Выберем элемент $x \in (E_t - E_s)\, D\left(A^{2r}\right)$ такой, что $\|x\| = \delta$. Выбранный элемент x принадлежит классу $WD\left(A^r\right)$. Действительно,

$$\left\|A^r x\right\|^2 = \left(A^r x, A^r x\right) = \left(A^{2r} x, x\right) = \int_s^t u^{2r}\, d(E_u x, x) \le t^{2r}\|x\|^2 \le 1.$$

Для выбранного x будем также иметь

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \left(A^k x, A^k x\right) = \left(A^{2k} x, x\right) = \int_s^t u^{2k}\, d(E_u x, x).$$

Поскольку $x \in (E_t - E_s)\, D\left(A^{2r}\right)$, то

$$\|x\|^2 = \int_s^t d(E_u x, x).$$

Следовательно,

$$\left\|A^k x\right\|^2 \ge s^{2k}\|x\|^2 = (1-\varepsilon)^{2k}\, \delta^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in WD\left(A^r\right)$, $\|x\| = \delta$, такой, что

$$\left\|A^k x\right\| \ge (1-\varepsilon)^k\, \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

В силу произвольности ε получим

$$\left\|A^k x\right\| \ge \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

Отсюда и из (8) следует (10).

Теорема доказана.

Следующая теорема дает решение задачи Стечкина о приближении оператора A^k ограниченными операторами на классе $WD\left(A^r\right)$.

Теорема 3. *Пусть* $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, *и* A — *неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любого* $N > 0$

$$E(N) \le \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}. \tag{11}$$

Если оператор A *таков, что выполнено условие* (9), *то для любого* $N > 0$

$$E(N) = \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}. \tag{12}$$

При этом экстремальным аппроксимирующим оператором из $\mathcal{L}(N)$ *является функция* $\varphi_N(A)$ *от оператора* A, *где*

$$\varphi_N(t) = \begin{cases} t^k - \operatorname{sign}\left\{t^{r-k}\right\} t^r\, \dfrac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}, & |t| \le N^{\frac{1}{k}} \left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{1}{k-r}} \left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-\frac{1}{k}}, \\ 0, & |t| \ge N^{\frac{1}{k}} \left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{1}{k-r}} \left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-\frac{1}{k}}. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений из работы [6]. В качестве аппроксимирующего оператора T рассмотрим функцию от оператора $\varphi_N(A)$, где функция φ_N определена равенством (13).

Сначала проверим, что $\varphi_N(A) \in \mathcal{L}(N)$. Имеем

$$\|\varphi_N(A)x\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(t)|^2 \, d(E_t x, x) \leq$$

$$\leq \max_t |\varphi_N(t)|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d(E_t x, x) = \max_t |\varphi_N(t)|^2 \|x\|^2.$$

Поскольку

$$\max_t |\varphi_N(t)|^2 = N^2,$$

то

$$\|\varphi_N(A)x\|^2 \leq N^2 \|x\|^2,$$

т. е. $\|\varphi_N(A)\| \leq N$.

Теперь рассмотрим $\left\|A^k x - \varphi_N(A)x\right\|$ для $x \in WD\left(A^r\right)$. Будем иметь

$$\left\|A^k x - \varphi_N(A)x\right\| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(t^k - \varphi_N(t)\right) dE_t x \right\| =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(t^k - \varphi_N(t)\right)^2 d(E_t x, x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \max_t \left| \frac{t^k - \varphi_N(t)}{t^r} \right| \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2r} \, d(E_t x, x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Равенство

$$\max_t \left| \frac{t^k - \varphi_N(t)}{t^r} \right| = \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}$$

проверяется непосредственным вычислением. Кроме того, для $x \in WD\left(A^r\right)$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2r} \, d(E_t x, x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Таким образом, для $x \in WD\left(A^r\right)$

$$\left\|A^k x - \varphi_N(A)x\right\| \leq \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}},$$

и, следовательно,

$$E(N) \;\le\; \sup_{x\in Q}\left\| A^k x - \varphi_N(A)x \right\| \;\le\; \frac{\dfrac{k}{r}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Соотношение (11) доказано.

Если выполнено условие (9), то по теореме 2

$$\omega(\delta) \;=\; \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

Следовательно, в силу теоремы 1

$$E(N) \;\ge\; \sup_{\delta>0}\left\{\delta^{1-\frac{k}{r}} - N\delta\right\} \;=\; \frac{\dfrac{k}{r}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Отсюда и из неравенства (11) получаем (12).

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим оператор дифференцирования $A:\; L_2(\mathbb{R}) \to \to L_2(\mathbb{R}),\;\; Ax(u) = i\dfrac{dx}{du}$. Данному оператору соответствует разложение единицы E_t такое, что для любых $s, t,\; s<t$ (см., например, [7], § 89)

$$(E_t - E_s)\,x(u) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-u)} - e^{is(z-u)}}{i(z-u)}\,x(z)\,dz.$$

Очевидно, что данный оператор A удовлетворяет условию (9). Это приводит нас к результату Ю. Н. Субботина и Л. В. Тайкова [6].

Другой важный пример дает оператор умножения на независимую переменную: $A:\; L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),\;\; Ax(u) = ux(u)$. Этому оператору соответствует разложение единицы такое, что для любых $s, t,\; s<t$ (см., например, [7], § 89)

$$(E_t - E_s)\,x(u) \;=\; \mathcal{X}_{[s,t]}\,x(u),$$

где $\mathcal{X}_{[s,t]}$ — характеристическая функция отрезка $[s, t]$.

Очевидно, что этот оператор также удовлетворяет условию теоремы 2 и, следовательно, для него имеет место (12).

1. *Стечкин С. Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. – 1965. – **26**, № 3 – 4. – С. 225 – 230.
2. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 231 – 244.
3. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.
4. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
5. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Комкнига, 2006. – 456 с.
6. *Субботин Ю. Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 2. – С. 157 – 164.
7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

Получено 28.05.08