УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ СПРЯЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ЇХ ІНТЕГРАЛАМИ АБЕЛЯ – ПУАССОНА*

We obtain the exact values of upper bounds of approximations on the classes of periodic conjugate differentiable functions by their Abel – Poisson integrals in the uniform metric and integral metric.

Получены точные значения верхних граней приближений на классах периодических сопряженных дифференцируемых функций их интегралами Абеля – Пуассона в равномерной и интегральной метриках.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності

$$\| f \|_C = \max_t | f(t) |,$$

L_∞ — простір 2π-періодичних неперервних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою

$$\| f \|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t | f(t) |,$$

L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, де норма задана таким чином:

$$\| f \|_L = \| f \|_1 = \int_0^{2\pi} | f(t) | dt.$$

Через W_p^r ($p = 1$ та $p = \infty$) позначимо множину 2π-періодичних функцій f, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\left\| f^{(r)} \right\|_p \le 1$, $p = 1, \infty$; через $\overline{W}_p^r$ — клас функцій, спряжених до функцій із класу W_p^r, тобто

$$\overline{W}_p^r = \left\{ \bar{f} \colon \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt,\ f \in W_p^r \right\}. \tag{1}$$

Нехай далі $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ позначає множину функцій натурального аргументу, залежну від параметра δ, який змінюється на деякій множині $E_\Lambda \subseteq R$, що має принаймні одну граничну точку і, крім того, $\lambda_\delta(0) = 1 \ \ \forall \delta \in E_\Lambda$. Зауважимо, що у випадку, коли $\delta \in N$, числа $\lambda_\delta(k) =: \lambda_{n,k}$ є елементами нескінченної прямокутної матриці $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots$; $\lambda_{n,0} = 1$, $n \in N \cup \{0\}$. За допомогою множини $\{\lambda_\delta(k)\}$ кожній функції $f(x)$ поставимо у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2} \lambda_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \quad \delta \in E_\Lambda,$$

де a_0, a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f. Якщо цей ряд при кожному

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант Ф25.1/043).

$\lambda_\delta \in \Lambda$, $\delta \in E_\Lambda$, є рядом Фур'є деякої неперервної функції, то будемо її позначати через $U_\delta(f; x; \Lambda)$, а у випадку, коли $\delta \in N \cup \{0\}$, — через $U_n(f; x; \Lambda)$.

За умови, що послідовність $\{\lambda_\delta(k)\}_{k=\overline{0,\infty}}$ є такою, що ряд

$$K_\delta(t; \Lambda) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \cos kt \tag{2}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, аналогічно до [1, с. 46] можна показати правильність рівності

$$U_\delta(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, K_\delta(t; \Lambda)\, dt. \tag{3}$$

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини

$$\mathscr{E}\big(\mathfrak{N}; U_\delta(f, \Lambda)\big)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(x) - U_\delta(f; x; \Lambda) \|_X, \tag{4}$$

де X — нормований простір, $\mathfrak{N} \subseteq X$ — заданий клас функцій, $U_\delta(f; x; \Lambda)$, $\delta \in E_\Lambda$, — оператори, породжені конкретним методом $U_\delta(f, \Lambda)$ підсумовування рядів Фур'є, будемо називати, наслідуючи О. І. Степанця [2, с. 198], задачею Колмогорова – Нікольського. Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; U_\delta(f, \Lambda); \delta)$ таку, що при $\delta \to \delta_0$ (де δ_0 — гранична точка множини E_Λ)

$$\mathscr{E}\big(\mathfrak{N}; U_\delta(f, \Lambda)\big)_X = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то кажуть, що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ і методу $U_\delta(f, \Lambda)$.

С. М. Нікольським [3] було встановлено існування тісного взаємозв'язку між величинами $\mathscr{E}\big(W_1^r; U_n(\Lambda)\big)_1$ і $\mathscr{E}\big(W_\infty^r; U_n(\Lambda)\big)_C$ у випадку, коли $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$, $n = 0, 1, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots, n$, — довільна нескінченна трикутна матриця. Дослідження С. М. Нікольського було продовжено в роботі С. Б. Стєчкіна та С. О. Теляковського [4]. Найбільш повні результати для трикутних Λ-методів підсумовування рядів Фур'є отримав В. П. Моторний у роботі [5].

Що ж стосується операторів, що породжуються Λ-методами, які означені за допомогою сукупності $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ неперервних на $[0, \infty)$ функцій, залежних від дійсного параметра δ, то в цьому зв'язку слід згадати результати P. Pych [7], а саме, наступні леми.

Лема 1. *Якщо функція*

$$Q(t; \delta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda_\delta(k)}{k} \sin kt$$

перетворюється в нуль лише в точках $t = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *для будь-яких* $\delta \in E_\Lambda$, *то для довільних цілих* $r \geq 1$ *виконується рівність*

$$\mathscr{E}\big(W_\infty^r; U_\delta(\Lambda)\big)_C = \mathscr{E}\big(W_1^r; U_\delta(\Lambda)\big)_1.$$

Лема 2. *Якщо функція*

$$\overline{Q}(t; \delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda_\delta(k)}{k} \cos kt$$

має не більше одного кореня в інтервалі $(0, \pi]$, *то для цілих* $r \geq 2$ *має місце рівність*

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}_\infty^r; U_\delta(\Lambda)\right)_C = \mathscr{E}\left(\overline{W}_1^r; U_\delta(\Lambda)\right)_1.$$

Якщо у співвідношенні (2) покласти $\lambda_\delta(k) = e^{-k/\delta}$, $\delta > 0$, то оператори типу (3) називатимемо інтегралами Абеля – Пуассона і позначатимемо $P_\delta(f, x)$, тобто

$$P_\delta(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/\delta}\cos kt\right)dt. \tag{5}$$

Відповідно $\overline{P}_\delta(f, x)$ — спряжений інтеграл Абеля – Пуассона, тобто

$$\overline{P}_\delta(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/\delta}\sin kt\,dt. \tag{6}$$

Величини типу (4) у випадку $U_\delta(f; x; \Lambda) = P_\delta(f, x)$, $\mathfrak{R} = W_\infty^r$ або $\mathfrak{R} = \overline{W}_\infty^r$ у рівномірній метриці вивчались у роботах [8 – 18].

Метою даної роботи є знаходження при кожному $\delta > 0$ точних значень для величин

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}_\infty^r; P_\delta\right)_C = \sup_{f\in\overline{W}_\infty^r} \| f(x) - P_\delta(f, x)\|_C, \tag{7}$$

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}_1^r; P_\delta\right)_1 = \sup_{f\in\overline{W}_1^r} \| f(x) - P_\delta(f, x)\|_1. \tag{8}$$

Зазначимо, що з роботи [10] для величин (7) при $r = 1$ для всіх $\delta > 0$ випливає рівність

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}_\infty^1; P_\delta\right)_C = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/\delta} \operatorname{arctg} e^{-t}\,dt.$$

Через K_n і $\tilde{K}_n$, як це прийнято, ми в подальшому будемо позначати відомі константи Ж. Фавара – Н. І. Ахієзера – М. Г. Крейна з теорії найкращих наближень:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n \in N.$$

Теорема 1. *Якщо* $r = 2l$, $l \in N$, *то при кожному* $\delta > 0$ *мають місце рівності*

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}_\infty^r; P_\delta\right)_C = \mathscr{E}\left(\overline{W}_1^r; P_\delta\right)_1 = \sum_{i=1}^{r/2}\frac{1}{(2i-1)!}K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}} -$$

$$-\sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}} - \alpha_\delta^{(r)}, \tag{9}$$

де

$$\alpha_\delta^{(r)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/\delta}\int_0^{t_n}\ldots\int_0^{t_2}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n.$$

Доведення. Покажемо спочатку справедливість теореми для випадку рівномірної метрики. Враховуючи (1) і (6), маємо

$$\bar{f}(x) - P_\delta(\bar{f}, x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/\delta}\sin kt\right)dt.$$

Звідси в результаті r-кратного інтегрування частинами отримуємо

$$\bar{f}(x) - P_\delta(\bar{f}, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t+x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e^{-k/\delta}}{k^r}\cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right)dt.$$

Тому

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; P_\delta\right)_C = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W_\infty^r}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\,\overline{F}_{r,\delta}(t)\,dt\right|,$$

де

$$\overline{F}_{r,\delta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e^{-k/\delta}}{k^r}\cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right).$$

Оскільки $f \in W_\infty^r$ і $\overline{F}_{r,\delta}(t)$ є непарною при $r = 2l$, $l \in N$, то

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; P_\delta\right)_C \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\overline{F}_{r,\delta}(t)\right|dt.$$

З іншого боку, якщо $\operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r,\delta}(t)\right) = \pm\operatorname{sign}\sin t$, то функція f така, що $f^{(r)}(t) = \operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r,\delta}(t)\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$, неперервно і періодично продовжується на R і належить до класу W_∞^r [6, с. 104 – 106]. Отже, при $r = 2l$, $l \in N$,

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; P_\delta\right)_C \ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\overline{F}_{r,\delta}(t)\right|dt$$

і, таким чином,

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; P_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\overline{F}_{r,\delta}(t)\right|dt = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\overline{F}_{r,\delta}(t)\,dt\right|. \tag{10}$$

Рівність $\operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r,\delta}(t)\right) = \pm\operatorname{sign}\sin t$ при $r = 2l$, $l \in N$, $t \in [-\pi, \pi]$ випливає із наступних міркувань.

Очевидно, що при $r = 2l$, $l \in N$, маємо $\overline{F}_{r,\delta}(0) = \overline{F}_{r,\delta}(\pi) = 0$. Отже, у припущенні, що $\overline{F}_{r,\delta}(t) = 0$ ще при деякому $t_0 \in (0, \pi)$, застосовуючи $r - 1$ раз теорему Ролля, приходимо до висновку, що для функції $\overline{F}_{1,\delta}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e^{-k/\delta}}{k}\cos kt$ існують $t_{r-1}^{(1)}, t_{r-1}^{(2)} \in (0, \pi)$, $t_{r-1}^{(1)} \ne t_{r-1}^{(2)}$ такі, що

$$\overline{F}_{1,\delta}\left(t_{r-1}^{(1)}\right) = \overline{F}_{1,\delta}\left(t_{r-1}^{(2)}\right) = 0.$$

Але це суперечить тому, що згідно зі співвідношеннями (1.441.2) і (1.448.2) з роботи [19] функцію $\overline{F}_{1,\delta}(t)$ можна подати у вигляді

$$\overline{F}_{1,\delta}(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{2(1-\cos t)}{1-2e^{-1/\delta}\cos t + e^{-2/\delta}}, \quad t \in (0, \pi),$$

і легко перевірити, що на інтервалі $(0, \pi)$ рівняння $\overline{F}_{1,\delta}(t) = 0$ має лише один корінь.

Таким чином, виходячи із співвідношення (10), при $r = 2l$, $l \in N$, $\delta > 0$ одержуємо

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}_{\infty}^{r}, P_{\delta}\right)_{C} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Введемо до розгляду функцію, визначену на $[0, \infty)$:

$$\varphi_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Дана функція допускає зображення

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1\ldots dt_n,$$

зокрема

$$\varphi_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1.$$

Дійсно, оскільки

$$\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1},$$

то маємо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1}\,dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1}\,dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)t_2}}{(2k+1)^2}\,dt_2\ldots dt_{n-1}\,dt_n = \ldots$$

$$\ldots = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)t_n}}{(2k+1)^n}\,dt_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}} = \varphi_n(x).$$

Виконаємо деякі перетворення функції $\varphi_n(x)$, $n > 1$:

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{\infty}\int_{t_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1\ldots dt_n -$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{t_n}\int_{t_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \varphi_{n-1}(0)\int\limits_0^{1/x} dt_n - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_n}\int\limits_{t_{n-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_2}^{\infty}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1\ldots dt_{n-1}\,dt_n,$$

після чого за рекурентними співвідношеннями

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(0)\int\limits_0^{1/x} dt - \int\limits_0^{1/x}\varphi_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

отримаємо

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(0)\int\limits_0^{1/x} dt_1 - \int\limits_0^{1/x}\varphi_{n-1}\left(\frac{1}{t_1}\right)dt_1 =$$

$$= \varphi_{n-1}(0)\int\limits_0^{1/x} dt_1 - \varphi_{n-2}(0)\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_1}dt_1\,dt_2 + \int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_1}\varphi_{n-2}\left(\frac{1}{t_2}\right)dt_1\,dt_2 = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\varphi_{n-k}(0)\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{k-1}}dt_1\ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{n-2}}\varphi_1\left(\frac{1}{t_{n-1}}\right)dt_1\ldots dt_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\varphi_{n-k}(0)\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{k-1}}dt_1\ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1\ldots dt_{n-1}\,dt_n.$$

Тобто

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{n-k}(0)\frac{1}{x^k} + (-1)^{n-1}\alpha_x^{(n)}, \qquad (11)$$

де

$$\varphi_n(0) = \begin{cases} K_n, & n = 2l-1, \\ \tilde{K}_n, & n = 2l, \end{cases} \qquad l \in N.$$

При $r = 2l,\ l \in N$, маємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty, P_\delta\right)_C = \varphi_r(\delta) = \sum_{k=1}^{r-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{r-k}(0)\frac{1}{\delta^k} - \alpha_\delta^{(r)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r/2}\frac{1}{(2i-1)!}K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \sum_{i=1}^{(r-2)/2}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}} - \alpha_\delta^{(r)}.$$

Таким чином, рівність (9) для випадку рівномірної метрики виконується. Справедливість співвідношення (9) при $p = 1$ випливає з леми 2 з урахуванням того, що функція $\overline{Q}(t;\delta) = -\overline{F}_{1,\delta}(t)$ має лише один корінь на проміжку $(0, \pi]$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $r = 2l + 1,\ \ l \in N$, *то при кожному* $\delta > 0$ *мають місце рівності*

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_{\infty}^{r}, P_{\delta}\right)_{C} = \mathcal{E}\left(\overline{W}_{1}^{r}, P_{\delta}\right)_{1} = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i-1)!} K_{r-2i+1} \frac{1}{\delta^{2i-1}} -$$

$$- \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i)!} \tilde{K}_{r-2i} \frac{1}{\delta^{2i}} + \beta_{\delta}^{(r)}, \qquad (12)$$

де

$$\beta_{\delta}^{(r)} = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{1/\delta} \int_{0}^{t_r} \ldots \int_{0}^{t_2} \operatorname{arctg} e^{-t_1}\, dt_1 \ldots dt_r .$$

Доведення. Покажемо, що співвідношення (12) має місце у випадку рівномірної метрики. Враховуючи, що $\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\,dt = 0$, одержуємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_{\infty}^{r}, P_{\delta}\right)_{C} = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W_{\infty}^{r}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\, \overline{F}_{r,\delta}(t)\, dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W_{\infty}^{r}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \left(\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) dt \right| .$$

Оскільки $f \in W_{\infty}^{r}$, $\overline{F}_{r,\delta}(t)$ є парною при $r = 2l + 1$, $l \in N$, то

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_{\infty}^{r}, P_{\delta}\right)_{C} \le \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| dt .$$

З іншого боку, якщо $\operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \pm \operatorname{sign} \cos t$, то функція f така, що $f^{(r)}(t) = \operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$, $t \in [-\pi, \pi]$, неперервно і періодично продовжується на R і належить до класу W_{∞}^{r} [6, с. 187, 188]. Отже, при $r = 2l + 1$, $l \in N$,

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_{\infty}^{r}, P_{\delta}\right)_{C} \ge \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| dt$$

і, таким чином,

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_{\infty}^{r}, P_{\delta}\right)_{C} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_{0}^{\pi/2} \left(\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) dt - \int_{0}^{\pi/2} \left(\overline{F}_{r,\delta}(\pi - t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) dt \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_{0}^{\pi/2} \left(\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}(\pi - t) \right) dt \right| . \qquad (13)$$

Рівність $\operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \pm \operatorname{sign} \cos t$ випливає із наступних міркувань.

У припущенні, що $\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $r = 2l + 1$, $l \in N$, при деякому $t_0 \in (0, \pi)$, $t_0 \ne \frac{\pi}{2}$, згідно з теоремою Ролля існує $t_1 \in (0, \pi)$ таке, що $\overline{F}'_{r,\delta}(t_1) = 0$, звідки $\overline{F}_{r-1,\delta}(t_1) = 0$. Але це суперечить тому, що $\operatorname{sign}\left(\overline{F}_{r-1,\delta}(t)\right) = \pm\operatorname{sign}\sin t$ при $r = 2l+1$, $l \in N$. Отже, $t = \dfrac{\pi}{2}$ — єдиний розв'язок рівняння $\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ на проміжку $[0,\pi]$. І оскільки $\operatorname{sign}\left(\overline{F}'_{r,\delta}(t)\right) = \pm\operatorname{sign}\sin t$ при $r = 2l+1$, $l \in N$, то функція $\overline{F}_{r,\delta}(t) - \overline{F}_{r,\delta}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ є монотонною на $(0,\pi)$.

Отже, виходячи із співвідношення (13), при $r = 2l+1$, $l \in N$, одержуємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty, P_\delta\right)_C = \frac{4}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^r}\cos(2k+1)t\,dt\right|.$$

Таким чином, при $r = 2l+1$, $l \in N$, $\delta > 0$ маємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty, P_\delta\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Введемо до розгляду функцію, що визначена на $[0,\infty)$:

$$\psi_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Функція $\psi_n(x)$ допускає зображення

$$\psi_n(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1\ldots dt_n,$$

зокрема

$$\psi_1(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1.$$

Дійсно, оскільки

$$\operatorname{arctg}e^{-t_1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1},$$

то

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}\,dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1}\,dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}\,dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t_2}}{(2k+1)^2}\,dt_2\ldots dt_{n-1}\,dt_n = \ldots$$

$$\ldots = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)t_n}}{(2k+1)^n}\,dt_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}} = \psi_n(x).$$

Виконаємо деякі перетворення функції $\psi_n(x)$, $n > 1$:

$$\psi_n(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{\infty}\int_{t_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1\ldots dt_n -$$

$$- \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{t_n}\int_{t_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \psi_{n-1}(0)\int_0^{1/x}dt - \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{t_n}\int_{t_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1\ldots dt_n.$$

Далі, скориставшись рекурентними співвідношеннями

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(0)\int_0^{1/x}dt - \int_0^{1/x}\psi_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right)dt,$$

отримаємо

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(0)\int_0^{1/x}dt_1 - \int_0^{1/x}\psi_{n-1}\left(\frac{1}{t_1}\right)dt_1 =$$

$$= \psi_{n-1}(0)\int_0^{1/x}dt_1 - \psi_{n-2}(0)\int_0^{1/x}\int_0^{t_1}dt_1\,dt_2 + \int_0^{1/x}\int_0^{t_1}\psi_{n-2}\left(\frac{1}{t_2}\right)dt_1\,dt_2 = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\,\psi_{n-k}(0)\int_0^{1/x}\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{k-1}}dt_1\ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{2}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{n-2}}\psi_1\left(\frac{1}{t_{n-1}}\right)dt_1\ldots dt_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\,\psi_{n-k}(0)\int_0^{1/x}\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{k-1}}dt_1\ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_0^{t_n}\ldots\int_0^{t_2}\operatorname{arctg}e^{-t_1}\,dt_1\ldots dt_{n-1}\,dt_n.$$

Тобто

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\psi_{n-k}(0)\,\frac{1}{x^k} + (-1)^{n-1}\,\beta_x^{(n)},$$

де

$$\psi_n(0) = \begin{cases} K_n, & n = 2l, \\ \tilde{K}_n, & n = 2l+1, \end{cases} \qquad l \in N.$$

Отже, при $r = 2l + 1$, $l \in N$, отримаємо

$$\mathcal{E}\big(\overline{W}^r_\infty, P_\delta\big)_C = \psi_r(\delta) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\psi_{r-k}(0)\,\frac{1}{\delta^k} + \beta_\delta^{(r)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i-1)!}\,K_{r-2i+1}\,\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i)!}\,\tilde{K}_{r-2i}\,\frac{1}{\delta^{2i}} + \beta_\delta^{(r)}.$$

Таким чином, рівність (12) у випадку рівномірної метрики виконується. При $p = 1$ справедливість співвідношення (12) випливає з леми 2.

Теорему 2 доведено.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 6. – С. 207 – 256.
4. *Стечкин С. Б., Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 20 – 29.
5. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 1. – С. 15 – 26.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
7. *Pych P.* Approximation of functions in L- and C-metrics // Ann. Soc. Math. Pol. – 1967. – **1**, № 11. – P. 61 – 76.
8. *Натансон И. П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**. – С. 11 – 14.
9. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **74**. – С. 17 – 20.
10. *Nagy B. Sz.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta math. Acad. sci. hung. – 1950. – **1**. – P. 183 – 188.
11. *Малей Л. В.* Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона // Докл. АН БССР. Сер. физ.-тех. – 1961. – № 3. – С. 25 – 32.
12. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
13. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 1. – С. 21 – 28.
14. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона // Там же. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169 – 180.
15. *Баскаков В. А.* Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля – Пуассона // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калинин, 1975. – Вып. 5. – С. 14 – 20.
16. *Фалалеев Л. П.* Приближение сопряженных функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 2000. – **67**, № 4. – С. 595 – 602.
17. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 926 – 936.
18. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 43 – 52.
19. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100 с.

Одержано 15.06.07,
після доопрацювання — 21.03.08