УДК 517.5

Е. Ю. Леончик (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА МАКЕНХАУПТА A_1

An exact estimate is obtained for a nonincreasing equimeasurable rearrangement of a function of two variables from the Muckenhoupt class A_1.

Одержано точну оцінку незростаючої рівномірної перестановки функції двох змінних із класу Макенхаупта A_1.

Пусть положительная суммируемая функция двух переменных f отделена от нуля на квадрате Q_0, т. е. $\operatorname{ess\,inf}_{x\in Q_0} f(x) > 0$. Здесь и в дальнейшем рассматриваются только такие квадраты, стороны которых параллельны координатным осям. Говорят, что f удовлетворяет условию Макенхаупта A_1 при некотором $C > 1$ $\left(f \in A_1(C)\right)$, если для всех подквадратов $Q \subset Q_0$ выполнено неравенство [1]

$$f_Q \equiv \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy \le C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} f(x), \tag{1}$$

где через $|\cdot|$ обозначена мера Лебега. Данное условие на вес, в частности, является необходимым и достаточным для принадлежности ряда операторов слабому весовому пространству L_1 (см., например, [1, 2]).

Наряду с классическим условием Макенхаупта рассматривается и его модификация, когда выполнение неравенства (1) требуется на всех прямоугольниках из Q_0, а не только на квадратах (см., например, [3, с. 145; 4]). В этом случае будем писать $f \in A_1'$. Ясно, что $A_1'(C) \subset A_1(C)$.

Невозрастающая перестановка f^*, равноизмеримая с функцией f, может быть определена равенством [5, с. 332]

$$\left|\left\{x \in Q_0 : f(x) > \lambda\right\}\right| = \left|\left\{t \in \left[0; |Q_0|\right] : f^*(t) > \lambda\right\}\right|, \quad \lambda > 0.$$

Для изучения свойств некоторых классов функций большое значение имеют оценки перестановок функций из этих классов (см., например, [4, 6 – 8]).

Известно, что для равноизмеримой перестановки функции $f \in A_1(C)$ также выполнено условие Макенхаупта, но с некоторой, вообще говоря, другой постоянной. Используя лемму Кальдерона – Зигмунда о покрытии [9] и метод доказательства из [4], можно гарантировать, что $f^* \in A_1(4C)$. Значение постоянной 4 обусловлено применением этой леммы. В работе [6] в одномерном случае установлено, что условие $f \in A_1(C)$ влечет $f^* \in A_1(C)$. Заметим, что для классов A_1' аналогичный результат имеет место и в многомерном случае [4]. Для функций одной переменной при доказательстве использовалась модификация леммы Кальдерона – Зигмунда, так называемая лемма Рисса „о восходящем солнце”, а для случая функций нескольких переменных применялся ее вариант по многомерным сегментам [10].

С другой стороны, в [6] построен пример, показывающий, что для любого $B < 2C$ найдется такая функция двух переменных $f_0 \in A_1(C)$, для которой

$f_0^* \notin A_1(B)$. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция двух переменных* f *принадлежит* $A_1(C)$. *Тогда* f^* *принадлежит* $A_1(2C)$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \geq \operatorname{ess\,inf}_{x\in Q_0} f(x)$ и обозначим $E_\lambda \equiv \equiv \{x \in Q_0 : f(x) > \lambda\}$. Теорему легко получить из неравенства

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} f_{E_\lambda} \leq C\lambda. \tag{2}$$

Если $\alpha \leq f_{Q_0}$, то это неравенство непосредственно следует из условия $f \in \in A_1(C)$.

Для доказательства (2) при $\alpha > f_{Q_0}$ заметим, что в этом случае $|E_\lambda| < < \frac{1}{2}|Q_0|$. Разобьем квадрат Q_0 на четыре подквадрата $\{Q_k^1\}_{k=1}^4$, разделив каждую сторону на две равные части. Возможны два варианта:

i) $f_{Q_k^1} \geq 2\alpha$ при некотором k (возможно, не единственном);

ii) $f_{Q_k^1} < 2\alpha$ для всех k.

Пусть в случае i) для определенности $k = 1$. Тогда

$$f_{\sqrt{2}Q_1^1} \geq \frac{1}{\left|\sqrt{2}Q_1^1\right|} \int_{Q_1^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} f_{Q_1^1} \geq \alpha,$$

где через $\sqrt{2}Q_1^1$ обозначен такой квадрат, что $Q_1^1 \subset \sqrt{2}Q_1^1 \subset Q_0$ и $\left|\sqrt{2}Q_1^1\right| = 2\left|Q_1^1\right|$. Поскольку $\left|\sqrt{2}Q_1^1\right| = \frac{1}{2}|Q_0| > |E_\lambda|$, то $\left|\sqrt{2}Q_1^1 \setminus E_\lambda\right| > 0$ и, значит, $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\sqrt{2}Q_1^1} f(x) \leq \lambda$. Отсюда

$$\alpha \leq f_{\sqrt{2}Q_1^1} \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x\in\sqrt{2}Q_1^1} f(x) \leq C\lambda. \tag{3}$$

В случае ii) применим так называемую технику моментов остановок (см., например, [11, с. 232]). Если $f_{Q_k^1} \geq \alpha$, то такой квадрат поместим в совокупность, которую обозначим $\{S_i\}$. В случае $f_{Q_k^1} < \alpha$ снова рассмотрим два варианта:

а) если $\left|E_\lambda \cap Q_k^1\right| \geq \frac{1}{2}\left|Q_k^1\right|$, то откладываем такой квадрат в совокупность $\{R_i\}$ и для него находим

$$\frac{1}{\left|E_\lambda \cap Q_k^1\right|} \int_{E_\lambda \cap Q_k^1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{\left|E_\lambda \cap Q_k^1\right|} \int_{Q_k^1} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{\left|Q_k^1\right|}{\left|E_\lambda \cap Q_k^1\right|} f_{Q_k^1} < 2\alpha; \tag{4}$$

б) если $\left|E_\lambda \cap Q_k^1\right| < \frac{1}{2}\left|Q_k^1\right|$, то квадрат Q_k^1 делим на четыре подквадрата $\{Q_k^2\}_{k=1}^4$ подобно тому, как был поделен Q_0; далее повторяем рассмотренную выше схему с зафиксированным ранее $\alpha = \frac{1}{2} f_{E_\lambda}$, заменяя квадрат Q_0 на Q_k^1, а множество E_λ на $E_\lambda \cap Q_k^1$.

В случае i), когда $f_{Q_k^2} \geq 2\alpha$ при некотором k, имеем

$$f_{\sqrt{2}Q_k^2} \geq \frac{1}{\left|\sqrt{2}Q_k^2\right|} \int_{Q_k^2} f(x)\,dx = \frac{1}{2} f_{Q_k^2} \geq \alpha.$$

Кроме того, $\left|\sqrt{2}Q_k^2\right| = \frac{1}{2}\left|Q_k^1\right| > \left|E_\lambda \cap Q_k^1\right|$, и, следовательно, $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \sqrt{2}Q_k^2} f(x) \leq \lambda$. Отсюда аналогично (3) получаем (2).

В случае ii), если $f_{Q_k^2} < 2\alpha$ для всех k, то либо помещаем соответствующий квадрат в совокупность $\{S_i\}$ или $\{R_i\}$, либо снова разбиваем его на четыре подквадрата.

Продолжая этот процесс деления и откладывания квадратов, или на каком-либо шаге приходим к случаю i) и тогда имеем (2), или получаем две совокупности квадратов $\{S_i\}$ и $\{R_i\}$ с такими свойствами:

1) внутренности квадратов из $\{S_i\}$ и $\{R_i\}$ попарно не пересекаются, так как помещенный в совокупность квадрат в дальнейшем не разбивался;

2) для всех S_i справедливо $\alpha \leq f_{S_i} < 2\alpha$;

3) для всех R_i выполнено (4);

4) $f(x) \leq \alpha$ для почти всех $x \in Q_0 \setminus (S \cup R)$, где $S = \bigcup_i S_i$ и $R = \bigcup_i R_i$; это непосредственно следует из теоремы Лебега о дифференцировании интегралов (см., например, [12]), поскольку каждый такой x содержится в стягивающей последовательности вложенных квадратов со средним значением не более чем α.

Теперь докажем, что среди $\{S_i\}$ найдется по крайней мере один квадрат S_N, не содержащийся целиком в E_λ, т. е. $|S_N \setminus E_\lambda| > 0$. Для этого предположим противное, т. е. что $S \subset E_\lambda$ с точностью до множества меры нуль (здесь содержится и случай, когда совокупность $\{S_i\}$ является пустой). Имеем

$$\int_{E_\lambda} f(x)\,dx = \int_{E_\lambda \setminus (S \cup R)} f(x)\,dx + \int_{E_\lambda \cap R} f(x)\,dx + \int_S f(x)\,dx \leq$$

$$\leq \alpha \left|E_\lambda \setminus (S \cup R)\right| + \sum_i \int_{E_\lambda \cap R_i} f(x)\,dx + \sum_i \int_{S_i} f(x)\,dx <$$

$$< 2\alpha \left|E_\lambda \setminus (S \cup R)\right| + 2\alpha \sum_i \left|E_\lambda \cap R_i\right| + 2\alpha \sum_i |S_i| = 2\alpha |E_\lambda|.$$

Строгий знак неравенства обеспечивается тем, что хотя бы одно из множеств $E_\lambda \setminus (S \cup R)$, $E_\lambda \cap R_i$ или S_i имеет положительную меру. Получили противоречие с тем, что $f_{E_\lambda} = 2\alpha$. Значит, $|S_N \setminus E_\lambda| > 0$ при некотором N и, следовательно, $\operatorname{ess\,inf}_{x \in S_N} f(x) \leq \lambda$. Отсюда

$$\alpha \leq f_{S_N} \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in S_N} f(x) \leq C\lambda.$$

Таким образом, неравенство (2) доказано.

Теперь пусть произвольное $b \in (0; |Q_0|]$ и $\lambda = f^*(b) \geq \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_0} f(x)$. Тогда в силу равноизмеримости функций f и f^* имеем $|E_\lambda| \leq b$. Окончательно, используя монотонность f^*, находим

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^*(u)\,du \;\leq\; \frac{1}{b}\int_0^b f^*(u)\,du \;\leq\; f_{E_\lambda} \;\leq\; 2C\lambda \;=\; 2C\,f^*(b)$$

для любого отрезка $[a; b] \subset [0; |Q_0|]$.

Теорема доказана.

Замечание. Из упомянутого выше примера в работе [6] непосредственно следует, что значение постоянной 2 в теореме, вообще говоря, уменьшить нельзя.

Известно, что если функция одной переменной f принадлежит $A_1(C)$, то f^p будет суммируемой при всех $p < \dfrac{C}{C-1}$ [6]. Таким образом, с учетом равноизмеримости f и f^*, из теоремы непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть функция f принадлежит $A_1(C)$ на квадрате Q_0. Тогда f^p суммируема при всех $p < \dfrac{2C}{2C-1}$.*

1. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 207 – 226.
2. *Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. L.* Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform // Ibid. – 1973. – **176**. – P. 227 – 251.
3. *Korenovskii A.* Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions // Lect. Notes Unione Mat. Ital. – 2007. – № 4. – 188 p.
4. *Леончик Е. Ю.* Об условии Макенхаупта в многомерном случае // Вісн. Одес. нац. ун-ту. – 2007. – **12**, вип. 7. – С. 80 – 84.
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
6. *Bojarski B., Sbordone C., Wik I.* The Muckenhoupt class $A_1(\mathbb{R})$ // Stud. Math. – 1992. – **101** (**2**). – P. 155 – 163.
7. *Klemes I.* A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – **93**, № 3. – P. 497 – 500.
8. *Леончик Е. Ю., Малаксиано Н. А.* Точные показатели суммируемости для функций из классов A_∞ // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 2. – С. 17 – 26.
9. *Calderon A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. – 1952. – **88**. – P. 85 – 139.
10. *Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.* On a multidimensional form of F. Riesz's „rising sun" lemma // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – **133**, № 5. – P. 1437 – 1440.
11. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
12. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Получено 28.08.09,
после доработки — 07.05.10