УДК 517.5

В. И. Буслаев (Мат. ин-т РАН, Москва)

О КРИТЕРИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ РЯДА ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ*

We present a criterion of rationality of a function determined by the expansion into a series in terms of orthogonal polynomials. This criterion may be treated as an analog of the known Kronecker criterion of the rationality of a function determined by a power series.

Наведено критерій раціональності функції, що задана розвиненням у ряд за ортогональними многочленами. Цей критерій можна вважати аналогом відомого критерію Кронекера раціональності функції, що задана степеневим рядом.

Во многих вопросах теории функций весьма важную роль играет следующий известный критерий Кронекера [1] рациональности функции, заданной степенным рядом.

Критерий Кронекера. *Следующие утверждения эквивалентны*:

$1^\circ)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ *— рациональная функция, имеющая не более m полюсов*;

$2^\circ)$ $\begin{vmatrix} f_n & \dots & f_{n-m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n+m} & \dots & f_n \end{vmatrix} = 0$ *при всех* $n > n_0$.

В [2] показано, что аналогичный критерий имеет место для функции, заданной разложением в ряд по ортонормированным многочленам Якоби $T_{n,\alpha,\beta}$:

$$\int_{-1}^{1} T_{n,\alpha,\beta}(x)T_{k,\alpha,\beta}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = \begin{cases} 0\,,\ n \neq k, \\ 1\,,\ n = k, \end{cases} \quad n,k = 0,1,\dots\ ,$$

с показателями α и β такими, что $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$.

Аналог критерия Кронекера. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} F_n T_{n,\alpha,\beta}(z)$ *— разложение голоморфной на отрезке* $[-1,1]$ *функции* $F(z)$ *в ряд по ортонормированным многочленам Якоби* $T_{n,\alpha,\beta}(z)$, *где* $\alpha^2 = \beta^2 = \dfrac{1}{4}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

$1^\circ)$ $F(z)$ *— рациональная функция, имеющая не более m полюсов*;

$2^\circ)$ $\begin{vmatrix} F_n & \dots & F_{n-m} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n+m} & \dots & F_n \end{vmatrix} = 0$ *при всех* $n > n_0$.

*Частично поддержана программой ОМН РАН „Современные проблемы теоретической математики” и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00317 и № 09-01-12160-офи-м) и Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8033.2010.1).

В основе доказательства этого аналога критерия Кронекера лежит тот факт, что многочлены Чебышева являются многочленами Фабера для отрезка $[-1,1]$ и коэффициенты A_n, B_n, C_n в нижеприводимых трехчленных соотношениях (3) не зависят от n. Легко видеть, что аналог критерия Кронекера не верен для функции, заданной разложением в ряд по многочленам Лежандра $T_{n,0,0}(z)$ уже при $m=1$. В данной статье указывается критерий (возможно, не самый оптимальный) рациональности функции, заданной разложением в ряд по произвольной системе ортогональных многочленов.

Для любого степенного ряда f обозначим через $(f)_n$ коэффициент при z^n и заметим, что утверждение 2° в критерии Кронекера можно переформулировать следующим образом:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} (f)_n & (zf)_n & \dots & (z^m f)_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f)_{n+m} & (zf)_{n+m} & \dots & (z^m f)_{n+m} \end{pmatrix} < m+1 \quad \text{при всех} \quad n > n_0.$$

Пусть $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортонормированных на отрезке $[-1,1]$ многочленов

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_k(x)d\sigma(x) = \begin{cases} 0\,,\ n \neq k, \\ 1\,,\ n = k, \end{cases} \qquad n,k = 0,1,\dots, \tag{1}$$

где $\sigma(x)$ — произвольная неубывающая на отрезке $[-1,1]$ функция с бесконечным множеством точек роста. Для любого ряда F по ортонормированным многочленам T_n обозначим через $[F]_n$ коэффициент при многочлене T_n, т. е. $[F]_n = F_n$, если $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(z)$. В свете вышеприведенной переформулировки утверждения 2° в критерии Кронекера достаточно естественно выглядит следующая теорема, составляющая содержание данной статьи.

Теорема. *Пусть F — ряд по ортонормированным многочленам T_n, определяемым равенствами* (1), *где $\sigma(x)$ — неубывающая на отрезке $[-1,1]$ функция с бесконечным множеством точек роста. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1°) *существует не тождественно равный нулю многочлен Q степени не выше m такой, что QF — многочлен*;

2°) *при всех $n > n_0$*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} [F]_n & [zF]_n & \dots & [z^m F]_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [F]_{n+2m} & [zF]_{n+2m} & \dots & [z^m F]_{n+2m} \end{pmatrix} < m+1. \tag{2}$$

Заметим, что теорема не предполагает сходимости ряда F. Для формального ряда F коэффициенты $[zF]_n$, $[z^2F]_n, \dots$ могут быть вычислены последовательно по коэффициентам F_n, $n = 0,1,\dots,$ исходного ряда с помощью известных (см. [3, 4]) трехчленных рекуррентных соотношений для последовательности $\{T_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормированных многочленов

$$zT_n(z) = A_nT_{n+1}(z) + B_nT_n(z) + C_nT_{n-1}(z), n = 0,1,\dots, \tag{3}$$

где $T_{-1}(z) = 0$. Из этих соотношений получаем равенство

$$zF(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \big(A_n T_{n+1}(z) + B_n T_n(z) + C_n T_{n-1}(z)\big) =$$

$$= (B_0F_0 + C_1F_1)T_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{n-1}F_{n-1} + B_nF_n + C_{n+1}F_{n+1})T_n(z).$$

Следовательно,

$$[zF]_0 = B_0F_0 + C_1F_1\ ,\ [zF]_n = A_{n-1}F_{n-1} + B_nF_n + C_{n+1}F_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогичным образом при $j = 1, 2, \ldots$ имеем равенства

$$[z^jF]_0 = B_0[z^{j-1}F]_0 + C_1[z^{j-1}F]_1\ ,$$

$$[z^jF]_n = A_{n-1}[z^{j-1}F]_{n-1} + B_n[z^{j-1}F]_n + C_{n+1}[z^{j-1}F]_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, коэффициенты $[z^jF]_n$ однозначно определяются по коэффициентам F_n ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_nT_n(z)$ и коэффициентам A_n, B_n, C_n рекуррентных соотношений (3).

Доказательство теоремы. Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ тривиальна. Действительно, пусть $Q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_jz^j$ — многочлен, указанный в утверждении 1° теоремы. Тогда левая часть равенства

$$Q(z)F(z) = \sum_{j=0}^{m} q_jz^jF(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{n=0}^{\infty}[z^jF]_nT_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} q_j[z^jF]_n\right)T_n(z) \tag{4}$$

является многочленом. Пусть n_0 — степень этого многочлена. Тогда все коэффициенты ряда в правой части равенства (4) равны нулю при $n > n_0$, т. е.

$$\sum_{j=0}^{m} q_j[z^jF]_n = 0 \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Из этих равенств следует неравенство

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} [F]_{n_0+1} & [zF]_{n_0+1} & \ldots & [z^mF]_{n_0+1} \\ [F]_{n_0+2} & [zF]_{n_0+2} & \ldots & [z^mF]_{n_0+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} < m + 1,$$

которое влечет за собой неравенства (2) при всех $n > n_0$.

Докажем импликацию $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Из неравенства (2) следует, что при $n > n_0$ существует (возможно, не единственный) не тождественно равный нулю многочлен $Q_n(z) = q_{n,m}z^m + \ldots + q_{n,0}$ степени не выше m такой, что

$$\begin{gathered} q_{n,0}[F]_n + \ldots + q_{n,m}[z^mF]_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n,0}[F]_{n+2m} + \ldots + q_{n,m}[z^mF]_{n+2m} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Выберем любой (в случае неединственности) из таких многочленов Q_n и нормируем его таким образом, чтобы один из его наибольших по модулю коэффициентов был равен единице.

Поскольку

$$[Q_n F]_k = q_{n,0}[F]_k + \ldots + q_{n,m}[z^m F]_k,$$

то систему равенств (5) можно переписать в следующем виде:

$$[Q_n F]_k = 0, k = n, \ldots, n + 2m.$$

Поэтому

$$Q_n(z)F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}[Q_n F]_k T_k(z) = P_n(z) + \sum_{k=n+2m+1}^{\infty}[Q_n F]_k T_k(z), \tag{6}$$

где

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1}[Q_n F]_k T_k(z). \tag{7}$$

Покажем, что при $n > n_0$

$$P_{n+1}(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_{n+1}(z) \equiv 0. \tag{8}$$

Заменяя в равенстве (6) индекс n на $n+1$, имеем

$$Q_{n+1}(z)F(z) = P_{n+1}(z) + \sum_{k=n+2m+2}^{\infty}[Q_{n+1}F]_k T_k(z). \tag{9}$$

Вычитая из равенства (6), умноженного на $Q_{n+1}(z)$, равенство (9), умноженное на $Q_n(z)$, получаем равенство

$$P_{n+1}(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_{n+1}(z) = \sum_{k=n+2m+1}^{\infty} Q^*_{n,k}(z)T_k(z), \tag{10}$$

где $Q^*_{n,k}(z)$ — многочлены степени не выше m.

Заметим, что левая часть равенства (10) — это многочлен степени не выше $n+m$, а правая часть равенства (10) может быть записана с учетом равенств (3) как $\sum_{k=n+m+1}^{\infty} D_{n,k}T_k(z)$. Поэтому и левая, и правая части равенства (10) равны нулю. Таким образом, равенство (8) доказано.

Из равенства (8) следует, что $\dfrac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} = \dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ при всех $n > n_0$. Следовательно, $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \dfrac{P_{n_0+1}(z)}{Q_{n_0+1}(z)}$ при всех $n > n_0$. Так как $\deg P_n \le n-1$, $\deg Q_n \le m$, то

$$\deg P_n = \deg P_{n_0+1} + \deg Q_n - \deg Q_{n_0+1} \le n_0 + m.$$

Отсюда с учетом равенства (7) при $n > n_0 + m + 1$ получаем равенства

$$[Q_n F]_k = 0, \quad k = n_0 + m + 1, \ldots, n - 1. \tag{11}$$

Выберем подпоследовательность Λ натуральных чисел такую, что $\lim_{n\in\Lambda} q_{n,j} = q_j$, $j = 0, \ldots, m$. Из вышеуказанной нормировки многочленов Q_n следует, что хотя бы одно из чисел $q_0, \ldots, q_m$ равно единице. Поэтому $Q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j \not\equiv 0$. Заметим, что

$$[QF]_k = \sum_{j=0}^{m} q_j [z^j F]_k = \lim_{n\in\Lambda} \sum_{j=0}^{m} q_{n,j} [z^j F]_k = \lim_{n\in\Lambda} [Q_n F]_k.$$

Отсюда с учетом равенств (11) следует, что при любом фиксированном $k \geq n_0 + m + 1$ справедливо равенство $[QF]_k = 0$. Следовательно, QF — многочлен (степени не выше $n_0 + m$). Таким образом, импликация $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$, а вместе с ней и теорема доказаны.

В завершение статьи выскажем предположение, что предлагаемый в теореме критерий рациональности можно усилить, заменив в утверждении 2° теоремы матрицу размера $\big((m+1)\times(2m+1)\big)$ аналогичной матрицей размера $\big((m+1)\times(m+1)\big)$. Точнее, приведем и обсудим следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(z)$ — *разложение голоморфной на отрезке* $[-1,1]$ *функции* $F(z)$ *в ряд по ортонормированным многочленам* T_n, *построенным по функции* σ, *удовлетворяющей условию Сеге*

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln \sigma'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty. \tag{12}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$1^\circ)$ $F(z)$ — *рациональная функция, имеющая не более* m *полюсов*;

$2^\circ)$ $\begin{vmatrix} F_n & [zF]_n & \ldots & [z^m F]_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n+m} & [zF]_{n+m} & \ldots & [z^m F]_{n+m} \end{vmatrix} = 0$ *при всех* $n > n_0$,

Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ гипотезы следует из соответствующей импликации теоремы.

Для случая $m = 1$ и многочленов Чебышева импликация $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ гипотезы тривиальным образом следует из соответствующей импликации вышеприведенного аналога критерия Кронекера. Действительно, положим $\Delta_n = \begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix}$. Поскольку в случае многочленов Чебышева имеют место равенства $[zF]_n = \dfrac{F_{n-1} + F_{n+1}}{2}$, утверждение 2° гипотезы означает, что

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = 0, \quad n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots.$$

Следовательно, $\Delta_n = C$ при всех $n > n_0$. Так как рассматриваемый ряд неформальный, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |C|^{1/n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} |\Delta_n|^{1/n} \leq (\overline{\lim}_{n\to\infty} |F_n|^{1/n})^2 < 1.$$

Следовательно, $C = 0$ и $\Delta_n = 0$ при всех $n > n_0$. Отсюда по аналогу критерия Кронекера получаем утверждение 1° гипотезы.

В [5] показано, что при $m = 1$ гипотеза верна не только для многочленов Чебышева, но и в общем случае. При этом в доказательстве существенным образом используется условие (12), а точнее, его следствие — существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 1/2, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = 0.$$

При $m > 1$ вопрос о справедливости гипотезы открыт. Отметим, что и в случае многочленов Чебышева гипотеза имеет формулировку, не являющуюся при $m > 1$ тривиальным следствием аналога критерия Кронекера.

1. *Kronecker L.* Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen // Monatsber. Koniglich Preuss. Akad. Wiss. Berlin. – 1881. – S. 535 – 600.
2. *Буслаев В. И., Буслаева С. Ф.* О формулах Адамара для эллипсов мероморфности // Сб. трудов Ин-та математики НАН Украины. – 2008. – **5**, № 1. – С. 1 – 8.
3. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007.
5. *Буслаев В. И.* Об аналоге формулы Адамара для первого эллипса мероморфности // Мат. заметки. – 2009. – **85**, № 4. – С. 552 – 568.

Получено 28.12.09