

## РЕГУЛЯРНІ ОРТОСКАЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗШИРЕНОГО ГРАФА ДИНКІНА $\tilde{E}_8$ ТА $*$ -АЛГЕБРИ, АСОЦІЙОВАНОЇ З НИМ

We obtain the classification of regular orthoscalar representations of the extended Dynkin graph  $\tilde{E}_8$  with a special character. By using this classification, we describe triples of self-adjoint operators  $A$ ,  $B$ ,  $C$  such that their spectra are contained in the sets  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\{0, 2, 4\}$ , and  $\{0, 3\}$ , correspondingly, and the equality  $A + B + C = 6I$  is satisfied.

Получена класифікація регулярних ортоскалярних представлень розширеного графа Динкіна  $\tilde{E}_8$  со спеціальним характером. С ее помощью описаны тройки самосопряженных операторов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , спектры которых содержатся в множествах  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\{0, 2, 4\}$  и  $\{0, 3\}$  соответственно и для которых  $A + B + C = 6I$ .

**1. Вступ.** Багато задач функціонального аналізу можуть формулюватись і розв'язуватись на мові теорії зображень  $*$ -колчанів і  $*$ -алгебр. Зображення в гільбертових просторах  $*$ -алгебр з самоспряженими твірними, сума яких кратна одиниці, а спектри твірних фіксовані, вивчалися у багатьох роботах (див., наприклад, [1–3]). Їм природним чином відповідають ортоскалярні зображення деяких  $*$ -колчанів (або графів), які вивчалися в [4–7].

Набори операторів зі спеціальними фіксованими спектрами і сумою, рівною одиничному оператору, що пов'язані з розширеними графами Динкіна  $\tilde{D}_4$ ,  $\tilde{E}_6$  та  $\tilde{E}_7$  вивчено в [1, 8, 9]. Деякі результати про зображення алгебр, пов'язаних з  $\tilde{E}_8$ , див. у [10].

Цю роботу присвячено класифікації (з точністю до унітарної еквівалентності) нерозкладних  $*$ -зображень алгебри  $\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8})$ :

$$\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8}) = \mathbb{C} \langle a, b, c \mid a = a^*, b = b^*, c = c^*,$$

$$a(a - e)(a - 2e)(a - 3e)(a - 4e)(a - 5e) = 0,$$

$$b(b - 2e)(b - 4e) = 0, c(c - 3e) = 0, a + b + c = 6e \rangle$$

і відповідних нерозкладних ортоскалярних зображень графа Динкіна  $\tilde{E}_8$ .

**2. Означення та допоміжні факти.** Нагадаємо деякі означення і факти про ортоскалярні зображення колчанів [4–6]. Колчан  $Q$  з множиною вершин  $Q_v$  і множиною стрілок  $Q_a$  називається розділеним, якщо  $Q_v = \overset{\circ}{Q} \sqcup \overset{\bullet}{Q}$  і для будь-якої  $\alpha \in Q_a$  її початок  $t_\alpha$  належить  $\overset{\circ}{Q}$ , а кінець  $h_\alpha \in \overset{\bullet}{Q}$ . Колчан  $Q$  однократний, якщо при  $\alpha \neq \beta$  або  $t_\alpha \neq t_\beta$ , або  $h_\alpha \neq h_\beta$ . Вершини з  $\overset{\circ}{Q}$  будемо називати парними, а з  $\overset{\bullet}{Q}$  — непарними. Будемо у подальшому вважати колчан  $Q$  розділеним і однократним.

Нехай  $m = |\overset{\circ}{Q}|$ ,  $n = |\overset{\bullet}{Q}|$ ,  $\overset{\circ}{Q} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ,  $\overset{\bullet}{Q} = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ . Зображення  $T$  колчана  $Q$  над  $\mathbb{C}$  ставить у відповідність вершині  $i \in Q_v$  сепар-

рабельний гільбертовий простір  $T(i)$ , а стрілці  $\alpha: j \rightarrow i$ ,  $\alpha \in Q_a$ , обмежене лінійне відображення  $T_{ij}: T(j) \rightarrow T(i)$ . Зображення можна асоціювати з матрицею  $T = [T_{i,j_k}]_{\substack{k=1,n \\ l=1,m}}$ , при цьому будемо вважати, що  $T_{i,j_k} = 0$ , якщо не існує  $\alpha \in Q_a$  такої, що  $t_\alpha = j_k$ ,  $h_\alpha = i$ .

Нехай  $\text{Rep } Q$  — категорія зображень колчана  $Q$  над  $\mathbb{C}$ , об'єктами якої є зображення  $T$ , а морфізм зображення  $T$  в зображення  $\tilde{T}$  означається як сім'я лінійних відображень  $C = \{C_i\}_{i \in Q_v}$ ,  $C_i: T(i) \rightarrow \tilde{T}(i)$  таких, що для кожної  $\alpha \in Q_a$  з  $t_\alpha = j$  і  $h_\alpha = i$  діаграма

$$\begin{array}{ccc} T(j) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(i) \\ C_j \downarrow & & \downarrow C_i \\ \tilde{T}(j) & \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha)} & \tilde{T}(i) \end{array} \quad (1)$$

комутативна, тобто  $C_i T_{ij} = \tilde{T}_{ij} C_j$ .

Якщо зображення  $T$ ,  $\tilde{T}$  задані матрицями  $T = [T_{i,j_k}]$ ,  $\tilde{T} = [\tilde{T}_{i,j_k}]$  і  $X = \text{diag}\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_m}\}$ ,  $Y = \text{diag}\{C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_n}\}$ , то з комутативності діаграм (1) випливає, що

$$XT = \tilde{T}Y. \quad (2)$$

Будемо у подальшому користуватись також позначенням  $C = (X, Y)$ .

Нехай  $\mathcal{H}$  — категорія гільбертових просторів. Позначимо через  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$  підкатегорію в  $\text{Rep } Q$ , об'єктами якої є зображення  $T$ , а морфізмами  $C: T \rightarrow \tilde{T}$  — ті з морфізмів в  $\text{Rep } Q$ , для яких крім (1) комутативною є і діаграма

$$\begin{array}{ccc} T(j) & \xleftarrow{T(\alpha)^*} & T(i) \\ C_j \downarrow & & \downarrow C_i \\ \tilde{T}(j) & \xleftarrow{\tilde{T}(\alpha)^*} & \tilde{T}(i) \end{array} \quad (3)$$

тобто виконуються рівності

$$XT = \tilde{T}Y, \quad YT^* = \tilde{T}^*X. \quad (4)$$

Зображення  $T$ ,  $\tilde{T}$  з  $\text{Rep } Q$  (відповідно, з  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$ ) еквівалентні в  $\text{Rep } Q$  (відповідно, в  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$ ), якщо знайдеться оборотний морфізм  $C: T \rightarrow \tilde{T}$ . Можна довести, що  $T$  і  $\tilde{T}$  еквівалентні в  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$  тоді і лише тоді, коли вони унітарно еквівалентні, тобто оборотний морфізм можна вибрати складеним з унітарних операторів  $C_i$ .

Оскільки в означенні категорії  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$  рівноправно задіяні як лінійні відображення  $T(\alpha)$ , що відповідають стрілкам колчана  $Q$ , так і спряжені їм відображення  $T(\alpha)^*$ , часто у подальшому будемо говорити про зображення графа  $G$ , що відповідає колчану  $Q$ : ребру графа відповідає пара взаємно спряжених лінійних відображень.

Нехай  $\vec{T}_i = [T_{i,j_1}, T_{i,j_2}, \dots, T_{i,j_n}]$ , а  $T_j^\downarrow$  — стовпець, складений із лінійних відображень  $T_{i_1,j}, T_{i_2,j}, \dots, T_{i_m,j}$ . Зображення з  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$  називається ортоскалярним, якщо кожній  $i \in Q_v$  поставлено у відповідність дійсне невід'ємне число  $\chi_i$  і виконуються наступні умови:

$$\vec{T}_i \cdot \vec{T}_i^* = \chi_i I_i, \quad i \in \overset{\circ}{Q}, \quad T_j^\downarrow \cdot T_j^\downarrow = \chi_j I_j, \quad j \in \overset{\circ}{Q}. \quad (5)$$

Тут  $I_i$  — одиничний оператор в  $T(i)$ .  $\text{Rep}_{os}(Q, \mathcal{H})$  — повна підкатегорія в  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$ , об'єктами якої є ортоскалярні зображення колчана  $Q$ . Ортоскалярному зображенню  $T$  колчана  $Q$  поставимо у відповідність вектор  $\chi \in \mathbb{R}^{Q_v}$ :  $\chi = \{\chi(j)\}_{j \in Q_v}$ ,  $\chi(j) = \chi_j$  означені в (5). Будемо називати  $\chi$  характером зображення  $T$ .

В [11] доведено, що у колчанів, які відповідають графам і розширеним графам Динкіна, немає нескінченновимірних нерозкладних ортоскалярних зображень. Саме такі зображення ми вивчатимемо для графа  $\tilde{E}_8$ , тому в подальшому будемо вважати зображення скінченновимірними. В цьому випадку розмірністю зображення  $T$  будемо називати вектор  $d = \{d(j)\}_{j \in Q_v}$ , де  $d(j) = \dim T(j)$ .

Виберемо у просторах зображення ортонормовані базиси і перейдемо від лінійних відображень до їх матриць. Два ортоскалярні зображення  $T$  і  $\tilde{T}$  еквівалентні, якщо існують такі унітарні матриці  $U = \text{diag}\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_m}\}$  і  $V = \text{diag}\{V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_m}\}$ , що  $UT = \tilde{T}V$  або  $\tilde{T}_{i,j,k} = U_{i_1} T_{i,j,k} V_{j_k}^*$ .

Зображення  $T$  називається шурівським у категорії  $\text{Rep } Q$  (відповідно,  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$  і  $\text{Rep}_{os}(Q, \mathcal{H})$ ), якщо його кільце ендоморфізмів у цій категорії одновимірне (ізоморфне  $\mathbb{C}$ ). Як відомо, зображення  $T$  є нерозкладним у категоріях  $\text{Rep}(Q, \mathcal{H})$  і  $\text{Rep}_{os}(Q, \mathcal{H})$  тоді і лише тоді, коли воно шурівське.

**3. Розмірності нерозкладних ортоскалярних зображень.** З колчаном  $Q$  пов'язана форма Тітса  $q(x)$  на  $\mathbb{R}^{Q_v}$ : якщо  $x \in \mathbb{R}^{Q_v}$ , то

$$q(x) = \sum_{i \in Q_v} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_a} x_{t_\alpha} x_{h_\alpha}.$$

З [10, 12] випливає, що розмірності нерозкладних в  $\text{Rep}_{os}(Q, \mathcal{H})$  зображень для графів і розширених графів Динкіна є розв'язками  $x$  рівняння  $q(x) = 1$  (дійсні корені) або  $q(x) = 0$  (уявні корені) в множині  $\mathbb{Z}_+^{Q_v} = \{x \in \mathbb{Z}^{Q_v} \mid x \neq 0, x_i \geq 0\}$  (але не навпаки).

Зафіксуємо нумерацію вершин в  $\overset{\circ}{Q} = \{i_1, \dots, i_m\}$  і  $\overset{\circ}{Q} = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  (будемо вважати, що вузлова вершина, якщо вона одна, лежить в  $\overset{\circ}{Q}$ ; будемо також вершини з  $\overset{\circ}{Q}$  позначати як  $i_{m+k} = j_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ). Нехай  $x \in \mathbb{R}^{Q_v}$ ,  $x_k = x(i_k)$  при  $k \in \overline{1, m+n}$ ,  $c$  — перетворення Кокстера на  $\mathbb{R}^{Q_v}$ , тобто  $c = \sigma_{i_{m+n}} \dots \sigma_{i_2} \sigma_{i_1}$ , де

$$(\sigma_{i_k}(x))_k = -x_k + \sum_{l, i_l - i_k} x_l, \quad (\sigma_{i_k}(x))_l = x_l \quad \text{при } l \neq k.$$

Зрозуміло, що  $\sigma_i^2 = \text{id}$  при  $i \in \overline{1, m+n}$ . Тому  $c^{-1} = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m+n}}$ . Будемо також позначати  $\overset{\circ}{c} = \sigma_{i_n} \dots \sigma_{i_2} \sigma_{i_1}$ ,  $\overset{\circ}{c} = \sigma_{i_{m+n}} \dots \sigma_{i_{m+2}} \sigma_{i_{m+1}}$  і називати ці перетворення відбиттями Кокстера. Позначимо  $\overset{\circ}{c}_k = \underbrace{\overset{\circ}{c} \overset{\circ}{c} \overset{\circ}{c}}_{k \text{ разів}}$ ,  $\overset{\circ}{c}_k = \underbrace{\overset{\circ}{c} \overset{\circ}{c} \overset{\circ}{c}}_{k \text{ разів}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Вектор  $x \in \mathbb{R}_+^{Q_v}$  регулярний, якщо  $c^t(x)$  належить  $\mathbb{R}_+^{Q_v}$  при будь-якому  $t \in \mathbb{Z}$ , і сингулярний у протилежному випадку.

Зображення  $T$  колчана  $Q$  є сингулярним, якщо  $T$  нерозкладне, скінченновимірне і його розмірність  $d$  — сингулярний вектор;  $T$  є регулярним, якщо  $T$  нерозкладне, скінченновимірне і не сингулярне.

Зображення  $T$  колчана  $Q$  називається точним, якщо  $T(i) \neq 0$  при всіх  $i \in Q_v$ . Носієм зображення  $T$  називається множина  $Q_v^\top = \{i \in Q_v \mid T(i) \neq 0\}$ . Характер зображення визначений однозначно на носії  $Q_v^\top$  зображення і неоднозначно поза носієм.

Нехай  $g \in Q_v$ ,  $\Pi^g$  — найпростіше зображення колчана  $Q$ :  $\Pi^g(g) = \mathbb{C}$ ,  $\Pi^g(i) = 0$  при всіх  $i \neq g$ ,  $i \in Q_v$ . Характери зображення  $\Pi^g$  будемо позначати  $\chi^g$ :  $\chi^g(g) = 0$ , при цьому будемо вважати, що  $\chi^g(i) > 0$  при  $i \neq g$ . Для найпростішого зображення  $\Pi^g$  розмірність  $d^g(g) = 1$ ,  $d^g(i) = 0$  при  $i \neq g$ .

Позначимо через  $\text{Rep}(Q, d, \chi)$  повну підкатегорію зображень з  $\text{Rep}_{os}(Q, \mathcal{H})$  із фіксованою розмірністю  $d$  і характером  $\chi$ . У роботі [4] було введено функтори відбиттів Кокстера  $\overset{\circ}{F}$  і  $\overset{\bullet}{F}$ :

$$\overset{\circ}{F}: \text{Rep}(Q, d, \chi) \rightarrow \text{Rep}(Q, \overset{\circ}{c}(d), \overset{\circ}{\chi}_d),$$

$$\overset{\bullet}{F}: \text{Rep}(Q, d, \chi) \rightarrow \text{Rep}(Q, \overset{\bullet}{c}(d), \overset{\bullet}{\chi}_d),$$

де  $\overset{\circ}{c}(d)$ ,  $\overset{\bullet}{c}(d)$  — відбиття Кокстера вектора  $d$ ,

$$\overset{\circ}{c}(d)(i) = \begin{cases} -d(i) + \sum_{j: j-i} d(j) & \text{при } i \in \overset{\circ}{Q}, \\ d(i) & \text{при } i \in \overset{\bullet}{Q}, \end{cases}$$

$$\overset{\bullet}{c}(d)(i) = \begin{cases} -d(i) + \sum_{j: j-i} d(j) & \text{при } i \in \overset{\bullet}{Q}, \\ d(i) & \text{при } i \in \overset{\circ}{Q}, \end{cases}$$

$$\overset{\circ}{\chi}_d(i) = \begin{cases} -\chi(i) + \sum_{j: j-i} \chi(j) & \text{при } i \in \overset{\circ}{Q}_v^\top, \\ \chi(i) & \text{при } i \notin \overset{\circ}{Q}_v^\top, \end{cases}$$

$$\overset{\bullet}{\chi}_d(i) = \begin{cases} -\chi(i) + \sum_{j: j-i} \chi(j) & \text{при } i \in \overset{\circ}{Q}_v^\top, \\ \chi(i) & \text{при } i \notin \overset{\circ}{Q}_v^\top, \end{cases}$$

$$\overset{\bullet}{Q}_v^\top = Q_v^\top \cap \overset{\bullet}{Q}, \quad \overset{\circ}{Q}_v^\top = Q_v^\top \cap \overset{\circ}{Q}.$$

$\overset{\bullet}{F}$  і  $\overset{\circ}{F}$  — функтори еквівалентності категорій. Можна перевірити, що їх дворазове застосування приводить до функтора, еквівалентного тотожному.

Введемо позначення

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}}(d, \chi) = \left( \overset{\circ}{c}(d), \overset{\circ}{\chi}_d \right),$$

$$\overset{\bullet}{\mathcal{F}}(d, \chi) = \left( \overset{\bullet}{c}(d), \overset{\bullet}{\chi}_d \right).$$

Пару  $\underbrace{\overset{\bullet}{\mathcal{F}}\overset{\circ}{\mathcal{F}}(d, \chi)}_{k \text{ разів}}$  будемо позначати як  $\overset{\bullet}{\mathcal{F}}_k(d, \chi)$ , а пару  $\underbrace{\overset{\circ}{\mathcal{F}}\overset{\bullet}{\mathcal{F}}(d, \chi)}_{k \text{ разів}}$  — як

$\overset{\circ}{\mathcal{F}}_k(d, \chi)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Для нерозкладного зображення з  $\text{Per}(Q, d, \chi)$ , що не збігається з найпростішим,  $\chi(i) > 0$  при  $d(i) \neq 0$  (див. лему 3.5 в [4]). Звідси випливає наступне.

**Зауваження 1.** Якщо для ортоскалярного зображення  $T$  розмірності  $d$  і з характером  $\chi$  для деякого  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\overset{\bullet}{\mathcal{F}}_k(d, \chi)$  (або  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_k(d, \chi)$ ) є пара  $(\tilde{d}, \tilde{\chi})$ , для якої знайдуться вершини  $i_1, i_2$  такі, що  $\tilde{d}(i_1) \neq 0$ ,  $\tilde{d}(i_2) \neq 0$ , а  $\tilde{\chi}(i_1) = 0$ ,  $\tilde{\chi}(i_2) > 0$ , то зображення  $T$  є розкладним.

Нехай колчану  $Q$  відповідає розширений граф Динкіна  $G$ . Тоді всі його уявні корені кратні мінімальному додатному уявному кореню  $\delta_G = (\delta_1, \dots, \delta_m, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{m+n})$ . Побудуємо лінійну форму

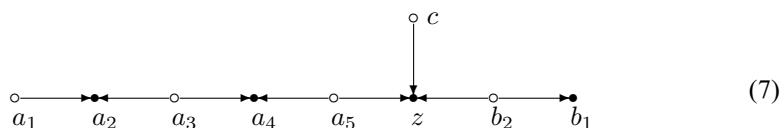
$$L_G(x) = \sum_{i_k \in \overset{\bullet}{G}} \delta_k x_k - \sum_{i_{m+k} \in \overset{\circ}{G}} \delta_{m+k} x_{m+k}, \quad x \in \mathbb{R}^{G_v}.$$

Справедливе таке твердження (див., наприклад, [5]): для розширеного графа Динкіна для того, щоб корінь  $x \in \mathbb{R}^{G_v}$  був регулярним, необхідно і достатньо, щоб  $L_G(x) = 0$ . Крім того, для нерозкладного в  $\text{Per } Q$  регулярного зображення  $T$  колчана  $Q$ , граф якого є розширеним графом Динкіна,  $T$  — шурівське зображення тоді і лише тоді, коли  $\dim T = d \leq \delta_G$  при покоординатному порівнянні векторів (див. [13]). З шуровості зображення  $T$  в  $\text{Per}_{os}(Q, \mathcal{H})$  випливає його шуровість в  $\text{Per } Q$  (див. теорему 1 в [7]).

Тому, якщо ми маємо намір класифікувати (з точністю до унітарної еквівалентності) всі регулярні нерозкладні зображення  $T$  з категорії  $\text{Per}_{os}(Q, \mathcal{H})$  для колчана  $Q$ , якому відповідає розширений граф Динкіна  $G$ , достатньо обмежитись розмірністю  $\delta_G$  (уявний регулярний корінь) і розмірностями  $d < \delta_G$ , що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{aligned} q(d) &= 1, \\ L_G(d) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

(дійсні регулярні корені). Таких коренів скінченне число, їх можна знайти перебором. Наприклад, колчану  $Q$



відповідає розширений граф Динкіна  $\tilde{E}_8$ ,  $\delta_{\tilde{E}_8} = \begin{matrix} & & & & & 3 & & & \\ & & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{matrix}$  (координати вектора  $\delta_{\tilde{E}_8}$  ми розташували у відповідності з розташуванням вершин графа в (7)).

Розв'язки системи (6) наведемо в таблиці.

$\chi$	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	$d^{(3)}$	$d^{(4)}$	$d^{(5)}$	$d^{(6)}$	$d^{(7)}$	$d^{(8)}$	$d^{(9)}$	$d^{(10)}$	$d^{(11)}$	$d^{(12)}$	$d^{(13)}$	$d^{(14)}$
$a_1$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
$a_2$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	2	0	0	1
$a_3$	0	1	1	1	0	1	1	1	1	2	2	0	1	2
$a_4$	1	1	1	1	0	2	1	1	2	2	2	1	1	2
$a_5$	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2
$b_1$	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
$b_2$	1	1	1	0	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2
$c$	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2
$z$	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3

$\chi$	$d^{(15)}$	$d^{(16)}$	$d^{(17)}$	$d^{(18)}$	$d^{(19)}$	$d^{(20)}$	$d^{(21)}$	$d^{(22)}$	$d^{(23)}$	$d^{(24)}$	$d^{(25)}$	$d^{(26)}$	$d^{(27)}$	$d^{(28)}$
$a_1$	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
$a_2$	1	2	2	0	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2
$a_3$	1	2	3	1	1	2	2	2	2	3	2	2	2	3
$a_4$	2	3	3	2	2	3	2	3	2	4	3	3	3	3
$a_5$	3	3	3	3	3	4	3	3	3	4	4	4	4	4
$b_1$	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
$b_2$	2	2	2	3	3	2	2	3	3	3	4	3	3	3
$c$	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2
$z$	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

Корінь графа будемо називати точним, якщо всі його координати відмінні від нуля, і неточним у протилежному випадку. В роботі [7] (див. лему 5) доведено, що якщо  $G$  — розширений граф Динкіна,  $d \in \mathbb{Z}_+^G$  — корінь графа  $G$ , що задовольняє умову  $d < \delta_G$ , то або  $d$  — неточний корінь, або за допомогою відбиттів Кокстера  $\overset{\circ}{c}$  і  $\overset{\bullet}{c}$  може бути перетворений в неточний корінь  $\tilde{d}$ . Неточний корінь можна розглядати як вектор розмірності деякого зображення  $\tilde{T}$  „меншого” графа  $\tilde{G}$ , тобто графа Динкіна. Застосувавши до кореня  $\tilde{d}$  відбиття Кокстера графа Динкіна (а не розширеного графа Динкіна), ми за скінченну кількість кроків з’ясуємо, чи існує в розмірності  $\tilde{d}$  нерозкладне зображення з характером  $\chi_G = \delta_G$ .

Наприклад, для графа  $\tilde{E}_8$ ,  $\overset{\bullet}{F}_2(d^{(28)}, \delta_{\tilde{E}_8}) = \overset{\bullet}{F}_2(d^{(27)}, \delta_{\tilde{E}_8}) = \overset{\circ}{F}(d^{(26)}, \delta_{\tilde{E}_8}) = (d^{(25)}, \delta_{\tilde{E}_8})$ ,  $d^{(25)}$  є неточним коренем. Якщо відкинути його нульову координату

$d(a_1)$ , отримаємо точний корінь  $\tilde{d} = \begin{matrix} 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{matrix}$  для графа Динкіна  $E_8$ .

Чи існує нерозкладне зображення відповідного колчана в розмірності  $\tilde{d}$  з характером  $\tilde{\chi} = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{matrix}$ ? Обчислення показують, що  $\overset{\circ}{F}_{11}(\tilde{d}, \tilde{\chi}) = (\hat{d}, \hat{\chi})$ ,

де  $\hat{d} = \begin{matrix} 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$ ,  $\hat{\chi} = \begin{matrix} 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{matrix}$ . Враховуючи зауваження 1, отримуємо, що будь-яке ортоскалярне зображення в розмірності  $d^{(25)}$ , а отже і в розмірностях  $d^{(26)}$ ,  $d^{(27)}$ ,  $d^{(28)}$ , є розкладним.

Аналогічно перевіряємо, що нерозкладні зображення в розмірностях, наведених у таблиці, є лише в розмірностях  $d^{(1)} - d^{(8)}$  і  $d^{(14)}$ ,  $d^{(15)}$  (неточне зображення в розмірності  $\tilde{d}$  відбиттями Кокстера графа  $E_8$  переводиться в найпростіше зображення).

**4. Нерозкладні ортоскалярні зображення графа  $\tilde{E}_8$ , характер яких збігається з вектором  $\delta_{\tilde{E}_8}$ .** Нехай  $Q$  — розділений колчан з графом  $\tilde{E}_8$ ,  $T$  — його ортоскалярне зображення з характером  $\delta_{\tilde{E}_8}$ . Рядки блочної матриці зображення  $T = [T_{i,j}]$  занумеруємо непарними вершинами в порядку  $a_2, a_4, z, b_1$ , а стовпці — парними вершинами  $a_1, a_3, a_5, c, b_2$ .

Таким чином,

$$T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де  $A_{11} = T_{a_2, a_1}$ ,  $A_{12} = T_{a_2, a_3}$ ,  $A_{22} = T_{a_4, a_3}$ ,  $A_{23} = T_{a_4, a_5}$ ,  $A_{33} = T_{z, a_5}$ ,  $A_{34} = T_{z, c}$ ,  $A_{35} = T_{z, b_2}$ ,  $A_{45} = T_{b_1, b_2}$ .

Знайдемо нерозкладні регулярні зображення колчана  $Q$  зі спеціальним фіксованим характером  $\delta_{\tilde{E}_8}$ . Ортоскалярність зображення (8) означає, що виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} c_1) \quad & A_{11}^* A_{11} = I_{a_1}, \\ c_2) \quad & A_{11} A_{11}^* + A_{12} A_{12}^* = 2I_{a_2}, \\ c_3) \quad & A_{12}^* A_{12} + A_{22}^* A_{22} = 3I_{a_3}, \\ c_4) \quad & A_{22} A_{22}^* + A_{23} A_{23}^* = 4I_{a_4}, \\ c_5) \quad & A_{23}^* A_{23} + A_{33}^* A_{33} = 5I_{a_5}, \\ c_6) \quad & A_{33} A_{33}^* + A_{34} A_{34}^* + A_{35} A_{35}^* = 6I_z, \\ c_7) \quad & A_{34}^* A_{34} = 3I_c, \\ c_8) \quad & A_{35}^* A_{35} + A_{45}^* A_{45} = 4I_{b_2}, \\ c_9) \quad & A_{45} A_{45}^* = 2I_{b_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $I$  з індексом — одинична матриця відповідної розмірності. Розмірності, в яких існують такі нерозкладні зображення, перераховано в п. 2.

Нам буде зручно розглядати деякі „ідеальні” матриці:  $J_{0,n}$  — „порожня” матриця з нульовою кількістю рядків і  $n$  стовпцями, і  $J_{n,0}$  — „порожня” матриця з нульовою кількістю стовпців і з  $n$  рядками (див. [14]). Для них  $J_{m,0} \oplus J_{0,n} = 0_{m \times n}$ ,  $J_{m,0} \cdot J_{0,n} = 0_{m \times n}$ . Матриця  $J_{n,0}$  ( $J_{0,n}$ ) є матрицею лінійного відображення з нульового (відповідно,  $n$ -вимірного простору) в  $n$ -вимірний (відповідно, нульовий) простір.

Перш ніж, користуючись співвідношеннями (9), обчислити матричні елементи зображення  $T$  (в фіксованій розмірності), зведемо зображення припустимими унітарними перетвореннями ( $\tilde{T}_{i,j} = U_i T_{ij} V_j^*$ ) до деякого „канонічного” вигляду.

Деякі матричні елементи зробимо нульовими, деякі ненульові елементи (множенням рядка або стовпця матриці на деяке число  $e^{i\varphi}$ , що є унітарним перетворенням матриці) — додатними або від’ємними. З метою економії місця при такому зведенні будемо користуватись наступними позначеннями.

Символ  $\bar{0}|_k$  на якому-небудь місці матриці  $T$  буде означати, що на цьому місці може бути нуль, отриманий на  $k$ -му кроці унітарними перетвореннями рядків горизонтальної смуги і стовпців вертикальної смуги, що відповідають цьому місцю;  $\bar{0}_k$  означає, що нуль отримано унітарними перетвореннями лише стовпців,  $0|_k$  —

тільки рядків;  $\vec{0}_k$  — нуль, отриманий внаслідок ортогональності стовпців вертикальної смуги,  $0_{\downarrow k}$  — внаслідок ортогональності рядків. При цьому, отримуючи нуль на  $k$ -му кроці, ми не „псуємо” нулі, отримані раніше. Позначення  $a_{ij}^+$  означає, що елемент на відповідному місці ми робимо додатним ( $a_{ij}^-$  — від’ємним,  $a_{ij}^{\geq 0}$  — невід’ємним). Наводячи остаточний результат, ми впевнені, що процес зведення по кроках може бути відтворений.

**Теорема 1.** *Нерозкладні ортоскалярні зображення розширеного графа Динкіна  $\tilde{E}_8$  з характером  $\delta_{\tilde{E}_8}$ , з точністю до унітарної еквівалентності, збігаються з одним із наступних зображень:*

$$T^{(1)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{1,0} & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right],$$

$$T^{(2)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & J_{1,0} & \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right],$$

$$T^{(3)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{2} & J_{1,0} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_{0,1} \end{array} \right],$$

$$T^{(4)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & J_{1,0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_{0,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(5)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{3/5} & \sqrt{2/5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\sqrt{12/5} & \sqrt{18/5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_{0,1} \end{array} \right],$$

$$T^{(6)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{4/3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{5/3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_{0,1} \end{array} \right],$$



$$T^{(7)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{8/3} & \sqrt{4/3} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{1/3} & -\sqrt{2/3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right],$$

$$T^{(8)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{array} \right],$$

$$T^{(9)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \sqrt{\frac{7}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{10}{3}} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & -\sqrt{\frac{27}{28}} & \sqrt{\frac{20}{21}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{\frac{7}{3}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{9}{7}} & \sqrt{\frac{5}{7}} \end{array} \right],$$

$$T^{(10)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{9}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{9}{4}} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{3} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{3}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

$T_{t,p,\varepsilon}^{(11)}$  — з наступними блоками  $A_{ij}^{(11)}$ :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(11)} & A_{12}^{(11)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(11)} & A_{23}^{(11)} \\ 0 & 0 & A_{33}^{(11)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2-p} & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{p} & \sqrt{\frac{1}{p}} & 0 & 0 & \sqrt{2-p} & -\sqrt{2-\frac{1}{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2-\frac{1}{p}} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{p}} & -\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3-\frac{1}{t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{t}} & \sqrt{2pt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3-2pt} & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3-q} & \sqrt{\frac{2}{p(3-q)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3-\frac{2}{p(3-q)}} \end{array} \right],$$

$$\begin{bmatrix} A_{34}^{(11)} & A_{35}^{(11)} \\ 0 & A_{45}^{(11)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{t} & 0 & 0 & \sqrt{3-t} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3-t} & 0 & 0 & -\sqrt{t} & \sqrt{\frac{1}{t}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3-2pt} & 0 & 0 & -\sqrt{3-\frac{1}{t}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2pt} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3-q} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3-\frac{1}{q}-\frac{2}{p(3-q)}} & 0 & 0 & -\sqrt{q} & \sqrt{\frac{1}{q}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{q}+\frac{2}{p(3-q)}} e^{i\varepsilon\theta_1} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3-\frac{1}{q}} e^{i\varepsilon\theta_2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Тут  $q = \frac{(2-p)(2p-1)}{(3-2pt)p}$ , і якщо позначити  $x = \frac{1}{q} + \frac{2}{p(3-q)}$ ,  $y = \frac{1}{q}$ , то  $\varepsilon = 0$  при  $x = 3$ , а при  $0 < x < 3$   $\varepsilon = \pm 1$  і

$$\cos \theta_1 = -\sqrt{\frac{(x-y)(3-x)}{x(3-x+y)}},$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{y(x-y)}{(3-y)(3-x+y)}},$$
(10)

$t$  і  $p$  – незалежні параметри (різним припустимим трійкам  $(p, t, \varepsilon)$  відповідають унітарно нееквівалентні зображення).

**Доведення.** Зображення  $T^{(1)} - T^{(4)}$  знаходять безпосередньо, розв'язуючи систему (9).

Зображення  $T^{(5)} - T^{(10)}$  припустимими перетвореннями зводяться спочатку до „канонічного” вигляду

$$T^{(5)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{11}^+ & a_{12}^+ & a_{13}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0|_1 & a_{22}^- & a_{23}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_{0,1} \end{array} \right],$$

$$T^{(6)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{11}^+ & a_{12}^+ & \vec{0}_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0|_4 & 0|_2 & a_{23}^+ & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{32}^+ & \vec{0}|_1 & a_{34}^+ & a_{35}^+ \\ \hline 0 & 0 & \vec{0}|_1 & a_{43}^+ & a_{44}^+ & a_{45}^- \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{0,1} \end{array} \right],$$

$$T^{(7)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} J_{1,0} & a_{11}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{21}^+ & a_{23}^+ & \vec{0}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{32}^+ & \vec{0}|_1 & a_{34}^+ & a_{35}^+ \\ \hline 0 & 0 & \vec{0}|_1 & a_{43}^+ & a_{44}^+ & a_{45}^- \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^+ \end{array} \right],$$

$$T^{(8)} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_{11}^+ & a_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{22}^+ & a_{23}^+ & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{33}^+ & a_{34}^+ & a_{35}^+ & \vec{0}|_1 \\ \hline 0 & 0 & a_{43}^+ & a_{44}^- & \vec{0}|_1 & a_{46}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^+ & \vec{0}_2 \end{array} \right],$$

$$T^{(9)} = \left[ \begin{array}{c|ccc|cc|cc|cc} J_{1,0} & a_{11}^+ & \vec{0}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{21}^+ & \vec{0}_7 & a_{23}^+ & \vec{0}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \downarrow_8 & a_{32}^+ & 0 \downarrow_5 & a_{34}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{43}^+ & \vec{0}_1 & a_{45}^+ & \vec{0}_2 & a_{47}^+ & \vec{0}_2 & \\ 0 & 0 & 0 & \vec{0}_1 & a_{54}^+ & a_{55}^+ & \vec{0}_4 & a_{57}^- & a_{58}^+ & \\ 0 & 0 & 0 & \vec{0}_1 & a_{64}^+ & 0 \downarrow_3 & a_{66}^+ & 0 \downarrow_3 & a_{68}^+ & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77}^+ & a_{78}^+ & \end{array} \right],$$

$$T^{(10)} = \left[ \begin{array}{c|cc|ccc|cc|cc} a_{11}^+ & a_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{22}^+ & a_{23}^+ & \vec{0}_7 & \vec{0}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \downarrow_8 & 0 \downarrow_6 & a_{35}^+ & a_{36}^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{43}^+ & \vec{0}_1 & \vec{0}_1 & a_{46}^+ & a_{47}^+ & \vec{0}_2 & \\ 0 & 0 & \vec{0}_1 & a_{54}^+ & \vec{0}_5 & a_{56}^+ & a_{57}^- & a_{58}^+ & \\ 0 & 0 & \vec{0}_1 & a_{64}^+ & a_{65}^+ & 0 \downarrow_3 & 0 \downarrow_4 & a_{68}^+ & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77}^+ & a_{78}^+ & \end{array} \right],$$

а потім матричні елементи знаходяться з системи (9). Для зображення  $T^{(11)}$  „канонічним” є вигляд (отриманий в [7])

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(11)} & A_{12}^{(11)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(11)} & A_{23}^{(11)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|ccc|ccc|cc} a_{11}^+ & a_{12}^+ & \vec{0}_{25} & \vec{0}_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 \downarrow_{26} & 0 \downarrow_{19} & a_{23}^+ & a_{24}^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{32}^+ & \vec{0}_{18} & \vec{0}_{18} & a_{35}^+ & \vec{0}_3 & \vec{0}_3 & \vec{0}_3 & \vec{0}_3 \\ 0 & 0 \downarrow_{20} & a_{43}^+ & \vec{0}_{21} & 0 \downarrow_2 & a_{46}^+ & a_{47}^- & \vec{0}_{17} & \vec{0}_{17} \\ 0 & 0 \downarrow_{20} & a_{53}^+ & a_{54}^+ & 0 \downarrow_2 & 0 \downarrow_{16} & a_{57}^+ & a_{58}^- & \vec{0}_{24} \\ 0 & 0 \downarrow_{20} & 0 \downarrow_{23} & a_{64}^+ & 0 \downarrow_2 & 0 \downarrow_{16} & 0 \downarrow_{22} & a_{68}^+ & a_{69}^- \end{array} \right],$$

$$\begin{bmatrix} A_{33}^{(11)} & A_{34}^{(11)} & A_{35}^{(11)} \\ 0 & 0 & A_{45}^{(11)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|cccc|ccc|ccc|ccc} a_{75}^+ & \vec{0}_1 & \vec{0}_1 & \vec{0}_1 & \vec{0}_1 & a_{7,10}^+ & \vec{0}_2 & \vec{0}_2 & a_{7,13}^+ & \vec{0}_2 & \vec{0}_2 & \vec{0}_2 \\ \hline \vec{0}_1 & a_{86}^+ & \vec{0}_5 & \vec{0}_5 & \vec{0}_5 & a_{8,10}^+ & \vec{0}_5 & \vec{0}_5 & a_{8,13}^- & a_{8,14}^+ & \vec{0}_5 & \vec{0}_5 \\ \vec{0}_1 & a_{96}^+ & a_{97}^+ & \vec{0}_9 & \vec{0}_9 & 0 \downarrow_4 & a_{9,11}^+ & \vec{0}_7 & 0 \downarrow_6 & a_{9,14}^- & \vec{0}_9 & \vec{0}_9 \\ \vec{0}_1 & 0 \downarrow_7 & a_{10,7}^+ & a_{10,8}^+ & \vec{0}_{11} & 0 \downarrow_4 & a_{10,11}^- & \vec{0}_{11} & 0 \downarrow_6 & 0 \downarrow_8 & a_{10,15}^+ & \vec{0}_{11} \\ \vec{0}_1 & 0 \downarrow_7 & 0 \downarrow_9 & a_{11,8}^+ & a_{11,9}^+ & 0 \downarrow_4 & 0 \downarrow_{10} & a_{11,12}^{\geq 0} & 0 \downarrow_6 & 0 \downarrow_{18} & a_{11,15}^- & a_{11,16}^+ \\ \vec{0}_1 & 0 \downarrow_7 & 0 \downarrow_9 & 0 \downarrow_{12} & a_{12,9}^+ & 0 \downarrow_4 & 0 \downarrow_{10} & a_{12,12}^c & 0 \downarrow_6 & 0 \downarrow_{18} & 0 \downarrow_{13} & a_{12,16}^c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13,13}^+ & a_{13,14}^+ & \vec{0}_{15} & \vec{0}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \downarrow_{14} & 0 \downarrow_{15} & a_{14,15}^+ & a_{14,16}^+ \end{array} \right].$$

Тут елементи  $a_{12,12}^c$  і  $a_{12,16}^c$  — комплексні числа. Позначаючи  $a_{53}^+ = \sqrt{p}$ ,  $a_{10,8}^+ = \sqrt{q}$ ,  $a_{7,10}^+ = \sqrt{t}$ , інші матричні елементи послідовно знаходять з системи (9). Нерозкладність отриманих зображень перевіряється безпосередньо (перевіряється їх шуровість), як і унітарна нееквівалентність зображень  $T^{(11)}$  для різних припустимих трійок  $(p, t, \varepsilon)$ .

Формули (10) отримують з умови ортогональності 11- і 12-го рядків матриці  $T^{(11)}$ :

$$\sqrt{(3-x+y)(x-y)} + \sqrt{(3-x)xe^{i\theta_1}} - \sqrt{(3-y)ye^{i\theta_2}} = 0.$$

Теорему доведено.

### 5. Зображення алгебри, асоційованої з розширеним графом Динкіна $\tilde{E}_8$ .

Нехай  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8})$  —  $*$ -алгебра, асоційована з графом  $\tilde{E}_8$ :

$$\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8}) = \mathbb{C}\langle a, b, c \mid a = a^*, \quad b = b^*, \quad c = c^*,$$

$$a(a-e)(a-2e)(a-3e)(a-4e)(a-5e) = 0,$$

$$b(b-2e)(b-4e) = 0, \quad c(c-3e) = 0, \quad a+b+c = 6e \rangle,$$

$\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\tilde{E}_8})$  — категорія скінченновимірних  $*$ -зображень  $*$ -алгебри  $\mathfrak{A}$ ,  $Q = Q_{\tilde{E}_8}$ ,  $\text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8})$  — повна підкатегорія в  $\text{Rep}_{os}(Q_{\tilde{E}_8}, \mathcal{H})$  зображень із фіксованим характером  $\delta_{\tilde{E}_8}$ .

Побудуємо функтор  $\Psi: \text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8}) \rightarrow \text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\tilde{E}_8})$  таким чином. Якщо  $T \in \text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8})$ , то покладемо  $A = T_{z,a_5} T_{z,a_5}^*$ ,  $B = T_{z,b_2} T_{z,b_2}^*$ ,  $C = T_{z,c} T_{z,c}^*$ ,  $\pi = (\pi(a), \pi(b), \pi(c)) = (A, B, C)$  — зображення алгебри  $\mathfrak{A}$ ,  $\Psi(T) = \pi$ . Якщо  $D = (D_i)_{i \in Q_v}$  — морфізм зображень,  $D: T \rightarrow \tilde{T}$ ,  $D \in \text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8})$ , то покладемо  $\Psi(D) = D_z: H_z \rightarrow \tilde{H}_z$  ( $D_z A = D_z T_{z,a_5} T_{z,a_5}^* = \tilde{T}_{z,a_5} D_{a_5} T_{z,a_5}^* = \tilde{T}_{z,a_5} \tilde{T}_{z,a_5}^* D_z = \tilde{A} D_z$ ; аналогічно перевіряємо, що  $D_z B = \tilde{B} D_z$  і  $D_z C = \tilde{C} D_z$ , тобто  $D_z \in \text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\tilde{E}_8})$ ).

**Лема.** Функтор  $\Psi$  є функтором еквівалентності категорій  $\text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8})$  і  $\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\tilde{E}_8})$ .

**Доведення.** Достатньо довести, що функтор: а) унівалентний, б) повний і в) кожний об'єкт  $\pi$  категорії  $\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\tilde{E}_8})$  еквівалентний об'єкту  $\Psi(T)$  для деякого  $T \in \text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8})$ .

а) Нехай  $T, \tilde{T} \in \text{Rep}(Q, \delta_{\tilde{E}_8})$ ,  $D, \bar{D}$  — морфізми з  $T$  в  $\tilde{T}$ . Нехай  $\Psi(D) = \Psi(\bar{D}) = D_z$ . Покажемо, що тоді  $D = \bar{D}$ , тобто функтор  $\Psi$  є унівалентним.

Дійсно, з  $T_{a_2,a_1}^* T_{a_2,a_1} = I_{a_1}$  і  $\tilde{T}_{a_2,a_1} D_{a_1} = D_{a_2} T_{a_2,a_1}$  випливає, що  $\tilde{T}_{a_2,a_1}^* \tilde{T}_{a_2,a_1} D_{a_1} = \tilde{T}_{a_2,a_1}^* D_{a_2} T_{a_2,a_1}$ , тобто  $D_{a_1} = \tilde{T}_{a_2,a_1}^* D_{a_2} T_{a_2,a_1}$  і  $D_{a_1}$  знаходиться за зображеннями  $T, \tilde{T}$  і  $D_{a_2}$  однозначно.

З  $T_{a_2,a_1}^* T_{a_2,a_1} = I_{a_1}$  випливає, що спектр  $\sigma(T_{a_2,a_1} T_{a_2,a_1}^*) \subseteq \{0, 1\}$ , а з  $T_{a_2,a_3} T_{a_2,a_3}^* + T_{a_2,a_1} T_{a_2,a_1}^* = 2I_{a_2}$  — що  $\sigma(T_{a_2,a_3} T_{a_2,a_3}^*) \subseteq \{1, 2\}$ , тобто матриця  $T_{a_2,a_3} T_{a_2,a_3}^*$  є оборотною. Тому з  $D_{a_3} T_{a_2,a_3}^* = \tilde{T}_{a_2,a_3}^* D_{a_2}$  випливає  $\tilde{T}_{a_2,a_3} \tilde{T}_{a_2,a_3}^* D_{a_2} = \tilde{T}_{a_2,a_3} D_{a_3} T_{a_2,a_3}^*$ , і внаслідок оборотності матриці  $\tilde{T}_{a_2,a_3} \tilde{T}_{a_2,a_3}^*$  за зображеннями  $T, \tilde{T}$  і матриці  $D_{a_3}$  матриця  $D_{a_2}$  знаходиться однозначно. Продовжуючи цей процес, отримуємо, що за зображеннями  $T, \tilde{T}$  і матриці  $D_z$  всі інші компоненти  $D_i$ ,  $i \in Q_v$ , морфізму  $D$  знаходяться однозначно.

Відносно доведень пунктів б) і в) ми відсилаємо до роботи [15] (теорема 1), де фактично будується функтор  $\Phi$ , „обернений” до функтора  $\Psi$ .

Використовуючи лему і теорему 1, переконуємось у справедливості наступного твердження.

**Теорема 2.** *Нерозкладні ортоскалярні зображення алгебри  $\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8})$ , пов’язаної з розширеним графом Динкіна  $\tilde{E}_8$ , з точністю до унітарної еквівалентності збігаються з одним із наступних попарно нееквівалентних зображень  $\pi^{(1)} - \pi^{(11)}$  (у подальшому  $\pi^{(i)}(a) = A^{(i)}$ ,  $\pi^{(i)}(b) = B^{(i)}$ ,  $\pi^{(i)}(c) = C^{(i)}$ ,  $i \in \overline{1, 11}$ ):*

$$A^{(1)} = 1, \quad B^{(1)} = 2, \quad C^{(1)} = 3,$$

$$A^{(2)} = 4, \quad B^{(2)} = 2, \quad C^{(2)} = 0,$$

$$A^{(3)} = 2, \quad B^{(3)} = 4, \quad C^{(3)} = 0,$$

$$A^{(4)} = 3, \quad B^{(4)} = 0, \quad C^{(4)} = 3,$$

$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{18}{5} \end{pmatrix},$$

$$C^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}, \quad A^{(6)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}, \quad C^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^{(7)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{(7)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$C^{(7)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad A^{(8)} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{(8)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{(8)} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(9)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B^{(9)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{23}{12} & -\frac{2\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

$$C^{(9)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{(10)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix},$$

$$B^{(10)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{25}{12} & -\frac{2\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \quad C^{(10)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{p,t,\varepsilon}^{(11)} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{p,t,\varepsilon}^{(11)} = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{p,t,\varepsilon}^{(11)} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^* & Z_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \frac{1}{t} & \sqrt{\left(3 - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t}} \\ 0 & \sqrt{\left(3 - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t}} & \frac{1}{t} + 2pt \end{pmatrix},$$

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2pt(3 - 2pt)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{22} = \begin{pmatrix} 3 - 2pt + q & \sqrt{q(3 - q)} & 0 \\ \sqrt{q(3 - q)} & 3 - q + \frac{2}{p(3 - q)} & \sqrt{\frac{2}{p(3 - q)} \left(3 - \frac{2}{p(3 - q)}\right)} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{p(3 - q)} \left(3 - \frac{2}{p(3 - q)}\right)} & 3 - \frac{2}{p(3 - q)} \end{pmatrix},$$

$$Y_{11} = \begin{pmatrix} 3-t & -\sqrt{(3-t)t} & 0 \\ -\sqrt{(3-t)t} & t + \frac{1}{t} & -\sqrt{\left(3-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}} \\ 0 & -\sqrt{\left(3-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}} & 3-\frac{1}{t} \end{pmatrix},$$

$$Y_{22} = \begin{pmatrix} 3-q & -\sqrt{q(3-q)} & 0 \\ -\sqrt{q(3-q)} & q + \frac{1}{q} & -\sqrt{q\left(3-\frac{1}{q}\right)}e^{-i\varepsilon\theta_2} \\ 0 & -\sqrt{q\left(3-\frac{1}{q}\right)}e^{i\varepsilon\theta_2} & 3-\frac{1}{q} \end{pmatrix},$$

$$Z_{11} = \begin{pmatrix} t & \sqrt{(3-t)t} & 0 \\ \sqrt{(3-t)t} & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-2pt \end{pmatrix},$$

$$Z_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{(3-2pt)2pt} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

якщо позначити  $x = \frac{1}{q} + \frac{2}{p(3-q)}$ ,  $y = \frac{1}{q}$ , то

$$Z_{22} = \begin{pmatrix} 2pt & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & \sqrt{(3-x)x}e^{-i\varepsilon\theta_1} \\ 0 & \sqrt{(3-x)x}e^{i\varepsilon\theta_1} & x \end{pmatrix}.$$

Тут  $q = \frac{(2-p)(2p-1)}{(3-2pt)p}$ ,  $\varepsilon = 0$  при  $x = 3$ , а при  $0 < x < 3$   $\varepsilon = \pm 1$  і

$$\cos \theta_1 = -\sqrt{\frac{(x-y)(3-x)}{x(3-x+y)}},$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{y(x-y)}{(3-y)(3-x+y)}},$$

$t$  і  $p$  – незалежні параметри (різним припустимим трійкам  $(p, t, \varepsilon)$  відповідають унітарно нееквівалентні зображення).



**6. Область зміни незалежних параметрів.** Опис нерозкладних зображень  $T_{p,t,\varepsilon}^{(11)}$ ,  $(A_{p,t,\varepsilon}^{(11)}, B_{p,t,\varepsilon}^{(11)}, C_{p,t,\varepsilon}^{(11)})$  буде не повним, якщо не вказати область припустимих значень незалежних параметрів  $p$  і  $t$ .

З невід'ємності підкоренових виразів у формулах для матричних елементів зображення легко отримати, що  $p \in [1/2, 2]$ , і при фіксованому  $p$  значення  $t \in [a_p, b_p]$ , де

$$a_p = \frac{3 \left( -1 - 2p^2 + \sqrt{1 - 10p + 16p^2} \right)}{2 \left( p - 5p^2 + p\sqrt{1 - 10p + 16p^2} \right)},$$

$$b_p = \frac{3 \left( 1 + 2p^2 + \sqrt{1 - 10p + 16p^2} \right)}{2 \left( -p + 5p^2 + p\sqrt{1 - 10p + 16p^2} \right)}.$$
(11)

Можна перевірити, що при  $t = a_p$  або  $t = b_p$ , але  $p \neq \frac{1}{2}$ ,  $p \neq 2$ ,  $a_{11,12}^{\geq 0} = \sqrt{3 - \frac{1}{q} - \frac{2}{p(3-q)}} = 0$ ,  $x = \frac{1}{q} + \frac{2}{p(3-q)} = 3$ , і з (10) випливає, що  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$ , тобто в цьому випадку зображення реалізується в дійсних числах.

При  $t = \frac{1}{3}$ , як легко бачити, з зображення виділяється прямим доданком зображення  $T^{(8)}$  ( $a_{8,6} = 0$ ,  $a_{8,14} = 0$ ), а його пряме доповнення розкладається в суму зображень  $T^{(6)}$  та  $T^{(7)}$ .

З  $p = \frac{1}{2}$  випливає, що  $t = 3$ , і в цьому випадку елементи  $a_{64} = 0$ ,  $a_{58} = 0$ ,  $a_{10,7} = 0$ ,  $a_{8,10} = 0$ ,  $a_{9,11} = 0$ ,  $a_{7,13} = 0$ , а зображення розкладається в суму зображень  $T^{(1)} - T^{(5)}$ . З  $p = 2$  випливає, що  $t = \frac{3}{4}$ , і в цьому випадку  $a_{43} = 0$ ,  $a_{57} = 0$ ,  $a_{10,7} = 0$ ,  $a_{9,11} = 0$ , а зображення розкладається в пряму суму зображень  $T^{(9)}$  і  $T^{(10)}$ .

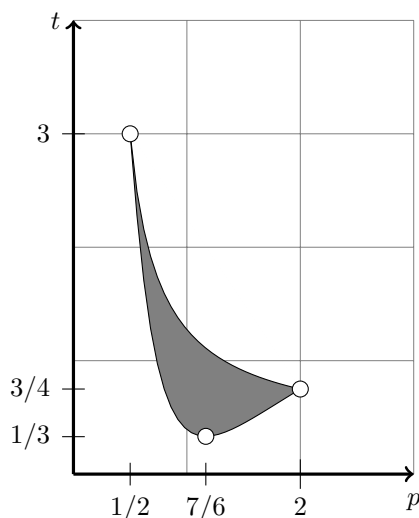
Для інших припустимих пар  $(p, t)$  безпосередньо перевіряється їх шуровість, а отже і нерозкладність. Зауважимо лише, що при  $\frac{1}{2} < p < 2$ ,  $a_p < t < b_p$  парі  $(p, t)$  відповідають два нерозкладних зображення, одне отримуємо з іншого заміною  $e^{i\theta_1}$  та  $e^{i\theta_2}$  на комплексно спряжені числа  $e^{-i\theta_1}$ ,  $e^{-i\theta_2}$ .

Нехай

$$M = \left\{ (p, t, \varepsilon) \mid \frac{1}{2} < p < 2, \quad a_p \leq t \leq b_p, \quad \varepsilon = 0 \text{ при } t = a_p, \text{ або } t = b_p, \right.$$

$$\left. \varepsilon = \pm 1 \text{ при } a_p < t < b_p, \quad (p, t, \varepsilon) \neq \left( \frac{7}{6}, \frac{1}{3}, 0 \right) \right\}$$

( $a_p$ ,  $b_p$  задано формулами (11)). Проекцію множини  $M$  на площину  $(p, t)$  зображено на рисунку.



Таким чином, доведено наступну теорему про параметри зображень  $T_{p,t,\varepsilon}^{(11)}$  колчана  $Q_{\tilde{E}_8}$  та  $\pi_{p,t,\varepsilon}^{(11)} = (A_{p,t,\varepsilon}^{(11)}, B_{p,t,\varepsilon}^{(11)}, C_{p,t,\varepsilon}^{(11)})$  алгебри  $\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8})$ .

**Теорема 3.** Нерозкладні зображення  $T_{p,t,\varepsilon}^{(11)}$  ( $\pi_{p,t,\varepsilon}^{(11)}$ ) колчана  $Q_{\tilde{E}_8}$  (алгебри  $\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_8})$ ) параметризуються точками множини  $M$  (різним точкам відповідають унітарно нееквівалентні зображення). При  $(p, t, \varepsilon) = (\frac{1}{2}, 3, 0)$  зображення  $T_{p,t,\varepsilon}^{(11)}$  ( $\pi_{p,t,\varepsilon}^{(11)}$ ) розкладається в пряму суму зображень  $T^{(1)} - T^{(5)}$  ( $\pi^{(1)} - \pi^{(5)}$ ), при  $(p, t, \varepsilon) = (2, \frac{3}{4}, 0)$  – в пряму суму зображень  $T^{(9)}, T^{(10)}$  ( $\pi^{(9)}, \pi^{(10)}$ ), а при  $(p, t, \varepsilon) = (\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, 0)$  – в пряму суму зображень  $T^{(6)} - T^{(8)}$  ( $\pi^{(6)} - \pi^{(8)}$ ).

Автори висловлюють подяку Ю. С. Самойленку за стимулюючу зацікавленість та корисні обговорення даної роботи.

1. Ostrovskiy V., Samoilenko Yu. Introduction to the theory of representations of finitely presented  $*$ -algebras. I. Representations by bounded operators, vol. 11 // Rev. Math. and Phys. – 1999. – **11**, № 1. – 261 p.
2. Albeverio S., Ostrovskiy V., Samoilenko Yu. On functions on graphs and representations of a certain class of  $*$ -algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**. – P. 567–582.
3. Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. О суммах проекторов // Функцион. анализ и прил. – 2002. – **36**, вып. 3 – С. 20–35.
4. Кругляк С. А., Ройтер А. В. Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Там же. – 2005. – **39**, вып. 2. – С. 13–30.
5. Редчук И. К., Ройтер А. В. Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции. // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 6. – С. 796–809.
6. Кругляк С. А., Назарова Л. А., Ройтер А. В. Ортогональные представления колчанов в категории гильбертовых пространств // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2006. – **338**. – С. 180–199.
7. Ройтер А. В., Кругляк С. А., Назарова Л. А. Ортогональные представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина, в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и прил. – 2010. – **44**, вып. 1. – С. 57–73.
8. Мелит А. С. Когда сумма трех частичных отражений равна нулю // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1277–1283.
9. Островський В. Л. Зображення алгебри, асоційованої з графом Динкіна  $\tilde{E}_7$  // Там же. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1193–1202.

10. *Mellit A.* Certain examples of deformed preprojective algebras and geometry of their  $*$ -representations // ArXiv: mat.RT/0502055v1.
11. *Островський В. Л., Самойленко Ю. С.* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556–1570.
12. *Kac V. G.* Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. II // J. Algebra. – 1982. – **78**. – P. 141–162.
13. *Crawley-Boevey W.* Lectures on representations of quivers, <http://www.maths.leeds.uk/pintwe/dintwe/quivless.pdf>.
14. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
15. *Kruglyak S. A., Popovych S. V., Samoilenko Yu. S.* Representations of  $*$ -algebras associated with Dynkin graphs and Horn's problem // Учен. зап. Тавр. нац. ун-та. – 2003. – **16(55)**, № 2. – С. 133–139.

Одержано 22.03.10