УДК 512.5

С. В. Гудзенко (Київ)

АВТОМОРФІЗМИ ФІНІТАРНОГО ФАКТОР-СТЕПЕНЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ

We consider the semigroup $FP^+_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ which is a finitary factor power of the finitary symmetric group of the denumerable order. We prove that all the automorphisms of $FP^+_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ are induced by permutations from $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

Рассматривается полугруппа $FP^+_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ — финитарная фактор-степень финитарной симметрической группы счетного порядка. Доказано, что все автоморфизмы $FP^+_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ индуцируются подстановками из $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

1. Вступ. Під фінітарною симетричною групою $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел розуміємо підгрупу

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) = \{\pi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} : |\{i : \pi(i) \neq i\} < \infty\}$$

симетричної групи $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

Поняття фінітарного фактор-степеня $FP^+_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ цієї групи було введено у роботі [1]. У загальному випадку фактор-степінь напівгрупи перетворень (S, M) (див. [2]) визначається як фактор-напівгрупа

$$P(S)/_{\sim_M},$$

де $P(S)$ — глобальна наднапівгрупа напівгрупи S, і для будь-яких $A, B \in P(S)$

$$A \sim_M B \Leftrightarrow \forall m \in M\, (A(m) = B(m)).$$

Іноді зручно використовувати задання елементів $FP(S)$ за допомогою представників відповідних класів конгруенції $\sim_M$. Серед конгруентних елементів із $P(S)$, упорядкованих за включенням, є найбільший. В якості канонічного представника класу конгруентності $A \in FP(S)$ виберемо його найбільшого представника. Це дає можливість використовувати для елементів фактор-степеня $FP(S)$ такі характеристики множин, як включення, потужність та інші.

Покладемо

$$FP_{\mathrm{fin}}(S) = \Big\{A \in FP(S)\colon \text{ існує така скінченна}$$

$$\text{підмножина } \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \subset S, \text{ що } A = \overline{\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}}\Big\}.$$

Оскільки у напівгрупі $FP_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ нуль $\overline{\{\varnothing\}}$ є приєднаним, розглянемо напівгрупу

$$FP^+_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})) = FP_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})) \setminus \overline{\{\varnothing\}},$$

яку далі будемо позначати коротко FP^+. Легко бачити, що напівгрупа FP^+ є періодичною.

Зауважимо, що група $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ природно вкладається в FP^+ таким чином: кожній підстановці $\pi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ співставимо узагальнену підстановку $A \in FP^+$ таку, що $A(i) = \{\pi(i)\}$. Тому вважатимемо, що $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) \subset FP^+$. Для зручності, щоб підкреслити належність елемента FP^+ до $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, іноді будемо позначати його маленькою літерою, тоді як елементи FP^+ зазвичай позначатимемо великими. $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ є максимальною підгрупою FP^+, яка складається з усіх оборотних елементів. Також $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ можна визначити як піднапівгрупу FP^+, яка складається з елементів потужності 1.

Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{S}_n$ природно вкладається в $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, і можна вважати, що $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, зокрема $FP^+(\mathfrak{S}_n) \subset FP^+$.

Кожній узагальненій підстановці $A \in FP^+$ співставимо орграф на множині $\mathbb{N}$ таким чином. З вершини i у вершину j існує стрілка тоді і тільки тоді, коли $j \in A(i)$. Зауважимо, що такий орграф має наступну властивість: якщо стрілка виходить з вершини, напівстепінь виходу якої більший за одиницю, то ця стрілка входить у вершину, напівстепінь входу якої більший за одиницю, і навпаки.

Основним результатом роботи є теорема, в якій стверджується, що всі автоморфізми напівгрупи FP^+ індукуються підстановками з $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

2. Нерозкладні узагальнені підстановки.

Означення 1. *Назвемо узагальнену підстановку $A \in FP^+$ нерозкладною, якщо з рівності $A = A_1 A_2$ випливає, що для кожного $i \in \{1, 2\}$ A_i або належить до $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, або отримується з A множенням на елементи з $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$.*

Розглянемо деякі $A \in FP^+$, a_1, $a_2 \in \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. Очевидно, що A є нерозкладною тоді і тільки тоді, коли $a_1 A a_2$ — нерозкладна.

Лема 1. *Всі елементи FP^+ потужності 2 є нерозкладними.*

Доведення. Нехай $A \in FP^+$ і $|A| = 2$. Розглянемо будь-який розклад $A = A_1 A_2$. Візьмемо деякі $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. Позначимо $A' = a_1^{-1} A a_2^{-1}$, $A_1' = a_1^{-1} A_1$, $A_2' = A_2 a_2^{-1}$. Тоді $A' = A_1' A_2'$ і $e \in A_1', e \in A_2'$, де e — тотожна підстановка. Звідси випливає, що $A_1' \subseteq A'$, $A_2' \subseteq A'$. Оскільки A, а відповідно і A', є двоелементною, то для кожного i $A_i' \in \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ або $A_i' = A'$. Відповідно $A_i' \in \mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ або $A_i = A a_2^{-1}$, якщо $i = 1$; $A_i = a_1^{-1} A$, якщо $i = 2$.

Лему доведено.

Приклад 1. *Якщо $n \geq 2$, то узагальнена підстановка $A = \overline{\{e, (1, 2, \ldots, n)\}}$, де e — тотожна підстановка, є нерозкладною.*

Доведення. Розглянемо будь-яку $a \in A$. Очевидно, що $a(i) = i$ для всіх $i > n$. Припустимо, що існує таке $i \leq n$, що $a(i) \neq i$. Позначимо знаком $\oplus$ операцію над цілими числами, яка визначається таким чином: $x \oplus y = [(x + y - 1) \bmod n] + 1$. Оскільки $A(i) = \{i, i \oplus 1\}$, то $a(i) = i \oplus 1$. $A(i \oplus 1) = \{i \oplus 1, i \oplus 2\}$. Оскільки $a(i \oplus 1) \neq a(i) = i \oplus 1$, то $a(i \oplus 1) = i \oplus 2$. Продовжуючи таким чином, отримуємо, що $a = (1, 2, \ldots, n)$. Тому $A = \overline{\{e, (1, 2, \ldots, n)\}}$, і $|A| = 2$, отже, A є нерозкладною.

Приклад 2. *Узагальнена підстановка $A = \overline{\{e, (1, 2)(3, 4)\}}$ є розкладною.*

Доведення. $A = A_1 A_2$, де $A_1 = \overline{\{e, (1, 2)\}}$, $A_2 = \overline{\{e, (3, 4)\}}$. A_1, A_2, очевидно, не є елементами $\mathfrak{S}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. Крім того, оскільки $|A_1| < |A|$, $|A_2| < |A|$, то A_1, A_2 не можна подати у вигляді добутку, одним із множників якого є A.

Лема 2. *Якщо орграф Γ_A, що відповідає узагальненій підстановці $A \in FP^+$, містить більше ніж одну компоненту зв'язності, кожна з яких містить верши-*

ну, напівстепінь входу або виходу якої більший за одиницю, то A *є розкладним елементом.*

Доведення. Нехай $A \in FP^+$ — узагальнена підстановка, яка містить більше однієї компоненти зв'язності, що містить вершину, напівстепені входу або виходу якої більші за одиницю. Розглянемо $N \subseteq \mathbb{N}$ — одну з таких компонент. Позначимо $M = \mathbb{N} \setminus N$. Оскільки за умовою N — не єдина така зв'язна компонента, то $|M| \neq \varnothing$ і M містить вершину, напівстепінь входу або виходу якої більший за одиницю. Узагальнена підстановка A індукує узагальнені підстановки $A|_N$ і $A|_M$, що діють відповідно на N і M. Оскільки до N входить вершина напівстепеня входу або виходу, більшого за одиницю, то $A|_N$ містить не менше двох підстановок. Аналогічно і $A|_M$ містить не менше двох підстановок.

Отже, ми можемо визначити узагальнені підстановки A_1, A_2 таким чином: $A_1(i) = \{i\}$, якщо $i \notin N$, $A_1(i) = A(i)$, якщо $i \in N$; $A_2(i) = \{i\}$, якщо $i \notin M$, $A_2(i) = A(i)$, якщо $i \in M$. За побудовою ці узагальнені підстановки не належать до $\mathfrak{S}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ і не існує таких $a, b \in \mathfrak{S}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, що $A_1 = aAb$ або $A_2 = aAb$. Очевидно, $A = A_1 A_2$. Отже, A є розкладною.

Лему доведено.

3. Ідемпотенти, породжені нерозкладними узагальненими підстановками. Розглянемо деяку нерозкладну узагальнену підстановку A. Оскільки $|A| < \infty$, то циклічна напівгрупа $\langle A \rangle$, за теоремою Фробеніуса (див. [3]), містить єдиний ідемпотент. Позначимо його E_A. З леми 2 випливає, що орграф Γ_A, який відповідає узагальненій підстановці A, має не більше однієї компоненти зв'язності, що містить вершини з напівстепенем входу або виходу, більшим за одиницю. Тому орграф Γ_{E_A} містить не більше однієї неодноелементної зв'язної компоненти.

Ця компонента, якщо вона існує, є повним графом на множині своїх вершин. Позначимо через $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ множину вершин цієї компоненти. Якщо ж такої компоненти не існує, тобто $E_A = e$, візьмемо $I = \{1\}$. Позначимо через b будь-яку підстановку, таку, що $b(I) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Нехай $C = bE_Ab^{-1}$, H_C — максимальна піднапівгрупа з нулем C. Очевидно, що $H_C = FP^+(\mathfrak{S}_n)$, а тому максимальна піднапівгрупа H_{E_A} з нулем E_A ізоморфна $FP^+(\mathfrak{S}_n)$.

З прикладу 1 випливає, що для будь-якого натурального n існує ідемпотент E_n, породжений нерозкладною узагальненою підстановкою, такий, що максимальна піднапівгрупа, для якої E_A є нулем, ізоморфна $\mathfrak{S}_n$.

Кожен ідемпотент B можна розкласти в добуток ідемпотентів, які породжені нерозкладними узагальненими підстановками. Для цього, наприклад, можна кожній нетривіальній компоненті зв'язності B зіставити множник — ідемпотент, для якого ця компонента зв'язності буде єдиною нетривіальною.

Означення 2. *Для будь-якого* $i \in \mathbb{N}$ *назвемо кущем* $Cl(i)$ *множину всіх тих ідемпотентів, породжених нерозкладними узагальненими підстановками, всі компоненти зв'язності яких, що не містять вершину* i, *є тривіальними.*

Розглянемо деяку узагальнену підстановку A і деякий ідемпотент B. Для того щоб ідемпотент B при множенні на A не змінювався, очевидно, необхідно і достатньо, щоб кожна компонента зв'язності орграфа, що відповідає A, містилася в деякій компоненті зв'язності орграфа, що відповідає B. Зокрема, серед усіх таких ідемпотентів існує мінімальний, і компоненти зв'язності його орграфа збігаються з компонентами зв'язності орграфа, що відповідає A. При цьому кожна компонента зв'язності ідемпотента є повним орграфом.

Таким же чином можна побудувати мінімальний ідемпотент, що не змінюється при множенні на кожну з узагальнених підстановок деякої множини $\{A_i\}_{i\in I}$. Для цього будується орграф, що є об'єднанням всіх орграфів цієї множини, і розглядаються компоненти зв'язності цього орграфа.

Лема 3. *Нехай $A_1, A_2 \in FP^+$ — ідемпотенти, породжені нерозкладними узагальненими підстановками, B — мінімальний ідемпотент, такий, що $A_iB = BA_i = B$ для $i = 1, 2$. Тоді B породжується нерозкладною узагальненою підстановкою тоді і тільки тоді, коли існує кущ, до якого належать A_1 і A_2.*

Доведення. Якщо $A_1 = e$ або $A_2 = e$, то доведення леми є очевидним.

Припустимо, що $A_1 \neq e, A_2 \neq e$. Якщо A_1 і A_2 належать до одного куща $Cl(j)$, то нетривіальні зв'язні компоненти орграфів, що відповідають цим узагальненим підстановкам, мають спільну точку. Тому орграф, що відповідає B, має одну нетривіальну зв'язну компоненту — об'єднання відповідних компонент A_1 і A_2. Як показано в прикладі 1, такий ідемпотент можна породити нерозкладною узагальненою підстановкою.

Якщо не існує куща, до якого б належали одночасно A_1 і A_2, то B, очевидно, має дві нетривіальні зв'язні компоненти — це будуть відповідні зв'язні компоненти ідемпотентів A_1 і A_2. З леми 2 випливає, що такий ідемпотент не може бути породжений нерозкладною узагальненою підстановкою.

Лему доведено.

4. Автоморфізми FP^+.

Теорема. $\operatorname{Aut}(FP^+) = \left\{\varphi : x \mapsto \tau x \tau^{-1}, \tau \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}\right\}.$

Доведення. Розглянемо деякий автоморфізм φ напівгрупи FP^+. Очевидно, що φ переводить ідемпотент у ідемпотент, а ідемпотент, породжений нерозкладною узагальненою підстановкою, — в ідемпотент, породжений нерозкладною узагальненою підстановкою.

Розглянемо нерозкладні елементи A_1 і A_2 з PF^+. За лемою 3 E_{A_1} і E_{A_2} належать до одного куща тоді і тільки тоді, коли мінімальний ідемпотент B, який не змінюється при множенні на E_{A_1} і E_{A_2}, породжений нерозкладною узагальненою підстановкою. У свою чергу ідемпотенти $\varphi(E_{A_1})$ та $\varphi(E_{A_2})$ належать до одного куща тоді і лише тоді, коли мінімальний ідемпотент C, який не змінюється при множенні на $\varphi(E_{A_1})$ та $\varphi(E_{A_2})$, породжений нерозкладною узагальненою підстановкою. Очевидно, що $C = \varphi(B)$, а тому те, що B породжений нерозкладною узагальненою підстановкою, рівносильно тому, що C породжений нерозкладною узагальненою підстановкою. Отже, φ також переводить кущ у кущ і діє на множині кущів бієктивно.

Оскільки кожному кущу однозначно відповідає певна точка з $\mathbb{N}$, то автоморфізм φ індукує деяку підстановку $\tau \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}\colon \tau(i) = j \Leftrightarrow \varphi(Cl(i)) = Cl(j)$. Розглянемо автоморфізм $\varphi_\tau\colon x \mapsto \tau x \tau^{-1}$. За побудовою φ_τ автоморфізм $\psi = \varphi\varphi_\tau^{-1}$ діє на множині кущів тотожно. Оскільки кожен ідемпотент, породжений нерозкладною узагальненою підстановкою, повністю визначається множиною кущів, до яких він належить, то і на множині таких ідемпотентів ψ діє тотожно. А оскільки кожен ідемпотент розкладається в добуток таких ідемпотентів, то ψ діє тотожно на множині всіх ідемпотентів.

Покажемо, що $\psi(A) = A$ для всіх $A \in FP^+$. За побудовою FP^+ знайдеться таке m, що $A \in FP^+(\mathfrak{S}_m)$. Як було показано, $FP^+(\mathfrak{S}_m)$ є піднапівгрупою FP^+ з нулем — ідемпотентом, породженим деякою нерозкладною узагальненою підстановкою. Тому $\psi(FP^+(\mathfrak{S}_m)) = FP^+(\mathfrak{S}_m)$, а $\psi|_{FP^+(\mathfrak{S}_m)}$ є автоморфізмом $FP^+(\mathfrak{S}_m)$.

У роботі [4] показано, що всі автоморфізми $FP^+(\mathfrak{S}_m)$ є внутрішніми, тому $\psi\colon x \mapsto \pi x \pi^{-1}$ для деякого $\pi \in \mathfrak{S}_m$. Але єдиний автоморфізм такого вигляду, який діє тотожно на множині ідемпотентів, є тотожним. Тому $\psi = \varphi\varphi_\tau^{-1}$ — тотожний і $\varphi = \varphi_\tau$, що й доводить теорему.

1. *Гудзенко С. В.* Відношення Гріна на фактор-степенях симетричної групи // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2004. – № 2. – С. 24 – 44.
2. *Ганюшкин А. Г., Мазорчук В. С.* Фактор-степени и индуцированные действия полугрупп преобразований // Третья междунар. конф. по алгебре: Сб. тез. – Красноярск, 1993. – С. 83 – 84.
3. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 36 с.
4. *Mazorchuk V.* All Automorphisms of $FP^+(S_n)$ are inner // Semigroup Forum. – 2000. – **60**. – P. 486 – 490.

Одержано 19.01.10