УДК 513. 835

Ю. Б. Зелинский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА В СФЕРУ

An exact estimate is obtained for minimum multiplicity of a continuous finite-to-one mapping of projective space into a sphere for all dimensions. For finite-to-one mappings of the projective space into the Euclidean space, an exact estimate for the considered multiplicity is found for $n = 2, 3$. For the case of $n \geq 4$, it is proved that this estimate does not exceed 4. A number of questions for the discussion are formulated.

Отримано точну оцінку мінімальної кратності неперервного скінченнократного відображення проективного простору в сферу для всіх розмірностей. Для скінченнократних відображень проективного простору в евклідів знайдено точну оцінку такої кратності при $n = 2, 3$. Для $n \geq$ ≥ 4 доведено, що ця оцінка не перевищує 4. Сформульовано ряд відкритих питань.

Главный вопрос, изучаемый в этой работе, связан с желанием установить, каким минимальным числом можно ограничить количество прообразов произвольной точки образа, если априори известна глобальная степень заданного отображения двух областей. Дополнительно предполагаем, что данное отображение реализует этот минимум. Оценки в одну сторону, а именно установление нижнего возможного значения этого минимума, получено в работах автора [1, 2].

Будем говорить, что отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств конечнократно, если прообраз $f^{-1}y$ произвольной точки $y \in Y$ содержит конечное или пустое множество точек. Далее предполагаем, что на рассматриваемых топологических пространствах задана структура многообразия и имеются непрерывные отображения этих многообразий или их подобластей. Также будем предполагать, что определена топологическая степень отображения $\deg f$ [3].

Теорема 1 [1]. *Пусть* $f : \overline{D} \to \overline{D}_1$ — *непрерывное отображение* (D *и* D_1 — *открытые подобласти многообразий* M^n *и* N^n *соответственно*) *такое, что*:

1) $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$,

2) *группа когомологий границы* $H_c^{n-1}(\partial D; \mathbb{Z}_2) \neq 0$ *и отображение групп когомологий* $f^* : H_c^{n-1}(f\,\partial D; \mathbb{Z}_2) \to H_c^{n-1}(\partial D; \mathbb{Z}_2)$, *индуцированное ограничением* $f\big|_{\partial D}$, *является эпиморфизмом.*

Тогда или $f\big|_D$ *является гомеоморфизмом, или существует точка* $y \in \operatorname{Int} D_1$, *имеющая не менее трех прообразов в* D. *Если же отображение* f *нульмерно, то в последнем случае множество* $A = \left\{ y \,|\, f^{-1}\right.$ *состоит не менее чем из трех точек*$\left.\right\}$ *имеет размерность* n.

Теорема 1, в частности, дает ответ на одну из проблем, поставленных А. Косинским [4], об отображении n-мерного листа Мебиуса.

Отметим, что условие 1 теоремы эквивалентно собственности отображения на $\operatorname{Int} D$ (отображение собственно, если прообраз произвольного компакта — компакт).

Отображение области называется внутренним, если образ каждого открытого множества открыт и прообраз произвольной точки состоит из изолированных точек.

Теорема 2 [2]. *Пусть* $f : \bar{D} \to \bar{D}_1$ *— непрерывное отображение областей степени* k *такое, что* $f(\partial D) \bigcap f(D) = \varnothing$. *Тогда или* f *— внутреннее отображение, или существует точка, имеющая не меньше чем* $|k| + 2$ *прообраза. Если же известно, что* f *— нульмерное отображение, то во втором случае множество точек, имеющих не менее чем* $|k| + 2$ *прообраза, имеет полную размерность.*

Будем говорить, что отображение принадлежит классу K_m, если прообраз каждой точки содержит не более m точек. В случае, когда хотим фиксировать отображаемые пространства, используем обозначение $K_m(X, Y)$.

Пусть $X = M^n$ — замкнутое n-мерное многообразие, а $Y = B^n$ — шар в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

В [5] установлено, что для отображений произвольных замкнутых двумерных многообразий в круг класс $K_2(M^2, B^2)$ не пуст в классе непрерывных отображений.

Далее будем изучать отображения проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ в сферу S^n и, в частности, в шар B^n. Для получения необходимых оценок кратности будем строить конкретное отображение. Чтобы упростить построение, разобьем проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ на две части: вырежем из него шар B^n. Оставшаяся часть называется n-мерным листом Мебиуса. По другому ее можно представлять себе как сферическое кольцо $S^{n-1} \times I$, где I — единичный отрезок, с отождествленными антиподальными точками одной из граничных сфер. Наша ближайшая задача — построить отображение n-мерного листа Мебиуса в шар B^n, которое будет гомеоморфизмом на границе, а каждая внутренняя точка шара будет иметь не более трех прообразов в листе Мебиуса. Свяжем эту задачу с другой задачей, изученной А. Косинским [4] и автором [6] в общем случае. Здесь мы рассмотрим ее упрощенный вариант, который приведет к решению поставленной задачи. Зададимся целью построить внутри шара B^n семейство жордановых кривых, каждая из которых соединяет пару антиподальных точек граничной сферы S^{n-1}, причем предполагаем, что эти кривые непрерывно зависят от концов. Отождествление антиподальных точек сферы S^{n-1} превращает ее в проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Поэтому если мы построим такое семейство кривых, то можем рассматривать его как непрерывное многозначное ацикличное отображение F проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ в шар B^n. График этого отображения $\Gamma(F)$ всегда гомеоморфен n-мерному листу Мебиуса, ведь цитируемое выше представление листа Мебиуса есть склеивание двух радиусов сферического кольца, которые соединяют антиподальные точки граничной сферы, в одну дугу

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \xrightarrow{\ q\ } & B^n \\ \downarrow & \nearrow & F \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} & & \end{array} \quad . \tag{1}$$

Проекция q графика является непрерывным отображением листа Мебиуса в шар. Следовательно, если мы сумеем построить соединение кривыми так, чтобы в каждой точке пересекалось не более трех кривых, то тем самым каждая точка образа при отображении q будет иметь не более трех прообразов. Построение проведем по индукции. Пусть $s = 2$. На плоскости рассмотрим круг с центром в начале координат. Точку граничной окружности с координатами (x, y), где $x \geq 0$, соединим с ее антиподальной точкой $(-x, -y)$ кривой, состоящей из пары отрезков $[(-x,\ y);\ (x,\ y)] \cup [(-x,\ y);\ (-x,\ -y)]$ (рис. 1).

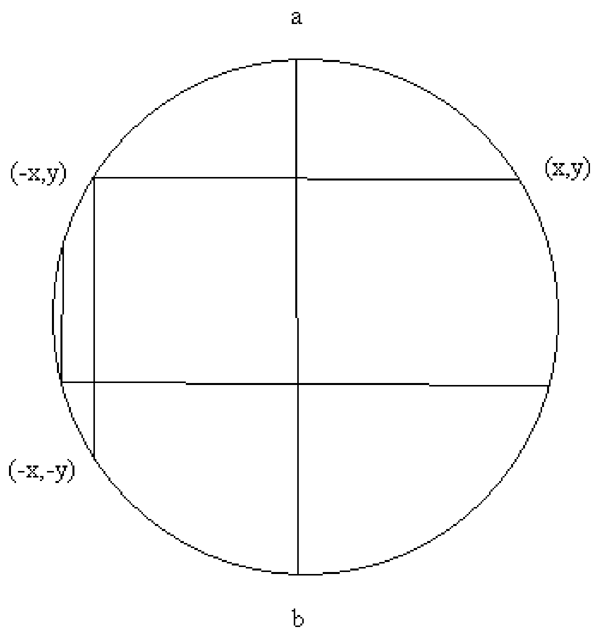

Рис. 1

Легко видеть, что внутри круга точки, через которые проходят ровно три кривые, заполняют внутреннюю часть левой половины круга. Через внутренние точки правой половины круга проходит по одной кривой. Второй шаг построения примера: преобразуем полученное соединение так, чтобы кривые пересекали окружность только в концевых точках. Это легко сделать, погрузив первоначальный круг в круг большего радиуса концентрично и продолжив каждую кривую двумя кусочками радиусов (рис. 2).

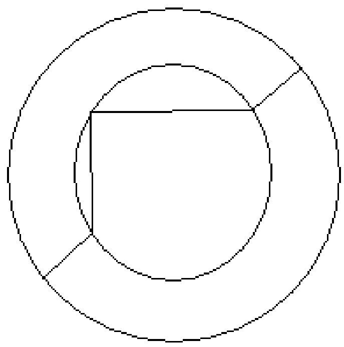

Рис. 2

Третий шаг, необходимый при n больше двух: если точки, через которые проходит больше одной кривой, не лежат в одном полушарии, то гомеоморфизмом можно деформировать шар так, чтобы они все лежали, не нарушая общности, в левом полушарии.

Дальнейшие рассуждения будем проводить по индукции. Пусть для некоторого $n \geq 2$ мы уже построили отображение листа Мебиуса в шар, которое принадлежит классу $K_3(M^n, B^n)$. Для упрощения выкладок будем считать, что шар B^{n+1} представляет собой надстройку над шаром B^n и координаты его точек $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, y_{n+1})$ можно представить в виде $y_i = x_i(1 - |t|)$ при $i = \overline{1, n}$, $-1 \leq t \leq 1$, через точки $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ шара B^n и $y_{n+1} = t$. Предположим также, что при $t = 0$ задано построенное по предположению индукции соединение антиподальных точек сферы кривыми, для которого проведены три шага, аналогичные шагам, выполненным выше. Следовательно, и при каждом $-1 \leq t \leq 1$ существует соединение пар точек $y' = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, y_{n+1})$ и $y'' = (-y_1, -y_2, -y_3, \ldots, -y_n, y_{n+1})$ кривой $C(y', y'')$ такое, что у точек, через которые проходят несколько кривых, первая координата отрицательна. Это соединение получим как распространение соединения в экваториальном шаре (при $y_{n+1} = 0$) на надстройку. Определим теперь кривую, которая соединит точки $y' = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, y_{n+1})$ и $y^* = (-y_1, -y_2, -y_3, \ldots, -y_n, -y_{n+1})$, где $y_1 \leq 0$, как объединение кривой $C(y', y'')$ и отрезка $\left[y'', y^*\right]$. Легко убедиться, что при таком соединении через каждую внутреннюю точку правого полушария (относительно первой координаты) проходит ровно три кривые. Таким образом, мы построили отображение листа Мебиуса в шар класса $K_3(M^n, B^n)$, что и завершает доказательство по индукции. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует непрерывное отображение n-мерного листа Мебиуса в шар B^n, которое является гомеоморфизмом на границе, а каждая внутренняя точка шара имеет не более трех прообразов в листе Мебиуса.*

Следствие 1. *Существует непрерывное отображение n-мерного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ в сферу S^n, для которого каждая точка образа имеет не более трех прообразов.*

Доказательство. Представим проективное пространство как объединение листа Мебиуса и шара $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = M^n \cup B^n$, склеенных по граничной сфере S^{n-1}. Сфера топологически представляет собой склейку по граничной сфере S^{n-1} двух шаров $S^n = B_1^n \cup B_2^n$. Как установлено выше, существует отображение f листа Мебиуса M^n в шар B_1^n, имеющее необходимые в данном случае условия внутри шара B_1^n и являющееся гомеоморфизмом на граничной сфере. Продолжим отображение f со сферы S^{n-1} до гомеоморфного отображения $f_1 : B^n \to B_2^n$ шаров, что всегда возможно. Очевидно, что построенное отображение проективного пространства удовлетворяет утверждению следствия.

Следствие 2. *Класс отображений $K_3(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, S^n)$ не пуст при любом n в классе непрерывных отображений.*

Заметим, что построенное в следствии 1 отображение f класса

$K_3(\mathbb{R}P^n, S^n)$ в сферу можно легко преобразовать некоторым гомеоморфизмом сферы $g : S^n \to S^n$ на себя так, чтобы точки, имеющие больше одного прообраза, лежали в сферическом секторе, который в плоскости двух первых координат x_1, x_2 сферы занимает угол раствора меньше чем $2\pi/k$. Применим к образу $g(S^n)$ отображение h, которое по первым двум координатам можно записать в комплексной форме как $(x_1 + ix_2)^k$, остальные координаты отображаются тождественно. Суперпозиция отображений hgf обладает тем свойством, что существуют точки, имеющие ровно $k+2$ прообраза, и нет точек, имеющих больше прообразов. Итак, мы получили следующее утверждение.

Теорема 4. *Класс отображений* $K_r(\mathbb{R}P^n, S^n)$ *не пуст при любом* $r \geq 3$ *в классе непрерывных отображений, причем существуют отображения этого класса, которые не принадлежат никакому классу* $K_m(\mathbb{R}P^n, S^n)$, *где* $m < r$.

Теорема 4, в частности, показывает, что оценка, полученная в теореме 2, неулучшаема.

Пусть заданы две пары топологических пространств (X, A) и (Y, B). Будем говорить, что отображение пар пространств f принадлежит классу $K_m[(X, A), (Y, B)]$ или согласовано, если отображение $f: X \to Y$ принадлежит классу $K_m(X, Y)$, а его сужение $f|_A : A \to B$ — классу $K_m(A, B)$.

Анализируя построенное в теореме 3 отображение, видим, что отображение листа Мебиуса согласовано, если в качестве листа Мебиуса меньшей размерности M^{n-1} рассматривается лист, получаемый при $t = 0$ как подмножество листа M^n.

***Следствие* 3.** *Класс согласованных отображений* $K_3\left[\left(M^n, M^{n-1}\right), (B^n, B^{n-1})\right]$ *не пуст при любом* $n \geq 3$ *в классе непрерывных отображений.*

***Следствие* 4.** *Класс согласованных отображений* $K_3\left[\left(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}\right), (S^n, S^{n-1})\right]$ *не пуст при любом* $n \geq 3$ *в классе непрерывных отображений.*

Доказательство легко получается из следствия 1, ведь гомеоморфизм шаров $f_1 : B^n \to B_2^n$ несложно выбрать согласованным.

Ограничение $n \geq 3$ в двух последних следствиях естественно, так как при $n = 1$ лист Мебиуса и проективное пространство вырождаются соответственно в отрезок и окружность.

В связи со следствиями 3 и 4 возникают естественные вопросы.

***Вопрос* 1.** Когда отображение топологических пространств из класса $K_m(A, B)$ можно продолжить до согласованного $K_m[(X, A), (Y, B)]$ отображения более широких пространств?

***Вопрос* 2.** Когда отображение топологических пространств из класса $K_m(A, B)$ можно продолжить до согласованного $K_r[(X, A), (Y, B)]$ отображения более широких пространств, где $r > m$ фиксировано?

***Вопрос* 3.** Существует ли отображение топологических пространств из класса $K_m(A, B)$, которое нельзя продолжить до согласованного конечнократного отображения более широких пространств?

Поставленные вопросы кажутся автору довольно сложными задачами в общем случае и ответы на них, кроме частных примеров пространств, рассмотренных выше и в [5], неизвестны.

Изменим предыдущую задачу. Будем изучать отображения проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ в сферу S^n с выколотой точкой или, что то же, в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Опять разобьем проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ на две части: лист Мебиуса и шар. Как и в теореме 3, сведем отображение листа Мебиуса в шар к соединению антиподальных точек сферы непрерывным семейством жордановых кривых, но в отличие от той задачи разрешим кривым не только проходить внутри шара, а и выходить за его пределы. Получим аналогичную (1) треугольную диаграмму отображений, в которой отображение q отображает график многозначного отображения $\Gamma(F)$ в евклидово пространство

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \xrightarrow{\;q\;} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & \nearrow & F \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} & & \end{array}. \tag{2}$$

При $n = 2$ необходимое соединение построил А. Косинский [4]. Для шара B^3 единичного радиуса зададим соединение антиподальных точек $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ граничной сферы кривой

$$K(y; -y) = \big[(y_1, y_2, y_3);\ (y_1, -1, y_3)\big] \cup$$

$$\cup \operatorname{arc}_{(0,-1,\,y_3)}\big((y_1, -1, y_3); (-y_1, -1, y_3)\big) \cup \big[(-y_1, -1, y_3);\ (-y_1, 1, y_3)\big] \cup$$

$$\cup \operatorname{arc}_{(-y_1,\,1,\,0)}\big((-y_1, 1, y_3);\ (-y_1, 1, -y_3)\big),$$

состоящей из трех отрезков $\big[(y_1, y_2, y_3);\ (y_1, -1, y_3)\big]$, $\big[(-y_1, -1, y_3);\ (-y_1, 1, y_3)\big]$, $\big[(-y_1, 1, -y_3);\ (-y_1, -y_2, -y_3)\big]$, и двух дуг окружностей $\operatorname*{arc}_{(0,-1,y_3)}\big((y_1, -1, y_3); (-y_1, -1, -y_3)\big)$, $\operatorname*{arc}_{(-y_1,1,0)}\big((-y_1, 1, y_3); (-y_1, 1, -y_3)\big)$ с центрами в точках $(0, -1, y_3)$, $(-y_1, 1, 0)$ соответственно, которые соединяют за пределами шара указанные в скобках пары точек: первая окружность лежит в плоскости $y_3 = \mathrm{const}$, вторая — в плоскости $-y_1 = = \mathrm{const}$. Не нарушая общности, предполагаем $y_2 \le 0$. Заметим, что при $y_3 = 0$ мы получим пример А. Косинского. Непосредственной проверкой легко убедиться, что образом под действием такого многозначного отображения (или, что то же, непрерывного отображения листа Мебиуса) будет замкнутая область евклидова пространства, которую можно получить как объединение всех шаров единичного радиуса с центрами на отрезке $[-1; 1]$ оси y_2.

На рис. 3 изображены четыре кривые, соединяющие четыре пары антиподальных точек, которые получаются из фиксированной точки сферы чередованием знаков координат. Каждая кривая состоит из горизонтального куска внешней к шару кривой, прямолинейного отрезка внутри шара и вертикального куска внешней кривой. Части, которые будут общими для двух различных кривых, выделены утолщенной линией. При этом через каждую внутреннюю точку шара с центром в начале координат проходит единственная кривая, а через остальные внутренние точки полученной фигуры проходят ровно две кривые. Как и в предыдущем случае, отсюда следует такое утверждение.

Теорема 5. *Существует непрерывное отображение n-мерного листа Мебиуса в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ такое, что каждая точка $\mathbb{R}^n$ имеет не более двух прообразов в листе Мебиуса при* $n = 2, 3$.

Построенное выше отображение при $n = 3$ обладает свойством согласованности для $n = 2$, если в нем ограничиться соединением антиподальных точек в экваториальной плоскости шара. К сожалению, построенная конструкция не обобщается по индукции на высшие размерности, и вопрос минимальной кратности подобного отображения остается открытым.

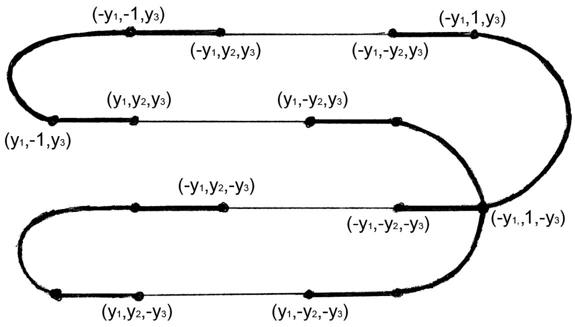

Рис. 3

***Следствие* 5.** *Существует непрерывное отображение n-мерного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ такое, что каждая точка $\mathbb{R}^n$ будет иметь не более двух прообразов при* $n = 2, 3$.

Этот факт доказывается аналогично доказательству следствия 1 разбиением проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = M^n \bigcup B^n$ на лист Мебиуса и шар, только в этом случае шар B^n отображаем гомеоморфно на шар единичного радиуса, который отображением листа Мебиуса в теореме 5 накрыт однократно.

***Вопрос* 4.** Будет ли непустым класс $K_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}^n)$ при $n > 3$?

Как и в предыдущем следствии, разбивая проективное пространство на две части, но используя при отображении листа Мебиуса построенное в теореме 3 отображение класса $K_3(M^n, B^n)$, лист Мебиуса и гомеоморфизм шара, получаем следующую, более грубую, чем в вопросе 4, оценку.

***Следствие* 6.** *Класс $K_4(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}^n)$ отображений n-мерного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ не пуст при любом n в классе непрерывных отображений.*

Следующие два открытых вопроса тесно связаны с рассмотренными задачами.

***Вопрос* 5.** Пусть $f : \bar{D} \to \bar{D}_1$ — непрерывное отображение областей n-мерных многообразий степени k такое, что $f(\partial D) \bigcap f(D) = \varnothing$. Всегда ли существует собственное отображение g, гомотопное f и такое, что каждая точка из образа области $g(D)$ имеет не более чем $|\deg f| + 2$ прообраза?

Пусть f — непрерывное отображение, заданное на границе области D в область D_1 n-мерного многообразия. Предположим также, что f принадлежит классу $K_k(\partial D, D_1)$.

***Вопрос* 6.** Когда существует непрерывное продолжение f на всю область, которое на $\mathrm{Int}\ D$ будет внутренним отображением?

1. *Зелинский Ю. Б.* О некоторых проблемах Косинского // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, №4. – С. 510 – 516.

2. *Зелинский Ю. Б.* О кратности непрерывных отображений областей // Там же. – 2005. – **57**, № 4. – С. 554 – 558.
3. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 2008. – **73**. – 308 с.
4. *Kosinski A.* On a problem of Steinhaus // Fund. math. – 1958. – **46**. – P. 47 – 59.
5. *Зелинский Ю. Б.* Об отображении областей на многообразиях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 149 – 152.
6. *Зелинский Ю. Б.* Об n-допустимых многозначных отображениях // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Вып. 7. – С. 61 – 83.
7. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
8. *Трохимчук Ю. Ю., Бондарь А. В.* О локальной степени нульмерного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений. – 1969. – Вып. 1. – С. 221 – 241.

Получено 26.01.10