УДК 517.98

Я. В. Горбатенко
(Навч.-наук. комплекс „Ін-т прикл. систем. аналізу" при Нац. техн. ун-ті України „КПІ", Київ)

КРИТЕРІЙ ТИПУ КОСТІНА ДЛЯ АБСТРАКТНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Linear differential equations with operator coefficients in a Banach space are considered. Necessary and sufficient conditions of the correctness of the Cauchy problem for arbitrary-order equations of this kind similar to the Kostin conditions for incomplete equations of second order are constructed.

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Построены необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для таких уравнений произвольного порядка, аналогичные условиям Костина для неполных уравнений второго порядка.

1. Вступ. Нехай X — слабко повний комплексний банахів простір, $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_{N-1}$ — лінійні оператори в X. Розглянемо наступну задачу Коші для диференціального рівняння N-го порядку:

$$u^{(N)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} A_k u^{(k)}(t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad 0 \le k \le N-1. \tag{1}$$

Задача (1) називається коректною, якщо:

1) у вихідному просторі X містяться щільні підпростори $D_0, \ldots, D_{N-1}$ такі, що для кожних початкових умов $u_0 \in D_0, \ldots, u_{N-1} \in D_{N-1}$ задача (1) має розв'язок;

2) існує додатна неспадна функція $M(t)$, що визначена на R^+, така, що для кожного розв'язку $u(t)$ виконується нерівність $\|u(t)\| \le$ $\le M(t) \sum_{k=0}^{N-1} \left\| u^{(k)}(0) \right\|, t \ge 0$.

Згідно з [1, с. 46], розв'язок коректної задачі (1) визначається формулою $u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k(t) u_k$, $t \ge 0$. Обмежені лінійні оператори $S_k(t)$ називаються операторами- розв'язками.

Задача (1) називається сильно коректною, якщо вона коректна та $\forall u \in X$, $1 \le k \le N-1$: $S_k(\cdot) u \in C^k(\mathrm{R}^+, X)$; $\forall t \ge 0$: $S_{N-1}^{(k-1)}(t) u \in D(A_k)$ та $A_k S_{N-1}^{(k-1)}(\cdot) u \in C(\mathrm{R}^+, X)$.

Основний критерій сильної коректності задачі (1) у загальному випадку дають теореми типу [1, 2]. Інший підхід до побудови достатніх умов викладено в [3]. Існують критерії сильної коректності для неповних рівнянь другого порядку, наприклад теорія косинус-функцій [4, 5]. Крім сильної коректності можна розглядати й інші варіанти коректності задачі [6, 7]. Альтернативним підходом є розгляд функціональних рівнянь, які задовольняють розв'язки, наприклад, у роботах [8, 9].

2. Основний результат. Нехай $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ — двічі диференційовна функція, така, що:

1) $g(t) \geq 0$ при $t > 0$, $g(t) = 0$ при $t \leq 0$;

2) g та g'' мають від'ємний показник степеня росту, тобто існують $M_g > 0$, $M_{g''} > 0$, $\omega_g < 0$, $\omega_{g''} < 0$ такі, що для будь-якого $t > 0$ $|g(t)| \leq \leq M_g e^{\omega_g t}$, $|g''(t)| \leq M_{g''} e^{\omega_{g''} t}$;

3) $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = 1$.

Перетворення Лапласа функції $g(t)$ позначимо через $G(\lambda)$. Відмітимо властивості функції $G(\lambda)$, які знадобляться у подальшому:

1) функція $G(\lambda)$ визначена та аналітична при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$,

2) $G(0) = 1$,

3) існує $C_1 > 0$ таке, що $|G(\lambda)| \leq \dfrac{C_1}{|\lambda|^2}$ при $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Пункт 3 випливає з наступного: якщо $\hat{g}''(\lambda)$ — перетворення Лапласа g'', то при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$: $\hat{g}''(\lambda) = \lambda^2 G(\lambda) - \lambda g(0) - g'(0)$ і $|G(\lambda)| = = \left|\dfrac{\hat{g}''(\lambda) + g'(0)}{\lambda^2}\right|$, а $\hat{g}''(\lambda)$ обмежена при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

Для $\tau > 0$ позначимо $g_\tau(t) = \dfrac{1}{\tau} g\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$. Перетворенням Лапласа функції $g_\tau(t)$ є вираз $G(\tau\lambda)$, $\{g_\tau(t)\}$ — δ-подібна послідовність при $\tau \to 0+$.

Нехай $\omega_1 > \omega > 0$. Назвемо *H_τ-перетворенням* функції $F\colon \{\lambda \in \mathrm{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > > \omega\} \to X$ вираз

$$(H_\tau F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega_1 - i\infty}^{\omega_1 + i\infty} e^{t\lambda} G(\tau\lambda)\, F(\lambda)\, d\lambda .$$

Домовимось, що функція $F\colon \{\lambda \in \mathrm{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \to X$ задовольняє умову K, якщо:

K_1) $F(\lambda)$ аналітична в області визначення;

K_2) $\forall\, \omega_2 > \omega \quad \exists\, C > 0 : \|F(\lambda)\| \leq C$ при $\operatorname{Re}\lambda \geq \omega_2$;

K_3) $\exists\, \varepsilon > 0$, $M > 0$ $\forall\, t \geq 0$, $\tau \in (0; \varepsilon) : \|(H_\tau F)(t)\| \leq M e^{\omega t}$.

Зауважимо, що з умов K_1, K_2 випливає абсолютна збіжність інтеграла в $H_\tau F$ в умові K_3 (це буде доведено в лемі 2).

Позначимо $R_\lambda = \left(\lambda^N + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k A_k\right)^{-1}$.

Теорема 1. *Нехай* $\omega > 0$ *та* $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ *— замкнені лінійні оператори в* X. *Для того щоб задача* (1) *була сильно коректною, необхідно і достатньо, щоб*:

1) $\bigcap_{i=0}^{N-1} D(A_i)$ *була щільною в* X; *для кожного* λ *такого, що* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, R_λ *є обмеженим оператором; для* $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *оператор* $R_\lambda A_k$ *має замикання;*

2) *при* $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *функції аргументу* λ: $\lambda^{k-1} A_k R_\lambda$, $\lambda^{k-1} \overline{R_\lambda A_k}$ *задовольняли умову* K.

При цьому:

$$\forall\, u \in X\,, \quad t > 0\colon \quad S_k(t)\,u \;=\; \lim_{\tau \to 0+} \left(H_\tau \left(\lambda^{-k-1} \sum_{i=k+1}^{N} \lambda^i\, \overline{R_\lambda A_i}\, u \right) \right)(t)\,,$$

$$1 \le k \le N-1,$$

$$\forall\, u \in D(A_0)\,, \quad t > 0\colon \quad S_0(t)\,u \;=\; \lim_{\tau \to 0+} \left(H_\tau \left(\lambda^{-1} - \lambda^{-1} R_\lambda A_0 u \right) \right)(t)\,.$$

3. Доведення теореми 1. Для доведення теореми знадобиться наступна теорема.

Теорема 2 [2, с. 56 – 65]. *Нехай* $\omega > 0$ *та* $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ — *замкнені лінійні оператори в* X. *Для того щоб задача* (1) *була сильно коректною, необхідно і достатньо, щоб*:

1) $\bigcap_{i=0}^{N-1} D(A_i)$ *була щільною в* X; *для кожного* λ *такого, що* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, R_λ *є обмеженим оператором; для* $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *оператор* $R_\lambda A_k$ *має замикання;*

2) *існувало* $M > 0$ *таке, що для будь-якого* $n \in \{0, 1, \ldots\}$, $k \in \{1, \ldots, N\}$, $\lambda > \omega$:

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \lambda^{k-1} A_k R_\lambda \right\| \le \frac{M\, n!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}, \qquad \left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \lambda^{k-1} \overline{R_\lambda A_k} \right\| \le \frac{M\, n!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}. \tag{2}$$

При цьому:

1) $\lambda^{k-1} A_k R_\lambda$, $\lambda^{k-1}\overline{R_\lambda A_k}$, $1 \le k \le N$, — *зображення Лапласа деяких неперервних функцій;*

2) $\lambda^{-k-1} \sum_{i=k+1}^{N} \lambda^i\, \overline{R_\lambda A_i}$ — *зображення Лапласа* $S_k(t)$, $1 \le k \le N-1$;

3) *для будь-якого* $u \in D(A_0)$ $(\lambda^{-1} - \lambda^{-1} R_\lambda A_0)\,u$ — *зображення Лапласа* $S_0(t)\,u$.

Зауважимо, що п. 1 теореми 1 та п. 1 теореми 2 збігаються.

Лема 1. *Нехай* $F\colon \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \to X$ — *перетворення Лапласа неперервної функції* $f\colon \mathbb{R}^+ \to X$ *такої, що* $\exists\, M > 0 \quad \forall\, t > 0\colon \|f(t)\| \le Me^{\omega t}$. *Тоді*

$$\forall\, \tau > 0\,, \quad t > 0\colon \quad \|(H_\tau F)(t)\| \le Me^{\omega t}, \quad f(t) = \lim_{\tau \to 0+} (H_\tau F)(t)\,.$$

Доведення. Нехай $\tau > 0$, $t > 0$, $\omega_1 > \omega$. Тоді

$$\|(H_\tau F)(t)\| \;=\; \left\| \int_{\omega_1 - i\infty}^{\omega_1 + i\infty} e^{t\lambda} G(\tau\lambda)\, F(\lambda)\, d\lambda \right\| \;=\; \left\| \int_0^t g_\tau(t-s)\, f(s)\, ds \right\| \;\le$$

$$\le\; Me^{\omega t} \int_0^t g_\tau(t-s)\, ds \;\le\; Me^{\omega t}\,.$$

Збіжність $(H_\tau F)(t) = \int_0^t g_\tau(t-s)\, f(s)\, ds \xrightarrow[\tau \to 0+]{} f(t)$ має місце, оскільки $\{g_\tau(t)\}$ — δ-подібна послідовність при $\tau \to 0+$.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $F\colon \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \to \mathbb{C}$ *задовольняє умову* K. *Тоді*

$$\forall n \geq 0, \quad \lambda \in \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} : \left| \frac{d^n}{d\lambda^n} F(\lambda) \right| \leq \frac{M\, n!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}. \tag{3}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що при фіксованому $\tau > 0$ функція $F_1(\lambda) = G(\tau\lambda)\, F(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, є перетворенням Лапласа функції $(H_\tau F)(t)$. Перевіримо достатні умови існування оригіналу Лапласа. Для довільного $\omega_2 > \omega$ $F_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda \geq \omega_2$, бо $G(\lambda) \to 0$, а $|F(\lambda)| \leq C$ завдяки умові K_2. Далі,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\tau(\omega_2 + iy))\, F(\omega_2 + iy)|\, dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_1}{\tau^2 |\omega_2 + iy|^2} C\, dy = \frac{C_1 C \pi}{\omega_2} \frac{1}{\tau^2}.$$

Тепер, використовуючи умову K_3, отримуємо

$$\forall n \geq 0, \quad \lambda \ \text{ із } \ \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad \tau \in (0; \varepsilon) : \left| \frac{d^n}{d\lambda^n} G(\tau\lambda)\, F(\lambda) \right| =$$

$$= \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n (H_\tau F)(t)\, dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} t^n e^{\omega t}\, dt = \frac{M\, n!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}.$$

Нагадаємо, що $G(\tau\lambda) \to 1$ при $\tau \to 0+$. Звідси можна за індукцією отримати (3). Зафіксуємо λ із $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. При $n = 0$ виконання шуканої нерівності є очевидним. При $n \geq 1$

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\big(G(\tau\lambda)\, F(\lambda)\big) = G(\tau\lambda) \frac{d^n}{d\lambda^n} F(\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k}{d\lambda^k} G(\tau\lambda) \frac{d^{n-k}}{d\lambda^{n-k}} F(\lambda),$$

$$\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} F(\lambda) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|G(\tau\lambda)|} \left(\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} (G(\tau\lambda)\, F(\lambda)) \right| + \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} G(\tau\lambda) \right| \left| \frac{d^{n-k}}{d\lambda^{n-k}} F(\lambda) \right| \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|G(\tau\lambda)|} \left(\frac{M\, n!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \tau^k \left| \frac{d^k}{d\mu^k} G(\mu) \right|_{\mu = \tau\lambda} \left| \frac{M\, k!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+1}} \right. \right).$$

При $\tau \to 0+$ $|G(\tau\lambda)| \to 1$, перший доданок всередині дужок не залежить від τ, а другий (зі знаком суми) прямує до 0, бо $\dfrac{d^k}{d\mu^k} G(\mu)$ обмежена при $|\mu| = |\tau\lambda| \leq \varepsilon |\lambda|$ (це похідна аналітичної функції). Отримуємо (3).

Лему доведено.

Лема 3. *Нехай* $F \colon \{\lambda \in \mathrm{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \to X$ *задовольняє умову* K. *Тоді*

$$\forall n \geq 0, \quad \lambda \in \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} : \left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} F(\lambda) \right\| \leq \frac{M\, n!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}. \tag{4}$$

Доведення. Візьмемо лінійний функціонал $y \in X^*$, $\|y\| = 1$. Тоді $y(F(\cdot))$: $\{\lambda \in \mathrm{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\} \to \mathrm{C}$ задовольняє умову K (роль банахового простору відіграє C). Отже, за лемою 2 для будь-якого $n \geq 0$ та λ із $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ $\left| y\left(\frac{d^n}{d\lambda^n} F(\lambda)\right)\right| = \left|\frac{d^n}{d\lambda^n} y(F(\lambda))\right| \leq \frac{M\,n!}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^{n+1}}$; завдяки довільності вибору y (із $\|y\| = 1$) виконується і (4).

Лему доведено.

Доведення теореми. *Необхідність.* За теоремою 2 вирази $\lambda^{k-1} A_k R_\lambda$, $\lambda^{k-1}\overline{R_\lambda A_k}$ — зображення перетворення Лапласа неперервних функцій. Тому кожен із них задовольняє умови K_1 та K_3 (за лемою 1). Умова K_2 безпосередньо випливає із (2).

Достатність. Застосувавши лему 3 до кожного із виразів $\lambda^{k-1} A_k R_\lambda$, $\lambda^{k-1}\overline{R_\lambda A_k}$, $1 \leq k \leq N$, отримаємо (2).

Вирази для $S_k(t)$ отримуємо, застосовуючи лему 1 до $\lambda^{-k-1}\sum_{i=k+1}^{N} \lambda^i \overline{R_\lambda A_i}$, $1 \leq k \leq N-1$, та $\left(\lambda^{-1} - \lambda^{-1} R_\lambda A_0\right) u$, $u \in D(A_0)$, які згідно з теоремою 2 є перетворенням Лапласа відповідно $S_k(t)$ та $S_0(t)\,u$.

Теорему доведено.

Перевагою теореми 1 над теоремами типу ХІФФМ є те, що вона містить лише скінченну кількість умов на $\lambda^{k-1} A_k R_\lambda$, $\lambda^{k-1}\overline{R_\lambda A_k}$.

1. *Xiao T. J., Liang J.* The Cauchy problem for higher-order abstract differential equations. – Berlin etc.: Springer, 1998. – 302 p.
2. *Xiao T. J., Liang J.* On complete second order linear differential equations in Banach spaces // Pacif. J. Math. – 1990. – **142**, № 1. – P. 175 – 195.
3. *Vlasenko L. A., Piven' A. L., Rutkas A. G.* Criteria for the well-posedness of the Cauchy problem for differential operator equations of arbitrary order // Ukr. Mat. Zh. – 2004. – **56**, № 10. – P. 1766 – 1781.
4. *Fattorini H. O.* Second order linear differential equations in Banach spaces. – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1985. – 313 p.
5. *Костин В. А.* Точно-равномерная корректная разрешимость начально-краевых задач для уравнений в банаховом пространстве и абстрактные специальные функции: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Воронеж, 1994. – 230 с.
6. *Gorbachuk M. L., Kashpirovskij A. I.* On weak solutions of differential equations in Hilbert spaces // Ukr. Mat. Zh. – 1981. – **33**, № 4. – P. 392 – 396.
7. *Chernobai O. B.* On generalized solutions of differential equations with operator coefficients // Ukr. Mat. Zh. – 2006. – **58**, № 5. – P. 808 – 814.
8. *Богданський Ю. В.* Експоненціальні косинус-функції // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2007. – № 6. – С. 140 – 144.
9. *Melnikova I. V.* Degenerate Cauchy problem in Banach spaces // Изв. УрГУ. – 1998. – Вып. 10. – С. 147 – 160.

Одержано 30.10.08,
після доопрацювання — 30.03.10