УДК 519.21

І. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. В. Малик (Чернівец. нац. ун-т)

ЗБІЖНІСТЬ НАПІВМАРКОВСЬКОГО І СУПРОВОДЖУЮЧОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСІВ ДО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

We propose a new approach to the proof of weak convergence of a semi-Markov process to a Markov process under conditions on local characteristics of semi-Markov process.

Предлагается подход к доказательству слабой сходимости полумарковского процесса к марковскому в условиях, налагаемых на локальные характеристики полумарковского процесса.

У роботі [1] умови слабкої збіжності сім'ї напімарковських процесів (НМП) до марковського процесу (МП) сформульовано в термінах компенсуючого оператора (КО) [2]. При цьому напівмарковській сім'ї $\xi^h(t)$, $t \ge 0$, $h \downarrow 0$, поставлено у відповідність розподіли, а саме, сім'ю мір $P^h_{s,x}$. Для доведення слабкої збіжності цих мір при $h \downarrow 0$ спочатку доводиться відносна компактність сім'ї $P^h_{s,x}$, $h > 0$, а потім єдиність граничного розподілу при $h \downarrow 0$. При цьому застосовується характеризація міри за допомогою мартингальних задач (див. [3]).

У даній роботі запропоновано підхід до доведення слабкої збіжності НМП до МП в умовах, що накладаються на локальні характеристики НМП. Зауважимо, що відносна компактність сім'ї НМП (лема 4) доводиться аналогічно роботі [1], але існування граничного процесу встановлено зовсім іншим методом.

Для порівняння нагадаємо, що в [1] з метою отримання граничного оператора і доведення існування граничного процесу вимагаються наступні умови: по-перше, час перебування процесу в певному стані повинен прямувати до 0 при $h \downarrow 0$, а по-друге, величини стрибків процесу також мають прямувати до 0 при $h \downarrow 0$.

Нарешті, остання умова полягає в тому, що КО НМП збігається при $h \downarrow 0$ до деякого оператора $\mathfrak{A}^0$ на класі обмежених неперервних функцій.

Теорема з [1] стверджує, що оператор $\mathfrak{A}^0$ збігається з генератором граничного МП.

В даній роботі ми пропонуємо замінити умови щодо часу перебування та величини стрибка умовами пуассонівської апроксимації $\Pi_1 - \Pi_4$ (див. [4]). При цьому виникає суттєва відмінність від [1], а саме, умови пуассонівської апроксимації накладаються на величину стрибків та ймовірності переходу вкладеного ланцюга Маркова, а умова збіжності КО до деякого оператора взагалі не потрібна. Збіжність КО до граничного генератора марковського процесу випливає з умов $\Pi_1 - \Pi_4$ та доводиться в лемах 1, 2.

Отже, досліджується наступна задача: напівмарковський процес $\eta^\varepsilon(t)$ в евклідовому просторі R^d, $d \ge 1$, у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, породжується процесом марковського відновлення (ПМВ) (див., наприклад, [4])

$$\eta_n^\varepsilon,\ \tau_n^\varepsilon,\ n \ge 0,$$

де $\tau_n^\varepsilon := \varepsilon\tau_n$, $\theta_n^\varepsilon := \varepsilon\theta_n$, $\tau_0^\varepsilon = 0$, $\eta^\varepsilon(t) = \eta^\varepsilon_{\nu^\varepsilon(t)}$, $\nu^\varepsilon(t) = \sup\{n \ge 0 :\ \tau_n^\varepsilon \le t\}$.

ПМВ визначається стохастичним ядром, яке задає умовні ймовірності величини стрибків, та функціями розподілу часів перебування в станах

$$\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) \;:=\; \mathrm{P}\left\{ \eta^{\varepsilon}_{n+1} \in dv \;\middle|\; \eta^{\varepsilon}_{n} = u \right\}, \qquad u \in R^d, \quad dv \in \mathcal{R}^d,$$

$$F_u(t) \;:=\; \mathrm{P}\left\{ \theta_{n+1} \le t \;\middle|\; \eta^{\varepsilon}_{n} = u \right\} \;=\; \mathrm{P}(\theta_u \le t), \qquad t \ge 0,$$

$$b(u) \;:=\; 1/f(u), \qquad f(u) \;:=\; \int_0^{\infty} \bar{F}_u(t)\,dt, \qquad \bar{F}_u(t) \;:=\; 1 - F_u(t).$$

Отже, напівмарковське ядро

$$Q(u,\,dv,\,t) \;=\; \mathrm{P}\left\{ \eta^{\varepsilon}_{n+1} \in dv,\, \theta_{n+1} \le t \;\middle|\; \eta^{\varepsilon}_{n} = u \right\} \;=\; \Gamma^{\varepsilon}(u,dv)\,F_u(t).$$

Нехай виконуються умови пуассонівської апроксимації [4]:

П$_1$) $\int_{R^d} \left| v \right| \Gamma^{\varepsilon}(u,dv) \;=\; \varepsilon[a^{+}(u) + R^{\varepsilon}_{a^{+}}(u)]$, $\int_{R^d} v\,\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) \;=\; \varepsilon[a(u) + R^{\varepsilon}_{a}(u)]$;

П$_2$) $\int_{R^d} vv^{*}\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) \;=\; \varepsilon[C(u) + R^{\varepsilon}_{c}(u)]$;

П$_3$) $\int_{R^d} \psi(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) \;=\; \varepsilon[\Gamma^{0}_{\psi}(u) + R^{\varepsilon}(u)], \quad \psi \in C_2(R^d)$,

де $C_2(R^d)$ — простір усіх неперервних функцій, що дорівнюють 0 в околі 0 і таких, що мають границю на нескінченності. Згідно з [5] функції з цього простору є такими, що визначають міру, тобто міра (Радона) відновлюється за формулою

$$\Gamma^{0}_{\psi}(u) \;=\; \int_{R^d} \psi(v)\,\Gamma^{0}(u,dv), \qquad \psi \in C_2(R^d).$$

Залишкові члени в умовах П$_1$ – П$_3$ прямують до 0 при $\varepsilon \to 0$:

$$\left| R^{\varepsilon}_{c}(u) \right| + \left| R^{\varepsilon}_{a^{+}}(u) \right| + \left| R^{\varepsilon}(u) \right| \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

***Зауваження* 1.** Для порівняння наведемо умови, що накладаються в роботі [1] на час перебування та величину стрибків НМП ($P^{h}_{s,x}$ — відповідна процесу сім'я мір):

1) для будь-якого компакта K та будь-якого $\varepsilon > 0$ $h^{-1}P^{h}_{s,x}\{(\tau_1 - s) \ge \varepsilon\} \to$ $\to 0$, $h \downarrow 0$ рівномірно по s, x;

2) для будь-якого компакта K та будь-якого $\varepsilon > 0$ $h^{-1}P^{h}_{s,x}\{\rho(\xi(\tau_1), x) \ge \varepsilon\} \to$ $\to 0$, $h \downarrow 0$ рівномірно по s, x, де τ_1 — марковський момент відновлення.

Нехай має місце також умова

П$_4$) функції $a(u)$, $C(u)$, $a^{+}(u)$ та $\Lambda^{0}(u) := \Gamma^{0}(u, R^d)$ є обмеженими.

Означення 1 [2, 6]. *КО НМП* $\eta^{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, *він же генератор супроводжуючого марковського процесу* (*СМП*) $\eta^{\varepsilon}_{0}(t)$, $t \ge 0$, *що діє на тест-функціях* $\varphi(u,t)$, *визначається рівністю*

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,t) \;:=\; \mathrm{E}\Big[\,\varphi(\eta_{n+1}^{\varepsilon},\tau_{n+1}^{\varepsilon})-\varphi(u,t)\;\big|\;\eta_n^{\varepsilon}=u,\;\tau_n^{\varepsilon}=t\,\Big]\Big/\mathrm{E}\Big[\,\theta_{n+1}^{\varepsilon}\;\big|\;\eta_n^{\varepsilon}=u\,\Big]. \tag{1}$$

Теорема (слабка збіжність сім'ї НМП до МП). *Нехай виконуються умови* $\Pi_1 - \Pi_4$, *а також наступні умови*:

У$_1$) *рівномірна інтегровність*

$$\sup_{u\in R^d}\int_T^{\infty}\bar{F}_u(t)\,dt \;\to\; 0 \quad при \quad T\to\infty;$$

У$_2$) *для будь-якого* $u\in R^d$ *та* $\varepsilon>0$

$$\mathrm{E}\,e^{-\varepsilon\theta_u} \;\le\; 1-C\varepsilon;$$

У$_3$) *має місце збіжність початкових умов*

$$\eta^{\varepsilon}(0) \;\to\; \eta(0) \quad при \quad \varepsilon\to 0$$

та

$$\sup_{\varepsilon>0}\mathrm{E}\left|\eta^{\varepsilon}(0)\right| \;\le\; C \;<\; +\infty,$$

а також умова, з якої випливає компактність процесу:

У$_4$) $\left|\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)\right| \;\le\; C_{\varphi}$

для тест-функцій $\varphi(u)\in C_0^2(R^d)$ *простору фінітних обмежених неперервних функцій, що мають похідні до другого порядку включно.*

Тоді НМП $\eta^{\varepsilon}(t)$ *слабко збігається* [7] *до МП* $\eta^0(t)$ *при* $\varepsilon\to 0$:

$$\eta^{\varepsilon}(t) \;\Rightarrow\; \eta^0(t),$$

до того ж $\eta^0(t)$ *задається генератором*

$$\Gamma^0\varphi(u) \;=\; b_0(u)\varphi'(u) + \Lambda(u)\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\,\Gamma_0(u,dv) \tag{2}$$

та

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) \;=\; \Gamma^0\varphi(u) \;+\; R^{\varepsilon}\varphi(u),$$

де

$$\left|R^{\varepsilon}\varphi(u)\right| \;\to\; 0 \quad при \quad \varepsilon\to 0,$$

$$b_0(u) \;=\; b(u)a_0(u) \;=\; b(u)\left[a(u)-a^0(u)\right],$$

$$\Lambda(u) \;=\; b(u)\Gamma^0(u,R^d), \qquad \Gamma_0(u,V) \;=\; \Gamma^0(u,V)/\Lambda(u), \qquad V\in\mathfrak{R}^d.$$

***Зауваження.* 2.** Умова У$_2$ теореми збігається з умовою 1 з [1, с. 7].

3. З умови У$_4$ згідно з лемою 6.4 з [4] випливає умова

$$\text{У}_4')\quad \lim_{l\to\infty}\sup_{\varepsilon>0}\mathrm{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\eta^{\varepsilon}(t)\right| > l\right) \;=\; 0.$$

Для доведення теореми нам знадобляться наступні леми.

Лема 1. *КО* (*генератор СМП*) *має вигляд*

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,t) = \varepsilon^{-1}b(u)\int_0^{\infty}F_u(ds)\int_{R^d}[\varphi(u+v,t+s)-\varphi(u,t)]\,\Gamma^{\varepsilon}(u,dv).$$

Доведення. Справді,

$$\mathrm{E}\,[\theta_{n+1}^{\varepsilon}\mid\eta_n^{\varepsilon}=u] = \varepsilon\int_0^{\infty}\bar{F}_u(t)\,dt = \varepsilon f(u),$$

тобто

$$b^{\varepsilon}(u) = \varepsilon^{-1}b(u).$$

Тоді

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,t) = b^{\varepsilon}(u)\int_0^{\infty}F_u(ds)\int_{R^d}[\varphi(u+v,t+s)-\varphi(u,t)]\,\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) =$$

$$= \varepsilon^{-1}b(u)\int_0^{\infty}F_u(ds)\int_{R^d}[\varphi(u+v,t+s)-\varphi(u,t)]\,\Gamma^{\varepsilon}(u,dv).$$

Лему 1 доведено.

Введемо позначення

$$a^0(u) = \int_{R^d}v\,\Gamma^0(u,dv).$$

Лема 2. *На тест-функціях* $\varphi(u)$, *що мають обмежені похідні будь-якого порядку, КО має асимптотичне зображення*

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \Gamma^0\varphi(u) + R^{\varepsilon}(u),$$

де Γ^0 *визначено в* (2).

Доведення. Позначимо

$$\psi_u(v) = \varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u).$$

Використовуючи умови $\Pi_1 - \Pi_3$, отримуємо

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = b^{\varepsilon}(u)\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\,\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) =$$

$$= \varepsilon^{-1}b(u)\left\{\int_{R^d}\psi_u(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv) + \varphi'(u)\int_{R^d}v\,\Gamma^{\varepsilon}(u,dv)\right\} =$$

$$= \varepsilon^{-1}b(u)\left\{\int_{|v|>\delta_\varepsilon}\psi_u(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv)+\int_{|v|\le\delta_\varepsilon}\psi_u(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv)+\varphi'(u)\int_{R^d}v\Gamma^{\varepsilon}(u,dv)\right\},$$

де $\delta_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Для другого інтеграла внаслідок обмеженості похідних функції $\varphi(u)$ числом K та за умовою Π_4 маємо

$$\varepsilon^{-1}b(u)\int\limits_{|v|\le\delta_\varepsilon}\psi_u(v)\Gamma^\varepsilon(u,dv) = \varepsilon^{-1}b(u)\int\limits_{|v|\le\delta_\varepsilon}|v|\frac{\psi_u(v)}{|v|}\Gamma^\varepsilon(u,dv) \le$$

$$\le \varepsilon^{-1}b(u)\delta_\varepsilon K\int\limits_{|v|\le\delta_\varepsilon}|v|\Gamma^\varepsilon(u,dv) \le \varepsilon^{-1}b(u)\delta_\varepsilon K\int\limits_{R^d}|v|\Gamma^\varepsilon(u,dv) =$$

$$= b(u)\delta_\varepsilon K\big(a^+(u)+R_a^\varepsilon(u)\big). \tag{3}$$

Очевидно, за умови Π_4 обмеженості функцій $a^+(u)$ та $b(u)$ останній вираз прямує до 0 при $\varepsilon\to 0$.

Продовживши в першому інтегралі підінтегральну функцію нулем в околі 0, для нової функції $\psi_u^0(v)\in C_2(R^d)$ за умовою Π_3 будемо мати

$$\varepsilon^{-1}b(u)\int\limits_{|v|>\delta_\varepsilon}\psi_u(v)\Gamma^\varepsilon(u,dv) = \varepsilon^{-1}b(u)\int\limits_{R^d}\psi_u^0(v)\Gamma^\varepsilon(u,dv) =$$

$$= b(u)\int\limits_{R^d}\psi_u^0(v)\Gamma^0(u,dv) + R^\varepsilon(u) =$$

$$= b(u)\int\limits_{R^d}\psi_u(v)\Gamma^0(u,dv) - b(u)\int\limits_{|v|<\delta_\varepsilon}\psi_u(v)\Gamma^0(u,dv) + R^\varepsilon(u).$$

Для другого інтеграла в останньому виразі оцінка є аналогічною (3). Остаточно маємо

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = b(u)\left(\int\limits_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\,\Gamma^0(u,dv) + a(u)\varphi'(u)\right) + R^\varepsilon(u) =$$

$$= b(u)\left(\int\limits_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\,\Gamma^0(u,dv) - a^0(u)\varphi'(u) + a(u)\varphi'(u)\right) + R^\varepsilon(u) =$$

$$= \Gamma^0\varphi(u) + R^\varepsilon(u).$$

Лему 2 доведено.

Доведення теореми. В лемі 2 ми довели, що при $\varepsilon\to 0$ КО прямує до Γ^0. Для того щоб довести слабку збіжність, залишається показати відносну компактність сім'ї $\eta^\varepsilon(t)$ і встановити, що граничний оператор задає мартингал [5, 7, 8]

$$\mu_t := \varphi(u(t)) - \int_0^t\Gamma^0\varphi(u(s))\,ds.$$

Розглянемо математичне сподівання процесу

$$\mu_t^\varepsilon = \varphi(\eta^\varepsilon(t)) - \int_0^t\Gamma^0\varphi(\eta^\varepsilon(s))\,ds.$$

Введемо випадкові процеси

$$\eta_+^\varepsilon(t) \ := \ \eta^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon(t)), \qquad \eta_\tau^\varepsilon(t) \ := \ \eta^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), \quad t \geq 0,$$

де $\tau_+^\varepsilon(t) \ = \ \tau^\varepsilon(t) + 1$.

Маємо

$$\mathrm{E}\left[\mu_t^\varepsilon\right] = \mathrm{E}\left[\varphi(\eta^\varepsilon(t)) - \int_0^t \Gamma^0 \varphi(\eta^\varepsilon(s))\,ds\right] = \mathrm{E}\left[\varphi(\eta^\varepsilon(t)) - \varphi(\eta_+^\varepsilon(t))\right] +$$

$$+ \ \mathrm{E}\left[\varphi(\eta_+^\varepsilon(t)) - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\eta_\tau^\varepsilon(s))\,ds\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\eta_\tau^\varepsilon(s))\,ds - \int_0^t \Gamma^\varepsilon \varphi(\eta_\tau^\varepsilon(s))\,ds\right] +$$

$$+ \ \mathrm{E}\int_0^t \Gamma^\varepsilon\left[\varphi(\eta_\tau^\varepsilon(s)) - \varphi(\eta^\varepsilon(s))\right] ds + \mathrm{E}\int_0^t \left[\Gamma^\varepsilon \varphi(\eta^\varepsilon(s)) - \Gamma^0 \varphi(\eta^\varepsilon(s))\right] ds.$$

Третій доданок задовольняє співвідношення

$$\mathrm{E}\int_t^{\tau_+^\varepsilon(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\eta_\tau^\varepsilon(s))\,ds \ \to \ 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

завдяки властивості моментів відновлення

$$\mathrm{E}\left[\tau_+^\varepsilon(t) - t\right] \ \to \ 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

рівномірно по t на кожному скінченному інтервалі $[0, T]$.

Для того щоб довести останній факт, скористаємось лемою C.1 з [4].

Лема 3. *Нехай сім'я моментів відновлення* θ_u, $u \in R^d$, *що мають функції розподілу* F_u, *задовольняє умови* У$_1$, У$_2$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\mathrm{P}\left(\max_{0 \leq t \leq T} \gamma^\varepsilon(t) \geq \delta\right) \ \to \ 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

для будь-яких $\delta > 0$ *та* $T > 0$, *де* $\gamma^\varepsilon(t) := t - \tau^\varepsilon(t)$.

Доведення. Властивість регулярності для НМП дає збіжність

$$\mathrm{P}\left(\tau_{N/\varepsilon}^\varepsilon \leq T\right) \ \to \ 0, \quad N \to \infty,$$

при $\varepsilon > 0$.

Дійсно, маємо

$$\mathrm{P}\left(\tau_{N/\varepsilon}^\varepsilon \leq T\right) \ = \ \mathrm{P}\left(e^{-\tau_{N/\varepsilon}^\varepsilon} \geq e^{-T}\right) \ \leq \ \mathrm{E}e^{-\tau_{N/\varepsilon}^\varepsilon} e^T \ = \ \mathrm{E}e^{-\varepsilon\tau_{N/\varepsilon}} e^T.$$

За умови У$_2$ отримуємо

$$\mathrm{E}e^{-\varepsilon\tau_{N/\varepsilon}} \ = \ \mathrm{E}e^{-\varepsilon\theta_{N/\varepsilon}}\mathrm{E}e^{-\varepsilon\tau_{N/\varepsilon - 1}} \ \leq \ (1 - C\varepsilon)\mathrm{E}e^{-\varepsilon\tau_{N/\varepsilon-1}} \ \leq \ (1 - C\varepsilon)^{N/\varepsilon} \ \leq$$

$$\leq \ e^{-CN} \ \to \ 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

За умовою У$_1$

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leq k \leq N/\varepsilon} \theta_k \geq \delta/\varepsilon\right) \ \leq \ \sum_{k=1}^{N/\varepsilon} \mathrm{P}\left(\theta_k \geq \delta/\varepsilon\right) \ \leq \ \frac{N}{\varepsilon} \sup_{u \in R^d} \int_{\delta/\varepsilon}^{\infty} \overline{F}_u(t)\,dt \ \leq$$

$$\leq \frac{N}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\delta}\sup_{u \in R^d} \bar{F}_u(\delta/\varepsilon) = \frac{N}{\delta}\sup_{u \in R^d} \bar{F}_u(\delta/\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Остаточно маємо

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \gamma^{\varepsilon}(t) \geq \delta\right) \leq P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \theta_{\nu_+^{\varepsilon}(t)} \geq \delta/\varepsilon\right) \leq$$

$$\leq P\left(\max_{1 \leq k \leq N/\varepsilon} \theta_{k+1} \geq \delta/\varepsilon, \ \tau_{N/\varepsilon}^{\varepsilon} > T\right) +$$

$$+ P(\tau_{N/\varepsilon}^{\varepsilon} \leq T) \leq P\left(\max_{1 \leq k \leq N/\varepsilon} \theta_{k+1} \geq \delta/\varepsilon\right) + P(\tau_{N/\varepsilon}^{\varepsilon} \leq T) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$.

Лему 3 доведено.

Аналогічно доводиться збіжність до 0 першого та четвертого доданків завдяки неперервності $\varphi(u)$.

Останній доданок прямує до 0 за лемою 2, оскільки

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \Gamma^{0}\varphi(u)$$

на тест-функціях $\varphi(u)$, що мають рівномірно обмежені похідні всіх порядків.

Другий доданок дорівнює

$$\zeta_t^{\varepsilon} = \varphi(\eta_+^{\varepsilon}(\ )) - \int^{\tau_+^{\varepsilon}(\ )} {}^{\varepsilon}\varphi(\eta_+^{\varepsilon}(\ ))$$