УДК 517.946

Е. А. Буряченко (Донец. нац. ун-т)

УСЛОВИЯ НЕТРИВИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, НЕ ИМЕЮЩИХ УГЛОВ НАКЛОНА

We consider the homogeneous Dirichlet problem in a unit disk $K \subset R^2$ for a general typeless differential equation of arbitrary even order $2m, m \geq 2,$ with constant complex coefficients, whose characteristic equation has multiple roots $\pm i$. For every value of multiplicities of the roots i and $-i$ we obtain criteria of nontrivial solvability of the problem or prove that the problem has only the trivial solution. A similar result generalizes the well-known A. V. Bitsadze examples to the case of typeless arbitrary-even-order equations.

Розглянуто однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі $K \subset R^2$ для загального безтипного диференціального рівняння довільного парного порядку $2m, m \geq 2,$ зі сталими комплексними коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого має кратні корені $\pm i$. Для кожного значення кратностей коренів i та $-i$ отримано критерії нетривіальної розв'язності задачі або доведено, що задача має лише тривіальний розв'язок. Подібний результат узагальнює відомі приклади А. В. Біцадзе на випадок безтипних рівнянь довільного парного порядку.

Введение. В работе рассматривается однородная задача Дирихле в единичном круге $K \subset R^2$ для общего бестипного дифференциального уравнения произвольного четного порядка $2m, m \geq 2,$ с постоянными комплексными коэффициентами и однородным по порядку дифференцирования вырожденным символом. Вырожденность символа означает, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m}$ характеристического уравнения могут быть кратными, а также принимать значения $\pm i$.

Вопросы тривиальности ядра задачи Дирихле для общих уравнений второго порядка с вырожденным символом изучались А. В. Бицадзе [1], В. П. Бурским [2], а для уравнений четвертого порядка — Е. А. Буряченко [3], Н. Э. Товмасяном и А. О. Бабаяном [4]. Уравнения, приведенные в работе [1], $\partial^2 u/\partial \bar{z}^2 = 0,$ $\partial^2 u/\partial z^2 = 0,$ не являются правильно эллиптическими (в первом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = -i,$ а во втором $\lambda_1 = \lambda_2 = i$), поэтому для них возможна бесконечномерная неединственность решения задачи Дирихле. В то же время символ этих уравнений вырожденный, так как существуют только кратные корни характеристического уравнения. Напомним, что в силу результатов работы Я. Б. Лопатинского [5], для правильно эллиптических уравнений четного порядка с постоянными комплексными коэффициентами однородная задача Дирихле имеет не более чем конечное число линейно независимых решений. В работе [3] полностью решен вопрос о единственности решения задачи Дирихле в круге для общих уравнений четвертого порядка. В ней получены критерии единственности решения задачи в ряде случаев: как в общем (все корни характеристического уравнения простые и не равны $\pm i$), так и в случае кратных корней, а также корней, принимающих значения $\pm i$; установлена зависимость между значением кратности корней и существованием нетривиального решения соответствующей однородной задачи Дирихле.

Вопрос существования нетривиального решения задачи Дирихле для общих уравнений главного типа, не имеющих кратных характеристик, решен в статье [6], где и был доказан критерий существования такого решения.

В работах [7, 8] были обобщены результаты статей [3, 6] на случай общих уравнений произвольного четного порядка $2m, m \geq 2,$ имеющих кратные характеристики, а также простые корни $\pm i$ характеристического уравнения; установлена зависимость между значением кратности корней, не равных $\pm i,$ и существованием нетривиального решения соответствующей задачи Дирихле в круге.

Вопрос нетривиальной разрешимости задачи Дирихле в случае существования кратных корней $\pm i$ оставался открытым. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Отметим также, что одной из особенностей случая существования корней $\pm i$ характеристического уравнения (не говоря уже об их кратности) является тот факт, что для этих корней не существует углов φ наклона соответствующих характеристик (решений уравнения $-\mathrm{tg}\,\varphi = \pm i$), поскольку ранее практически во всех работах (см., например, [2 – 4, 6]) подобные критерии единственности решения граничных задач были записаны именно в терминах φ_j углов наклона характеристик.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную задачу Дирихле в единичном круге $K \subset R^2$ для общего бестипного дифференциального уравнения произвольного четного порядка $2m, m \geq 2,$ с постоянными комплексными коэффициентами и однородным по порядку дифференцирования вырожденным символом:

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + a_1 \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m-1} \partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{2m-1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1 \partial x_2^{2m-1}} + a_{2m} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial K} = 0, \quad u'_{\nu}\big|_{\partial K} = 0, \ldots, u_{\nu}^{(m-1)}\big|_{\partial K} = 0, \tag{2}$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали, $\partial_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right),$ $a_i \in C,\ i = 0, 1, \ldots, 2m.$

Вырожденность символа означает, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2m}$ характеристического уравнения $L(1, \lambda) = 0$ могут быть кратными, а также принимать значения $\pm i.$

Для каждого значения кратностей $p = 2, \ldots, 2m$ корня i и $q = 2, \ldots, 2m$ корня $-i$ характеристического уравнения получены критерии нетривиальной разрешимости задачи (1), (2) или доказано, что задача имеет только тривиальное решение. Подобные результаты обобщают известные примеры А. В. Бицадзе (см. выше) на случай бестипных уравнений произвольного четного порядка $2m,\ m \geq 2.$

Напомним (см., например, [2]), что *углом наклона характеристики, соответствующей некоторому корню* $\lambda_j \neq \pm i$ характеристического уравнения, будем называть какое-нибудь решение уравнения $-\mathrm{tg}\,\varphi_j = \lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, 2m.$ Ограничение $\lambda_j \neq \pm i,\ j = 1, 2, \ldots, 2m,$ как раз связано с тем, что уравнение $\mathrm{tg}\,(x) = \pm i$ не имеет решений.

2. Случай кратного корня i (или $-i$) характеристического уравнения. Предположим вначале, что среди корней характеристического уравнения

$L(1, \lambda) = 0$ имеется корень i (или $-i$) кратности $k > 1$. Остальные корни простые и не равны $\pm i$. Докажем критерий нетривиальной разрешимости задачи (1), (2) в зависимости от значения кратности k корня i. Случай $-i$ рассматривается аналогично.

Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 1. 1. *Предположим, что число* i *является корнем характеристического уравнения и имеет кратность* $k < m$. *Тогда для нетривиальной разрешимости задачи Дирихле* (1), (2) *в пространстве* $C^{2m}(\bar{K})$ *необходимо и достаточно выполнения следующего условия для некоторого* $n \in \mathbf{N}$, $n > 2m - 1$:

$$\Delta_1 = \det A = \det(\tilde{A}, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_m) = 0. \qquad (3)$$

Здесь блоки $\tilde{A}$, A_j, $j = k+1, k+2, \ldots, m$, *матрицы* A *имеют вид*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} e^{in\varphi_{k+1}} & \ldots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{k+1}} \\ e^{in\varphi_{k+2}} & \ldots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{k+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{in\varphi_{2m}} & \ldots & e^{i(n-2(k-1))\varphi_{2m}} \end{pmatrix},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos(n-2(j-1))\varphi_{k+1} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{k+1} \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{k+2} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{k+2} \\ \ldots & \ldots \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{2m} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

$$j = k+1, k+2, \ldots, m.$$

При выполнении условия (3) *существует нетривиальное полиномиальное решение задачи* (1), (2).

2. *Если* $k = m$, *то задача Дирихле* (1), (2) *имеет только тривиальное решение*.

3. *Если характеристическое уравнение имеет корень* i *кратности* $k > m$, *то задача Дирихле* (1), (2) *всегда имеет нетривиальное решение* (*при любых существующих* φ_j).

Доказательство. С учетом разложения символа $L(\xi) = a_0\xi_1^{2m} + a_1\xi_1^{2m-1}\xi_2 + \ldots + a_{2m}\xi_2^{2m} = \langle \xi, a^1 \rangle \langle \xi, a^2 \rangle \ldots \langle \xi, a^{2m} \rangle$ представим уравнение (1) в виде

$$\langle \nabla, a^1 \rangle \langle \Delta, a^2 \rangle \ldots \langle \nabla, a^{2m} \rangle u = 0, \qquad (4)$$

где $a^j \in \mathbf{C}^2$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, — комплексные векторы, определяемые коэффициентами уравнения (1), $\langle a, b \rangle = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$ — скалярное произведение векторов. В дальнейшем будем рассматривать также векторы $\tilde{a}^j = \left(-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j\right) = (-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$.

Предположим, что для некоторого $s = 1, \ldots, 2m$ $\lambda_s = i$ — корень характеристического уравнения, тогда $\bar{a}_1^s + i\bar{a}_2^s = 0$. Следовательно, $\bar{a}_1^s = i\bar{a}_2^s$ и s — множитель в разложении символа $L(\xi)$ уравнения (1) — принимает вид $\xi_1\bar{a}_1^s + \xi_2\bar{a}_2^s = -i\bar{a}_2^s(\xi_1 + i\xi_2)$ т. е. с точностью до множителя равен $\xi_1 + i\xi_2$, что и будем использовать в дальнейшем. Аналогично для корня $-i$: $\xi_1 - i\xi_2$.

1. *Необходимость.* Согласно утверждению [2, с. 199, 200], существование нетривиального решения задачи Дирихле (1), (2) в пространстве $C^{2m}(\bar{K})$ влечет существование нетривиального аналитического в $\mathbf{C}^2$ решения $w(\xi) \in Z$ уравнения

$$(\Delta_\xi + 1)^m \{L(\xi)\, w(\xi)\} = 0.$$

(Класс Z здесь определен как пространство образов Фурье функций вида $\theta_K v$, $v \in C^{2m}(\mathbf{R}^2)$, θ_K — характеристическая функция круга.)

Разлагая функцию $v(\xi) = L(\xi)\, w(\xi)$ в степенной ряд, для младшей нетривиальной однородной полиномиальной части $v_N(\xi)$ ряда получаем уравнение

$$\Delta_\xi^m v_N(\xi) = 0. \tag{5}$$

С учетом соотношений (32.15) – (32.22) в [9] или формулы Альманси [10, с. 208] общее полиномиальное решение $\tilde{v}(\xi)$ уравнения (5) можно представить в виде

$$\tilde{v}(\xi) = \mathrm{Re}\left\{f_1(z) + \ldots + \bar{z}^{m-1} f_m(z)\right\} + i\, \mathrm{Re}\left\{g_1(z) + \ldots + \bar{z}^{m-1} g_m(z)\right\},$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$, $f_i(z) = \sum f_{in} z^n$, $g_i(z) = \sum g_{in} z^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — некоторые полиномы. Отсюда

$$\tilde{v}(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \Big(\alpha_{1n} \cos n\varphi - \beta_{1n} \sin n\varphi + a_{2n} \cos(n-2)\varphi -$$

$$- \beta_{2n} \sin(n-2)\varphi + \ldots + a_{mn} \cos\big(n - 2(m-1)\big)\varphi -$$

$$- \beta_{mn} \sin\big(n - 2(m-1)\big)\varphi\Big). \tag{6}$$

Здесь постоянные α_{in}, β_{in} строятся по коэффициентам разложения полиномов $f_i(z) = \sum f_{in} z^n$, $g_i(z) = \sum g_{in} z^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, следующим образом: $\mathrm{Re}\,\alpha_{in} = \mathrm{Re}\, f_{i,\, n-(i-1)}$, $\mathrm{Im}\,\alpha_{in} = \mathrm{Re}\, g_{i,\, n-(i-1)}$, $\mathrm{Re}\,\beta_{in} = \mathrm{Im}\, f_{i,\, n-(i-1)}$, $\mathrm{Im}\,\beta_{in} = \mathrm{Im}\, g_{i,\, n-(i-1)}$, $n \in N$, $i = 1, \ldots, m$. Используя формулы Эйлера, из (6) получаем уравнение

$$\tilde{v}(\rho, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_{jn} - \frac{\beta_{jn}}{i}\right) e^{i(n-2(j-1))\varphi} + \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_{jn} + \frac{\beta_{jn}}{i}\right) e^{-i(n-2(j-1))\varphi} \right\}$$

или

$$\tilde{v}(\rho, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left\{ \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{jn} + i\beta_{jn})\, e^{i(n-2(j-1))\varphi} + \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{jn} - i\beta_{jn})\, e^{-i(n-2(j-1))\varphi} \right\},$$

которое можно переписать в виде

$$\tilde{\nu}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{jn} + i\beta_{jn})\, e^{i(n-2(j-1))\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{jn} - i\beta_{jn})\, e^{-i(n-2(j-1))\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\rho^n e^{in\varphi}(\alpha_{1n} + i\beta_{1n}) + \rho^n e^{i(n-2)\varphi}(\alpha_{2n} + i\beta_{2n}) + \ldots$$

$$\ldots + \rho^n e^{i(n-2(m-1))\varphi}(\alpha_{mn} + i\beta_{mn})\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\rho^n e^{-in\varphi}(\alpha_{1n} - i\beta_{1n}) + \rho^n e^{-i(n-2)\varphi}(\alpha_{2n} - i\beta_{2n}) + \ldots$$

$$\ldots + \rho^n e^{-i(n-2(m-1))\varphi}(\alpha_{mn} - i\beta_{mn})\Big] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[z^n(\alpha_{1n} + i\beta_{1n}) + \rho^2 z^{n-2}(\alpha_{2n} + i\beta_{2n}) + \rho^4 z^{n-4}(\alpha_{3n} + i\beta_{3n}) + \ldots$$

$$\ldots + \rho^{2(m-1)} z^{n-2(m-1)}(\alpha_{mn} + i\beta_{mn})\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\rho^{2n} \bar{z}^n(\alpha_{1n} - i\beta_{1n}) + \rho^{2n-2} \bar{z}^{n-2}(\alpha_{2n} - i\beta_{2n}) +$$

$$+ \rho^{2n-4} \bar{z}^{n-4}(\alpha_{3n} - i\beta_{3n}) + \ldots + \rho^{2n-2(m-1)} \bar{z}^{n-2(m-1)}(\alpha_{mn} - i\beta_{mn})\Big] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[z^n(\alpha_{1n} + i\beta_{1n}) + \rho^2 z^{n-2}(\alpha_{2n} + i\beta_{2n}) +$$

$$+ \rho^3 z^{n-3} e^{-i\varphi}(\alpha_{3n} + i\beta_{3n}) + \ldots + \rho^m z^{n-m} e^{-i(m-2)\varphi}(\alpha_{mn} + i\beta_{mn})\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\rho^{2n} \bar{z}^n(\alpha_{1n} - i\beta_{1n}) + \rho^{2n-2} \bar{z}^{n-2}(\alpha_{2n} - i\beta_{2n}) +$$

$$+ \rho^{2n-3} \bar{z}^{n-3} e^{i\varphi}(\alpha_{3n} - i\beta_{3n}) + \ldots + \rho^{2n-m} \bar{z}^{n-m} e^{i(m-2)\varphi}(\alpha_{mn} - i\beta_{mn})\Big]. \tag{7}$$

При делении целой функции $\tilde{\nu}(\xi) = L(\xi)\,\tilde{w}(\xi)$ на символ $L(\xi)$, который в случае кратности $k < m$ корня i характеристического уравнения имеет вид $L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^k \left\langle \xi, a^{k+1} \right\rangle \left\langle \xi, a^{k+2} \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle$, должен получиться полином. В случае, когда корень характеристического уравнения имеет кратность $k < m$, получаем следующие условия:

$$\begin{gathered} \alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0, \quad \alpha_{2n} + i\beta_{2n} = 0, \ldots, \alpha_{kn} + i\beta_{kn} = 0, \\ \tilde{\nu}\big|_{\varphi=-\varphi_{k+1}} = 0, \quad \tilde{\nu}\big|_{\varphi=-\varphi_{k+2}} = 0, \ldots, \tilde{\nu}\big|_{\varphi=-\varphi_{2m}} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Первые k условий возникают после деления функции (7) на множитель $(\xi_1 + i\xi_2)^k$ символа $L(\xi)$. Поскольку $(\xi_1 + i\xi_2)^k = z^k = \rho^k e^{ik\varphi}$, $k > 1$, после деления будем иметь

$$\frac{\tilde{v}(\rho, \varphi)}{(\xi_1 + i\xi_2)^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[z^{n-k}(\alpha_{1n} + i\beta_{1n}) + \rho^{2-k}z^{n-2}e^{-ik\varphi}(\alpha_{2n} + i\beta_{2n}) + \rho^{3-k}z^{n-3} \times$$

$$\times\ e^{-i(k+1)\varphi}(\alpha_{3n} + i\beta_{3n}) + \rho^{4-k}z^{n-4}e^{-i(k+2)\varphi}(\alpha_{4n} + i\beta_{4n}) + \ldots$$

$$\ldots + \rho^{m-k}z^{n-m}e^{-i(k+m-2)\varphi}(\alpha_{mn} + i\beta_{mn})\Big] +$$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\rho^{2n-k}\bar{z}^{n}e^{-ik\varphi}(\alpha_{1n} - i\beta_{1n}) + \rho^{2n-k-2}\bar{z}^{n-2}e^{-ik\varphi}(\alpha_{2n} - i\beta_{2n}) +$$

$$+\ \rho^{2n-k-3}\bar{z}^{n-3}e^{-i(k-1)\varphi}(\alpha_{3n} - i\beta_{3n}) + \ldots$$

$$\ldots + \rho^{2n-k-m}\bar{z}^{n-m}e^{-i(k-(m-2))\varphi}(\alpha_{mn} - i\beta_{mn})\Big]. \tag{9}$$

В силу того, что выражение (9) должно быть целой функцией, возникают первые k условий. Последние $2m-k$ условий возникают вследствие того, что равенство $\langle \xi, a^j\rangle = 0$ эквивалентно равенству $\varphi = -\varphi_j$, $j = k+1, \ldots, 2m$, т. е. $\tilde{v}(\rho, \varphi)\big|_{L(\xi)=0} = 0$. Подставляя (7) в (8), приходим к системе линейных уравнений относительно постоянных α_{in}, β_{in}, матрица которой имеет вид

$$(C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}, \ldots, C_m), \tag{10}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \\ \cos n\varphi_{k+1} & \sin n\varphi_{k+1} \\ \cos n\varphi_{k+2} & \cos n\varphi_{k+2} \\ \ldots & \ldots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \\ \cos(n-2)\varphi_{k+1} & \sin(n-2)\varphi_{k+1} \\ \cos(n-2)\varphi_{k+2} & \sin(n-2)\varphi_{k+2} \\ \ldots & \ldots \\ \cos(n-2)\varphi_{2m} & \sin(n-2)\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & i \\ \cos\big(n-2(k-1)\big)\varphi_{k+1} & \sin\big(n-2(k-1)\big)\varphi_{k+1} \\ \cos\big(n-2(k-1)\big)\varphi_{k+2} & \sin\big(n-2(k-1)\big)\varphi_{k+2} \\ \dots & \dots \\ \cos\big(n-2(k-1)\big)\varphi_{2m} & \sin\big(n-2(k-1)\big)\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

$$C_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ \cos\big(n-2(j-1)\big)\varphi_{k+1} & \sin\big(n-2(j-1)\big)\varphi_{k+1} \\ \cos\big(n-2(j-1)\big)\varphi_{k+2} & \sin\big(n-2(j-1)\big)\varphi_{k+2} \\ \dots & \dots \\ \cos\big(n-2(j-1)\big)\varphi_{2m} & \sin\big(n-2(j-1)\big)\varphi_{2m} \end{pmatrix},$$

$$j = k+1, k+2, \dots, m.$$

Умножим каждый четный столбец матрицы (10) на i, прибавим его к предыдущему столбцу и, разложив определитель полученной матрицы по столбцам, получим определитель, стоящий в левой части (3). Поскольку двойственная задача (5) имеет нетривиальное решение, существует ненулевой набор постоянных α_{in}, β_{in}, $n = 1, 2, \dots, m$. Значит, линейная система имеет ненулевое решение, что влечет обращение в нуль ее определителя, т. е. выполнение условия (3).

Достаточность. При выполнении условия (3) для некоторого $n \in N$, $n \geq 2m$, построим нетривиальное решение задачи (1), (2) в явном виде. Тем самым будет доказана достаточность условия (3) для нетривиальной разрешимости задачи (1), (2).

В работе [6] было доказано, что функция

$$u(x) = \sum_{j=1}^{2m} C_j F_j\left(-\tilde{a}^j x\right), \tag{11}$$

где $F_j(y)$ — некоторые гладкие функции одного аргумента, C_j, $j = 1, \dots, 2m$, — некоторые постоянные, является решением однородного уравнения произвольного четного порядка $2m$ в случае, когда существуют углы наклона всех простых характеристик. В качестве $F_j(y)$ в указанной работе использована функция, являющаяся с точностью до постоянной $(m-1)$-й первообразной полинома Чебышева первого рода порядка $N = n - m + 1$:

$$F_j(y) = F_{m-1}(y) := \int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \dots \int_0^{y_{m-3}} dy_{m-2} \int_0^{y_{m-2}} T_N(t)\, dt, \quad j = 1, \dots, 2m,$$

или

$$F_{m-1}(y) = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{l} \left\{ C_r^+(N) T_{N+2r+1}(y) + C_r^-(N) T_{N-2r-1}(y) \right\}, & m-1 = 2l+1, \\ \sum\limits_{r=0}^{l} \left\{ D_r^+(N) T_{N+2r}(y) + D_r^-(N) T_{N-2r}(y) \right\}, & m-1 = 2l, \end{cases} \tag{12}$$

где $C_r^+(N)$, $C_r^-(N)$, $D_r^+(N)$, $D_r^-(N)$ — постоянные, зависящие только от N и возникающие при вычислении $(m-1)$-й первообразной полинома Чебышева первого рода порядка $N = n - m + 1$. В случае, когда корень i характеристического уравнения имеет кратность $n < m$, разложение символа $L(\xi)$ принимает вид

$$L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^k \left\langle \xi, a^{k+1} \right\rangle \left\langle \xi, a^{k+2} \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Уравнению $L(\partial_x)u = 0$ удовлетворяет функция вида

$$u(x) = C_1(x_1 + ix_2)^n + C_2(x_1 + ix_2)^{n-2} + C_3(x_1 + ix_2)^{n-4} + \ldots$$

$$\ldots + C_k(x_1 + ix_2)^{n-2(k-1)} + \sum_{j=k+1}^{2m} C_j F_j(-\tilde{a}^j x), \tag{13}$$

вследствие ортогональности векторов a^j и $\tilde{a}^j$ при каждом $j = k+1, \ldots, 2m$.

Количество слагаемых, стоящих до суммы $C_j F_j(-\tilde{a}^j x)$ в (13), равно кратности корня i характеристического уравнения. Рассмотрим, для определенности, случай четного m: $m - 1 = 2l + 1$ (для нечетного m рассуждения аналогичны). Функции $F_j(-\tilde{a}^j x)$, $j = k+1, \ldots, 2m$, подобраны по формулам (12). Учитывая, что на ∂K $(-\tilde{a}^j x) = -\cos(\tau + \varphi_j)$, $N + m - 1 = n$, имеем

$$u\big|_{\partial K} = \sum_{r=0}^{l} C_r^+(N) \cos(N + 2r + 1)\tau \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \cos(N + 2r + 1)\varphi_j -$$

$$- \sum_{r=0}^{l} C_r^+ \sin(N + 2r + 1)\tau \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \sin(N + 2r + 1)\varphi_j +$$

$$+ \sum_{r=0}^{l} C_r^- \cos(N - 2r - 1)\tau \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \cos(N - 2r - 1)\varphi_j -$$

$$- \sum_{r=0}^{l} C_r^- \sin(N - 2r - 1)\tau \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \sin(N - 2r - 1)\varphi_j +$$

$$+ C_1(\cos n\tau + i \sin n\tau) + C_2\big(\cos(n-2)\tau + i\sin(n-2)\tau\big) + \ldots$$

$$\ldots + C_k\big(\cos\big(n - 2(k-1)\big)\tau + i \sin\big(n - 2(k-1)\big)\tau\big) = 0. \tag{14}$$

После приведения подобных слагаемых очевидно, что равенство (14) справедливо тогда и только тогда, когда имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{j=k+1}^{2m} C_j \cos\big(N + 2l + 1 - 2(q-1)\big)\varphi_j + C_q = 0,$$

$$\sum_{j=k+1}^{2m} C_j \sin\big(N + 2l + 1 - 2(q-1)\big)\varphi_j + iC_q = 0$$

для каждого $q = 1, 2, \ldots, k$, а также

$$\sum_{j=k+1}^{2m} C_j \cos(N - 2r - 1)\varphi_j = 0, \qquad \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \sin(N - 2r - 1)\varphi_j = 0,$$
$$\sum_{j=k+1}^{2m} C_j \cos(N + 2r + 1)\varphi_j = 0, \qquad \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \sin(N + 2r + 1)\varphi_j = 0 \tag{15}$$

для каждого $r = 0, 1, \ldots, l-k$, так как для $r = l-(k-1), \ldots, l$ аналогичные условия записаны выше $(r = l-(q-1),\, q = 1, 2, \ldots, k)$.

Данные соотношения представляют собой систему $2m$ уравнений, определитель которой равен нулю (при $N + m - 1 = n$ он совпадает с определителем, стоящим в левой части (3)). Следовательно, функция $u(x)$, заданная по формуле (13), удовлетворяет первому граничному условию в (2). Исходя из доказанного в [6] результата, можно сделать вывод, что функция $u(x)$ заданная по формуле (13), будет удовлетворять и остальным граничным условиям задачи, так как

$$u_\nu^{(p)}\Big|_{\partial K} = \sum_{j=k+1}^{2m} C_j \sum_{r=0}^{l} \Big\{P_r^{+}(N, p)\cos(N + 2r + 1)(\tau + \varphi_j) + $$
$$+ P_r^{-}(N, p)\cos(N - 2r - 1)(\tau + \varphi_j)\Big\}$$

с некоторыми постоянными. Следовательно, условия $u_\nu^{(p)}\Big|_{\partial K} = 0,\, p = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$ снова приводят к системе (15) относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_{2m}$.

2. Рассмотрим случай, когда кратность k корня i характеристического уравнения равна m. Тогда разложение символа уравнения (1) примет вид $L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^m \left\langle \xi, a^{m+1}\right\rangle \left\langle \xi, a^{m+2}\right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{m+m}\right\rangle$. Первый множитель данного выражения можно записать в виде $(\xi_1 + i\xi_2)^m = z^m = \rho^m e^{i\varphi m}$. Чтобы при делении функции (7) на этот символ получился полином, с необходимостью будем иметь

$$\alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0, \quad \alpha_{2n} + i\beta_{2n} = 0, \ldots, \alpha_{mn} + i\beta_{mn} = 0,$$
$$\tilde{\nu}\big|_{\varphi=-\varphi_{m+1}} = 0, \quad \tilde{\nu}\big|_{\varphi=-\varphi_{m+2}} = 0, \ldots, \tilde{\nu}\big|_{\varphi=-\varphi_{2m}} = 0, \tag{16}$$

Подставляя функцию (7) в условия (16), снова приходим к системе линейных уравнений относительно постоянных α_{in}, β_{in}, определитель которой имеет вид

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} e^{in\varphi_{m+1}} & e^{i(n-2)\varphi_{m+1}} & \cdots & e^{i(n-2(m-2))\varphi_{m+1}} & e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+1}} \\ e^{in\varphi_{m+2}} & e^{i(n-2)\varphi_{m+2}} & \cdots & e^{i(n-2(m-2))\varphi_{m+2}} & e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{in\varphi_{2m}} & e^{i(n-2)\varphi_{2m}} & \cdots & e^{i(n-2(m-2))\varphi_{2m}} & e^{i(n-2(m-1))\varphi_{2m}} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+1}} e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+2}} \ldots e^{i(n-2(m-1))\varphi_{2m}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} e^{2i(m-1)\varphi_{m+1}} & \ldots & e^{2i\varphi_{m+1}} & 1 \\ \ldots & \ddots & \ldots & 1 \\ e^{2i(m-2)\varphi_{2m}} & \ldots & e^{2i\varphi_{2m}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Выполним замену $z_1 = e^{2i\varphi_{m+1}}$, $z_2 = e^{2i\varphi_{m+2}}, \ldots,$ $z_m = e^{2i\varphi_{2m}}$, тогда

$$\Delta_2 = e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+1}} e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+2}} \ldots e^{i(n-2(m-1))\varphi_{2m}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} z_1^{m-1} & \ldots & z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^{m-1} & \ldots & z_2^2 & z_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ z_m^{m-1} & \ldots & z_m^2 & z_m & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+1}} e^{i(n-2(m-1))\varphi_{m+2}} \ldots e^{i(n-2(m-1))\varphi_{2m}} \prod_{1 \le j < i \le n} (z_i - z_j).$$

Равенство $\Delta_2 = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $z_i = z_j$, но это не так ($\varphi_i \ne \varphi_j$). Следовательно, исходный определитель отличен от нуля. Таким образом, двойственная задача имеет только тривиальное решение, и, согласно утверждению [2, с. 199, 200], однородная задача Дирихле (1), (2) имеет только тривиальное решение.

3. В случае, когда кратность k корня i характеристического уравнения $k > m$, имеем следующее разложение символа:

$$L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^{m+l} \left\langle \xi, a^{m+l+1} \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle,$$

где $l = 1, 2, \ldots, m$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны таковым при доказательстве утверждений первого и второго пунктов: чтобы при делении функции (7) на символ $L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^{m+l} \left\langle \xi, a^{m+l+1} \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle$ получился полином, должны выполняться следующие m условий:

$$\alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0, \quad \alpha_{2n} + i\beta_{2n} = 0, \ldots, \alpha_{mn} + i\beta_{mn} = 0.$$

Также имеем $2m - (m + l) = m - l$ соотношений для углов наклона характеристик:

$$\tilde{\nu}\big|_{\varphi = -\varphi_{m+l+1}} = 0, \quad \tilde{\nu}\big|_{\varphi = -\varphi_{m+l+2}} = 0, \ldots, \tilde{\nu}\big|_{\varphi = -\varphi_{2m}} = 0.$$

Таким образом, для определения коэффициентов α_{in}, β_{in} получаем систему $m + m - l = 2m - l$ уравнений с $2m$ неизвестными. Такая система всегда имеет ненулевое решение. Следовательно, задача Дирихле (1), (2) при любых существующих φ_j имеет нетривиальное решение, $j = m + l + 1, \ldots, 2m$, $l = 1, 2, \ldots, m$.

Если значение кратности k корня i больше половины порядка уравнения, т. е. $k > m$, то соответствующая задача Дирихле (1), (2) имеет счетное число линейно независимых решений. Действительно, разлагая оператор L порядка $2m$: $L_{2m} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{m+l} L_{m-l}$, где L_{m-l} — дифференциальный оператор порядка $m-l, l=1,2,\ldots,m,$ характеристическое уравнение которого не имеет корней $\pm i,$ нетрудно заметить, что набор функций

$$u_k(z) = (1 - z\bar{z})^{m+l-1} P_k(z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $P_k(z)$ — произвольные полиномы степени $k,$ удовлетворяет уравнению

$$L_{2m}u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+l} L_{m-l}u = \frac{\partial^{m+l}}{\partial \bar{z}^{m+l}} L_{m-l}u = 0$$

и условиям Дирихле на границе $\partial K = \{z \in C : |z|^2 = z\bar{z} = 1\}$ единичного круга:

$$u\big|_{|z|=1} = 0, \quad u'_\rho\big|_{|z|=1} = 0, \ldots, u_\rho^{(m-1)}\big|_{|z|=1} = 0, \quad \rho = |z|.$$

Приведенный пример обобщает известный результат А. В. Бицадзе [1] для уравнений второго порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} u = 0\right)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} u = 0\right),$$

характеристические уравнения которых имеют корни i (и $-i$ соответственно) кратности $k = 2 > m = 1$ — половину порядка уравнения.

Теорема доказана.

***Замечания.* 1.** Аналогичный результат с заменой i на $-i$ имеет место и для соответствующих кратностей корня $-i$ характеристического уравнения.

2. В случае, когда одновременно существуют корни i и $-i,$ оператор L порядка $2m$ можно разложить в виде произведения оператора Лапласа и оператора порядка $2(m-1)$: $L_{2m} = \Delta \cdot L_{2m-2}$.

Вторая часть теоремы 1 в статье [8] свидетельствует о том, что с точки зрения единственности решения задачи Дирихле для оператора $L,$ характеристическое уравнение которого одновременно имеет простые корни i и $-i,$ его правильно эллиптическая часть (оператор Лапласа) значения не имеет, и такие уравнения ведут себя как и уравнения порядка $2(m-1),$ поскольку условие

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cdots & \cos(n-2(m-2))\varphi_3 & \sin(n-2(m-2))\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cdots & \cos(n-2(m-2))\varphi_4 & \sin(n-2(m-2))\varphi_4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} & \cdots & \cos(n-2(m-2))\varphi_{2m} & \sin(n-2(m-2))\varphi_{2m} \end{pmatrix} = 0,$$

согласно результатам работы [6], является критерием нарушения единственности решения задачи Дирихле в круге для уравнений главного типа порядка $2(m-1)$.

3. Случай кратных корней i и $-i$ характеристического уравнения. Докажем теорему существования нетривиального решения задачи Дирихле (1), (2) в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни i и $-i$. Как и в утверждениях предыдущего пункта, условия нарушения единственности решения задачи Дирихле будут зависеть от значений кратностей k_1 и k_2 корней i и $-i$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть числа i и $-i$ являются корнями характеристического уравнения кратностей k_1 и k_2 соответственно* ($k_1 + k_2 = 2, 3, \ldots, 2m$, $k_1 k_2 \neq 0$) *и для определенности $k_2 > k_1$. Положим $l = k_2 - k_1 > 0$.*

Тогда:

1. *Если $l < m$, то для нетривиальной разрешимости задачи Дирихле* (1), (2) *необходимо и достаточно выполнения следующего условия для некоторого $n \in N$, $n \geq 2m$:*

$$\Delta_3 = \det B = \det(\tilde{B}, B_{l+1}, B_{l+2}, \ldots, B_{m-k_1}) = 0.$$

Здесь блоки матрицы B имеют вид

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{in\varphi_{l+1}} & \ldots & e^{i(n-2(l-1))\varphi_{l+1}} \\ e^{in\varphi_{l+2}} & \ldots & e^{i(n-2(l-1))\varphi_{l+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{in\varphi_{2(m-k_1)}} & \ldots & e^{i(n-2(l-1))\varphi_{2(m-k_1)}} \end{pmatrix},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \cos(n-2(j-1))\varphi_{l+1} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{l+1} \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{l+2} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{l+2} \\ \ldots & \ldots \\ \cos(n-2(j-1))\varphi_{2(m-k_1)} & \sin(n-2(j-1))\varphi_{2(m-k_1)} \end{pmatrix},$$

$$j = l+1, l+2, \ldots, m-k_1.$$

2. *Если $l = m$, то задача Дирихле* (1), (2) *имеет только тривиальное решение.*

3. *Если $m < l \leq 2m$, то задача Дирихле* (1), (2) *при любых существующих φ_j всегда имеет нетривиальное решение.*

Доказательство. Предположим, что характеристическое уравнение $L(1, \lambda) = 0$ имеет одновременно корни i и $-i$ кратностей k_1 и k_2 соответственно ($k_1 + k_2 = 2, 3, \ldots, 2m$, $k_1 k_2 \neq 0$). Рассмотрим разность кратностей корней $l = k_2 - k_1 > 0$ (для определенности). В случае, когда $k_1 > k_2$, доказательство аналогично (с заменой i на $-i$).

Оператор L порядка $2m$ можно разложить в виде произведения оператора Лапласа степени k_1 и оператора порядка $2(m-k_1)$: $L_{2m} = \Delta^{k_1} \cdot L_{2(m-k_1)} = \Delta^{k_1}(\xi_1 + i\xi_2)^{k_2 - k_1} \left\langle \xi, a^{k_2 - k_1 + 1} \right\rangle \left\langle \xi, a^{k_2 - k_1 + 2} \right\rangle \ldots \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle$. Но характеристическое уравнение, соответствующее оператору $L_{2(m-k_1)}$, уже не имеет корня $-i$, но имеет корень i кратности $k_2 - k_1 = l$, поэтому к нему можно применить теорему 1 из предыдущего пункта с заменой k на l и m на $m - k_1$, что и завершает доказательство данного утверждения.

1. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 6. – С. 211 – 212.
2. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
3. *Буряченко Е. А.* О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – **10**. – С. 44 – 49.

4. *Babayan A. O.* On unique solvability of Dirichlet problem for fourth order property elliptic equation // Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. – 1999. – **34**, № 5. – P. 5 – 18.
5. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, № 2. – С. 123 – 151.
6. *Бурский В. П., Буряченко Е. А.* Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – **74**, № 4. – С. 1032 – 1043.
7. *Буряченко Е. А.* Разрешимость однородной задачи Дирихле в круге для уравнений порядка $2m$ в случае кратных характеристик, имеющих углы наклона // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 33 – 41.
8. *Буряченко Е. А.* Нетривиальная разрешимость однородной задачи Дирихле в круге для уравнений порядка $2m$ в случае характеристик, не имеющих углов наклона // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2007. – **50**, № 2. – С. 10 – 21.
9. *Векуа И. Н.* Новые методы решений эллиптических уравнений. – М.: ОГИЗ, 1948. – 296 с.
10. *Бицадзе А. Н.* Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Мир, 1981. – 448 с.

Получено 26.08.09,
после доработки — 01.03.10