УДК 519.44

Ю. В. Боднарчук

Строение группы автоморфизмов нестандартного сплетения групп

В [1] поставлен вопрос о группе автоморфизмов сплетения произвольной группы подстановок с абстрактной группой. Случаи, когда группа подстановок регулярна или полная симметрическая группа конечного множества, разобраны в [2, 3] соответственно. Описание автоморфизмов основано на том факте, что база сплетения в этих случаях почти всегда характеристична (см. [3, 4]). Как будет показано, база сплетения и в общем случае почти всегда характеристична. В настоящей работе поставленный вопрос решается для сплетения произвольной ограниченной транзитивной группы подстановок с абстрактной группой, база которого характеристична.

1. Предварительные замечания. Пусть (G, X) — транзитивная подгруппа ограниченной симметрической группы на множестве X, K — стабилизатор в X фиксированной точки $x^* \in X$, $F = F(X, H)$ — группа функций с конечным носителем из множества X в группу H. Имеем вложение $G \to \operatorname{Aut} F$, при котором каждому g сопоставляется автоморфизм $f \to f^g$ $(f^g(x) = f(x^{g^{-1}}))$, $g \in G$, $f \in F$. Полупрямое произведение групп G и базы F, задаваемое таким вложением, называют сплетением группы подстановок (G, X) с абстрактной группой H и обозначают $W = (G, X) \wr \wr H$. В дальнейшем там, где это не будет вызывать недоразумений, будем отождествлять G с ее образом при указанном выше вложении. Через π обозначим канонический гомоморфизм $\pi : W \to G$, $\pi(gf) = g$, $gf \in W$. Если в качестве базы взять группу Φ всех функций из X в H, то такое сплетение называют неограниченным, обозначим его через $\tilde{W}$. Нетрудно видеть, что $W \trianglelefteq \tilde{W}$. Группу автоморфизмов, индуцируемых Φ на W, обозначим $\tilde{I}$. Пусть $\varepsilon_{t,h}$, $t \in X$, $h \in H$,— элементы из F вида

$$\varepsilon_{t,h}(x) = \begin{cases} e, & x \neq t, \\ h, & x = t, \end{cases}$$

порождающие F. Непосредственно проверяется, что $w\varepsilon_{x^*,h}w^{-1} = \varepsilon_{x^{*g^{-1}},h'}$, где $g = \pi(w)$, h, $h' \in H$. Так как $[\varepsilon_{x,h}, \varepsilon_{x',h'}] = e$ для любых $x, x' \in X$, $x \neq x'$, $h, h' \in H$, то имеем

$$[w\varepsilon_{x^*,h}w^{-1}, \varepsilon_{x^*,h'}] = e \tag{1}$$

для любых $w \in W$, $\pi(w) \notin K$, $h, h' \in H$.

Нам понадобятся следующие сведения об автоморфизмах группы F. Каждому элементу $\beta \in \operatorname{Aut} F$ можно сопоставить систему эндоморфизмов $(T_{x,y})$, $x, y \in X$, группы H таких, что

$$(\varepsilon_{x,h})^\beta = \prod_{y \in X} \varepsilon_{y,h^{T_{x,y}}} \cdot \tag{2}$$

Кроме того, для $(T_{x,y})$ должны выполняться два условия:

1) для любых h_1, $h_2 \in H$ и $x, y, z \in X$ $(x \neq y)$,

$$h_1^{T_{x,z}} h_2^{T_{y,z}} = h_2^{T_{y,z}} h_1^{T_{x,z}}; \tag{3}$$

2) система уравнений

$$\prod_{x \in X} \varphi(x)^{T_{x,y}} = f(y), \tag{4}$$

где φ — неизвестная, а f — известная функции из F, имеет единственное решение при любой f. Как показано в [3], справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Система эндоморфизмов $(T_{x,y})$, где при каждом фиксированном x существует лишь конечное число нетривиальных эндоморфизмов, задает автоморфизм группы F тогда и только тогда, если выполняются условия 1) и 2).*

Если множество $X_z = \{T_{x,z} \mid \operatorname{Ker} T_{x,z} \neq H\}$, $z \in X$, конечно, то (3) позволяет определить эндоморфизм $\sigma_z = \sum\limits_{x \in X} T_{x,z}$,

$$h^{\sigma_z} = \prod_{x \in X_z} h^{T_{x,z}}. \tag{5}$$

Следствие. *Пусть* $\beta \in \operatorname{Aut} F$ *и* $|X_z| < \infty$, $\sigma_z = \sigma_{x^*} = \sigma$ *для любого* $z \in X$, *тогда* $\sigma \in \operatorname{Aut} H$.

Действительно, положим $T'_{x^*,y} = \sigma_y$ и $T'_{x,y} = T_{x,y}$ при $x \neq x^*$. Нетрудно видеть, что система $\beta' = (T''_{x,y})$ задает автоморфизм на F. Если $h \in \operatorname{Ker} \sigma$, то $\varepsilon_{x^*,h} \in \operatorname{Ker} \beta'$, т. е. $h = e$.

2. В дальнейшем под группой диэдра будем понимать расширение произвольной абелевой группы H_1 с помощью автоморфизма $h \to h^{-1}$, $h \in H_1$.

Теорема 1. *Если база сплетения* $W = (G, X) \wr H$ *не характеристична, то* H *— либо элементарная абелевая 2-группа, либо группа диэдра, а* G *содержит нетривиальный нормальный делитель, являющийся элементарной абелевой 2-группой.*

Доказательство. Пусть $A \in \operatorname{Aut} W$ и $F^A \neq F$, тогда существуют $t \in X$ и $\overline{h} \in H$ такие, что $\pi(\varepsilon_{t,\overline{h}}^{A^{-1}}) \notin K$. Действительно, $F^{A^{-1}} \lhd W$ и, следовательно, $\pi(F^{A^{-1}}) \trianglelefteq G$. Если таких t и $\overline{h}$ не существует, то $\pi(F^{A^{-1}}) < K$, что противоречит антиинвариантности K. Так как мы можем перейти к рассмотрению автоморфизма Ag, где $(\varepsilon_{t,\overline{h}})^g = \varepsilon_{x^*,\overline{h}}$, то, не ограничивая общности, можно считать $t = x^*$. Нетрудно видеть, что элементы $h \in H$, для которых $\pi(\varepsilon_{x^*,h}^{A^{-1}}) \in K$, образуют собственную подгруппу $H_1 < H$. Пусть $(\varepsilon_{x^*,h})^A = g_h f_h$, $h \in H$. Тогда, применяя A к формуле (1), получим

$$[w g_h f_h w^{-1},\ g_{h'} f_{h'}] = e \tag{6}$$

для любых $h, h' \in H$ и $w \in W$ такого, что $\pi(w^{A^{-1}}) \notin K$. Подставляя $w = q^{-1} p(x)$ в (6), получаем равенства

$$g_h^q g_{h'} = g_{h'} g_h^q, \tag{7}$$

$$(p^{g_h} f_h p^{-1})^{q g_{h'}} f_{h'} = f_{h'}^{g_h^q} (p^{g_h} f_h p^{-1})^q, \tag{8}$$

которые должны выполняться для любого $q \in G$ и $p(z) \in H$, $z \neq x^*$. Нетрудно видеть, что элементы $\{g_h\}$, $h \in H$, образуют нетривиальную подгруппу в G, которая есть гомоморфный образ H, при этом, как следует из (7), $\{g_h\}$, $h \in H$, и ее нормальное замыкание абелевы. Если $X = \bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ — разложение X на орбиты элемента g_h, то выберем произвольным образом представителей $x_\alpha \in X_\alpha$, причем x^* — представителем соответствующего ему X_α. Положив в (8) $q = e$, $h = h'$, получим

$$p(x^{g_h^{-2}}) f_h (x^{g_h^{-1}}) p^{-1}(x^{g_h^{-1}}) f_h(x) = f_h(x^{g_h^{-1}}) p(x^{g_h^{-1}}) f_h(x) p^{-1}(x) \tag{9}$$

для любого $p(x)$ такого, что $\pi(p(x)^{A^{-1}}) \notin K$. Если $x \in X_\alpha$ и $x^* \notin X_\alpha$, то можно считать, что равенство (9) должно выполняться для любого $p(x)$. Действительно, равенство (9) не изменится, если в нем заменить $p(x)$ на $\overline{p}(x) = \varepsilon_{x^*,h} p(x)$, причем h можно выбрать так, что $\pi(\overline{p}(x)^{A^{-1}}) \notin K$.

Пусть существует $g_h \neq e$, для которого существует α такое, что $|X_\alpha| > 2$. Тогда, положив в (9) $x = x_\alpha^{g_h}$ и $p(x) = \varepsilon_{x_\alpha,\overline{h}}$, $\overline{h} \in H \setminus H_1$, получим $f_h(x_\alpha^{g_h^{-1}}) f_h(x_\alpha) = f_h(x_\alpha^{g_h^{-1}}) f_h(x_\alpha) \overline{h}^{-1}$ или $\overline{h} = e$ для любого $\overline{h} \in H \setminus H_1$. Так как H_1 — собственная подгруппа, то получено противоречие и, следовательно, $|X_\alpha| \leqslant 2$ для любого g_h и любого α. Пусть существует α такое, что $|X_\alpha| = 2$ и $x^* \notin X_\alpha$. Положив в (9) $x = x_\alpha^{g_h}$ и $p(x) = \varepsilon_{x_\alpha, h'}$, $h' \in H$, получим равенство $f_h(x_\alpha) h^{-1} f_h(x_\alpha^{g_h}) = f_h(x_\alpha) h f_h(x_\alpha^{g_h})$, откуда $h^2 = e$ для любого $h \in H$. Следовательно, H — элементарная абелевая 2-группа. Если всякий элемент $g_h \neq e$ — транспозиция, передвигающая точку x^*, то, положив в (9) $x = x_\alpha^{g_h}$ и $p(x) = \varepsilon_{x^*, \bar{h}}$; $\bar{h} \in H \setminus H_1$, получим равенство $\bar{h}^2 = e$ для любого $\bar{h} \in H \setminus H_1$. Тогда $\bar{h} h_1 \bar{h} h_1 = e$ для любых $\bar{h} \in H \setminus H_1$ и $h_1 \in H_1$ или $\bar{h}^{-1} h_1 \bar{h} = h_1^{-1}$. Следовательно, H_1 — абелева группа. Если $|H : H_1| > 2$, то существуют $u_1, u_2 \notin H_1$ такие, что $u_1 u_2 \notin H_1$. Тогда $h_1 = u_1 (u_2 h_1 u_2) u_1 = (u_1 u_2) h_1 (u_1 u_2) = h_1^{-1}$ для любого $h_1 \in H_1$. Т. е. H_1, а значит, и H — элементарная абелевая 2-группа. При $|H : H_1| = 2$ H — группа диэдра. Теорема доказана.

3. Дадим описание всех возможных дополнений к Φ в $\widetilde{W}$, т. е. таких подгрупп $Q < \widetilde{W}$, что $\widetilde{W} = Q\Phi$ и $Q \cap \Phi = \{e\}$. Очевидно, что существует изоморфизм $\mu : G \to Q$, причем $g^\mu = g\varphi_g$, где $\{\varphi_g\}$, $g \in G$, — семейство функций из Φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1}^{g_2} \varphi_{g_2}. \tag{10}$$

Верно и обратное: если $\{\varphi_g\}$, $g \in G$, — произвольное семейство функций из Φ, удовлетворяющих (10), то элементы $g\varphi_g \in \widetilde{W}$ образуют группу, являющуюся дополнением к Φ в $\widetilde{W}$. Заметим, что условие (10) достаточно проверять в точке x^*. Действительно, $\varphi_{g_1 g_2}(x) = \varphi_{g_1 g_2}(x^{*q^{-1}}) = \varphi_{g_1 g_2 q}(x^*) \varphi_q^{-1}(x^*) = \varphi_{g_1}(x^{*q^{-1} g_2^{-1}}) \varphi_{g_2 q}(x^*) \varphi_q^{-1}(x^*) = \varphi_{g_1}(x^{g_2^{-1}}) \varphi_{g_2}(x^{*q^{-1}}) \varphi_q(x^*) \varphi_q^{-1}(x^*) = \varphi_{g_1}^{g_2} \varphi_{g_2}(x)$, $x^q = x^*$.

Лемма 2. *Если G_1 и G_2 — дополнения к Φ, задаваемые системами функций $\{\varphi_{g,1}\}_{g \in G}$, $\{\varphi_{g,2}\}_{g \in G}$ соответственно, то $G_1 = G_2^i$ для некоторого $i \in \widetilde{I}$ тогда и только тогда, если существует $h \in H$ такой, что $\varphi_{k,1}(x^*) = h^{-1} \varphi_{k,2}(x^*) h$ для любого $k \in K$.*

Доказательство. Если $G_1 = G_2^i$, то существует $f \in \Phi$ такая, что $f g \varphi_{g,1} f^{-1} = g \varphi_{g,2}$ для любого $g \in G$, т. е. существует решение системы уравнений

$$f(x^{g^{-1}}) \varphi_{g,1}(x) f^{-1}(x) = \varphi_{g,2}(x), \qquad g \in G. \tag{11}$$

Положив $g = k$ и $x = x^*$, получим сопряженность $\varphi_{k,1}(x^*)$ и $\varphi_{k,2}(x^*)$. Обратно, пусть $\varphi_{k,1}(x^*) = h^{-1} \varphi_{k,2}(x^*) h$ для некотого $h \in H$ и любого $k \in K$. Достаточно показать, что существует решение системы (11). Определим функцию $f \in \Phi$ следующим образом: $f(x^*) = h$, $f(x) = \varphi_{q,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{q,1}^{-1}(x^*)$, где $q \in G$ такой, что $x^q = x^*$. Покажем корректность определения: пусть $q_1 \in G$ и $x^{q_1} = x^*$, тогда $q_1 = qk$ для некоторого $k \in K$. Используя равенство (10), для $\varphi_{g,1}$ и $\varphi_{g,2}$ имеем

$$\varphi_{q_1,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{q_1,2}^{-1}(x_1^*) = \varphi_{qk,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{qk,2}^{-1}(x^*) =$$

$$= \varphi_{q,2}(x^*) \varphi_{k,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{k,1}^{-1}(x^*) \varphi_{q,1}^{-1}(x^*) = \varphi_{q,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{q,1}^{-1}(x^*) = f(x).$$

Проверим, что так построенная функция $f \in \Phi$ удовлетворяет (11):

$$f(x^{g^{-1}}) = f(x^{*q^{-1} g^{-1}}) = \varphi_{gq,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{gq,1}^{-1}(x^*) =$$

$$= \varphi_{g,2}(x^{*q^{-1}}) \varphi_{q,2}(x^*) f(x^*) \varphi_{q,1}^{-1}(x^*) \varphi_{g,1}^{-1}(x^{*q^{-1}}) = \varphi_{g,2}(x) f(x) \varphi_{g,1}^{-1}(x).$$

Этим лемма доказана.

Заметим, что как следует из (10), элементы $\varphi_k(x^*)$, $k \in K$, образуют подгруппу в H, являющуюся гомоморфным образом K. Каждому дополнению Q к Φ в $\tilde{W}$ сопоставим $\theta \in \mathrm{Hom}(K, H)$, $\theta(k) = \varphi_k(x^*)$. Согласно лемме 2, два дополнения, которым соответствуют θ_1 и θ_2, сопряжены относительно Φ тогда и только тогда, когда $\theta_2 = \theta_1 i$, где i — некоторый внутренний автоморфизм H. Выберем произвольный $\theta \in \mathrm{Hom}(K, H)$ и построим соответствующее ему дополнение. Пусть $G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda K$ — разложение на классы смежности по K и ρ — некоторая фиксированная выбирающая функция ($\rho(g) = g_\lambda$, если $g \in g_\lambda K$), причем $\rho(k) = e$, $k \in K$. Положим $\xi(g) = \rho^{-1}(g)\, g$. Определим семейство функций $\{\overline{\varphi}_g(x)\}$, $g \in G$, следующим образом: $\overline{\varphi}_k(x^*) = \theta(k)$ для любого $k \in K$, $\overline{\varphi}_g(x^*) = \overline{\varphi}_{\xi(g)}(x^*)$, причем $\overline{\varphi}_{g_\lambda}(x^*) = e$, $\lambda \in \Lambda$,

$$\overline{\varphi}_g(x) = \overline{\varphi}_{gq}(x^*)\, \overline{\varphi}_q^{-1}(x^*), \tag{12}$$

где $x^q = x^*$. Непосредственно проверяется, что определение (12) не зависит от выбора q. Как следует из (12), построенное таким образом семейство функций удовлетворяет условию (10) в точке x^*, а значит, и в произвольной точке x. Следовательно, элементы $\{g\overline{\varphi}_g\}$, $g \in G$, образуют дополнение к Φ в $\tilde{W}$, которое будем называть приведенным. Введем на множестве $\mathrm{Hom}(K, H)$ отношение эквивалентности: $\theta_1 \sim \theta_2$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 = \theta_2 i$ для некоторого $i \in \mathrm{Int}\, H$. Обозначим $\overline{\mathrm{Hom}}(K, H) = \mathrm{Hom}(K, H)/\sim$.

Теорема 2. *Имеется взаимно однозначное соответствие между классами сопряженных дополнений к Φ в $\tilde{W}$ и множеством $\overline{\mathrm{Hom}}(K, H)$.*

Доказательство. Остается показать, что если $G_1 \{g\varphi_{g,1} = | g \in G\}$, $G_2 = \{g\varphi_{g,2} \,|\, g \in G\}$ — два сопряженных относительно G дополнения к Φ, то существует $h \in H$ такой, что $\varphi_{k,1}(x^*) = h\varphi_{k,2}(x^*)\, h^{-1}$ для любого $k \in K$. Если $q \in G$ такой, что $G_1 = qG_2q^{-1}$, то, так как $q^{-1} g\varphi_{g,1} q = g^q \varphi^q_{g,1}$, имеем $\varphi_{g^q,2} = \varphi^q_{g,1}$. Используя это и (10), получим

$$\varphi_{k,1}(x^*) = \varphi_{k^q,2}(x^{*q}) = \varphi_{kq^{-1},2}(x^*)\, \varphi^{-1}_{q^{-1},2}(x^*) = \varphi_{q^{-1}k,2}(x^*)\, \varphi^{-1}_{q^{-1},2}(x^*) =$$

$$= \varphi_{q^{-1},2}(x^*)\, \varphi_{k,2}(x^*)\, \varphi^{-1}_{q^{-1},2}(x^*),$$

что и доказывает теорему.

4. Предположим, что F характеристична в W. Имеем гомоморфизмы $\psi_1 : \mathrm{Aut}\, W \to \mathrm{Aut}\, G$, $\chi_2 = \psi_2' \eta : \mathrm{Aut}\, W \xrightarrow{\chi_2'} \mathrm{Aut}\, F \xrightarrow{\eta} \mathrm{Aut}\, F/\tilde{I}$, где η — канонический гомоморфизм. Положим $P = G\, \mathrm{Int}\, F$, $P \leqslant \mathrm{Aut}\, F$, $\Gamma = \mathrm{Ker}\, \psi_1 \cap \mathrm{Ker}\, \psi_2$. По теореме Ремака можно построить точную последовательность гомоморфизмов

$$E \to \Gamma \to \mathrm{Aut}\, W \to \mathrm{Im}\, \psi_1 \,\overline{\times}\, \mathrm{Im}\, \psi_2 \to E, \tag{13}$$

где $\overline{\times}$ — некоторое подпрямое произведение.

Лемма 3. $(\alpha, \overline{\beta}) \in \mathrm{Im}\, \psi_1 \,\overline{\times}\, \mathrm{Im}\, \psi_2$ *тогда и только тогда, если для любого* $\beta \in \mathrm{Aut}\, F$ *такого, что* $\beta^\eta = \overline{\beta}$, $\beta \in N_{\mathrm{Aut}\, F}(P)$, *а* α — *автоморфизм, индуцируемый* β *на* G.

Доказательство. Выберем некотрый автоморфизм $A \in \mathrm{Aut}\, W$ из класса смежности по Γ, соответствующий $(\alpha, \overline{\beta}) \in \mathrm{Im}\, \psi_1 \,\overline{\times}\, \mathrm{Im}\, \psi_2$. Нетрудно видеть, что $g^A = \overline{g}\varphi_{\overline{g}}$, $f^A = f^\beta$, где $\overline{g} = g^\alpha$. Пусть $w_1 = g_1 f_1$, $w_2 = g_2 f_2$, тогда

$$(w_1 w_2)^A = (g_1 g_2 f_1^{g_2} f_2)^A = \overline{g_1 g_2}\, \varphi_{\overline{g_1 g_2}}\, (f_1^{g_2} f_2)^\beta,$$

$$w_1^A w_2^A = \overline{g}_1 \varphi_{\overline{g}_1} f_1^\beta \overline{g}_2 \varphi_{\overline{g}_2} f_2^\beta = \overline{g}_1 \overline{g}_2 \varphi_{\overline{g}_1}^{\overline{g}_2} f_1^{\beta \overline{g}_2} \varphi_{\overline{g}_2} f_2^\beta.$$

Приравнивая правые части этих равенств и учитывая (10), получаем $\varphi_{\overline{g}} f^{g\beta} = f^{\beta\overline{g}} \varphi_{\overline{g}}$. Если $i_{\overline{g}}$ — внутренний автоморфизм F, индуцируемый φ_g, то последнее равенство можно записать в виде $\beta^{-1} g \beta = \overline{g} i_{\overline{g}}$, $g \in G$. Отсюда $\beta \in$

$\in N_{\mathrm{Aut}F}(P)$. Обратно, пусть $\beta^{-1}g\beta = \bar{g}i_{\bar{g}}$. Нетрудно проверить, что отображение $A: g^A = \bar{g}\varphi_{\bar{g}},\ f^A = f^{\beta}$, где $\varphi_g \in F$ индуцирует $i_g \in \mathrm{Int}\, F$, является автоморфизмом W и $(\alpha, \beta^{\eta}) \in \mathrm{Im}\, \psi_1 \overline{\times} \mathrm{Im}\, \psi_2$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $\beta \in \mathrm{Aut}\, F$ задается системой эндоморфизмов $(T_{x,y})$, $x, y \in X$, то $\beta \in N_{\mathrm{Aut}F}(P)$ тогда и только тогда, если*

$$T_{x^g, y} = T_{x, y^{g^{-\alpha}}} i_{g^{\alpha}}(y) \tag{14}$$

для любого $g \in G$, где $i_g(y) \in \mathrm{Int}\, H$, индуцируются некоторым семейством функций $\{\varphi_g(y)\}$, $g \in G$, удовлетворяющих (10).

Доказательство. Если $\beta \in N_{\mathrm{Aut}F}(P)$, то $f^{g\beta} = \varphi_{\bar{g}}^{-1} f^{\beta\bar{g}} \varphi_{\bar{g}}$, где $\bar{g} = g^{\alpha}$. Положим $f = \varepsilon_{x,h}$, тогда $(\varepsilon_{x,h})^{g\beta} = (\varepsilon_{x^g,h})^{\beta} = \prod_{y \in X} h^{T_{x^g,y}}$; $(\varepsilon_{x,h})^{\beta\bar{g}} = \left(\prod_{y \in X} h^{T_{x,y}}\right)^{\bar{g}} = \prod_{y \in X} h^{T_{x,y^{\bar{g}^{-1}}}}$. Отсюда получаем равенство (14). Из последних равенств следует и достаточность.

Следствие. $\beta \in N_{\mathrm{Aut}F}(G)$ *тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ $T_{x^g,y} = T_{x,y^{g^{-\alpha}}}$.*

Лемма 5. $\mathrm{Aut}\, W = N\Gamma$, *где* $N = \{u \in \mathrm{Aut}\, W \mid G^u = G\}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Aut}\, W$ и $g^A = g^{\alpha}\varphi_{g^{\alpha}}$, $f^A = f^{\beta}$. В классе сопряженных с G^A дополнений к Φ выберем приведенное, т. е. выберем $i \in \tilde{I}$ такое, что $g^{A_1} = g^{\alpha}\bar{\varphi}_{g^{\alpha}}$, $f^{A_1} = f^{\beta'} = f^{\beta i}$, где $A_1 = Ai$, причем $\varphi_{g^{\lambda}}(x^*) = e$, $\lambda \in \Lambda$. Пусть β' задается системой эндоморфизмов $(T_{x,y})$. Согласно лемме 3 $\beta' \in N_{\mathrm{Aut}F}(P)$, и по лемме 4 для $(T_{x,y})$ должно выполняться равенство (14), где $i_g(y)$ — внутренний автоморфизм H, индуцируемый $\bar{\varphi}_g(y)$. Учитывая, что при каждом фиксированном $\bar{x}$ множество эндоморфизмов $\{T_{\bar{x},y} \mid y \in X\}$ содержит лишь конечное число нетривиальных, из (14) легко получить, что $|X_z| < \infty$ для любого z. Положим в (14) $g = g_{\lambda}^{\alpha^{-1}}$ и $y = x^*$, тогда $T_{x^{g_{\lambda}^{\alpha^{-1}}}, x^*} = T_{x, x^{*g_{\lambda}^{-1}}}$, $\lambda \in \Lambda$. Отсюда $\sigma_z = \sigma_{x^*} = \sigma$ для любого $z \in X$, и по следствию из леммы 1 σ — автоморфизм H. Тогда, применяя формулу (14), получим $i_k(x^*) = \sigma^{-1} \sum_{x \in X} T_{x,x^*} i_k(x^*) = \sigma^{-1} \times \sum_{x \in X} T_{x^{k^{\alpha^{-1}}}, x^*} = e$, $k \in K$. Это означает, что $\varphi_k(x^*) \in Z(H)$ для любого $k \in K$. Но тогда из определения (12) системы функций $\{\bar{\varphi}_g\}$ следует, что $\bar{\varphi}_g \in Z(F)$, а $i_g(x) = e$, $g \in G$. По следствию из леммы 4 $\beta' \in N_{\mathrm{Aut}F}(G)$. Нетрудно видеть, что отображение $A_2: (gf)^{A_2} = g^{\alpha} f^{\beta'}$ — автоморфизм W. Так как $A_2 \in N$ и $A_2^{-1}A \in \Gamma$, то этим лемма доказана. Отметим, что $N \simeq N_{\mathrm{Aut}F}(G)$.

Пусть $\tilde{I}_1$ — подгруппа автоморфизмов, индуцируемых элементами из $Z(\Phi)$, $\tilde{I}_1 < \tilde{I}$.

Лемма 6. а) $\Gamma = \Gamma_1 \times \tilde{I}$, *где Γ_1 такая, что $\Gamma_1 \times \tilde{I}_1$ — группа стабильности ряда $W \rhd F \rhd \{e\}$;*

б) *при* $|X| < \infty$ $\Gamma_1 \simeq \mathrm{Hom}\,(K, Z(H))$.

Доказательство. Если $u \in \Gamma$, то $f^u = f^i$, $i \in \tilde{I}$. Пусть $u_1 = ui^{-1}$, тогда $g^{u_1} = g\varphi_g$, $f^{u_1} = f$, причем $\varphi_g \in Z(F)$, $g \in G$. Действительно,

$$g\varphi_g f = (gf)^{u_1} = (f^{g^{-1}}g)^{u_1} = f^{g^{-1}} g\varphi_g = gf\varphi_g, \qquad f \in F.$$

Нетрудно проверить, что если $Q = \{g\varphi_g \mid g \in G\}$ — дополнение к Φ в $\tilde{W}$ и $\varphi_g \in Z(F)$ для любого $g \in G$, то отображение $g^{u_1} = g\varphi_g$, $f^{u_1} = f$ — автоморфизм W. Тогда пусть $\theta(k) = \varphi_k(x^*)$, $k \in K$, $\theta \in \mathrm{Hom}\,(K, Z(H))$. Тогда согласно теореме 2 θ однозначно соответствует классу смежности $u_1\tilde{I}$. Пусть

$u^\theta \in u_1\tilde{I}$ такой, что $Q_1 = G^{u\theta}$ — приведенное дополнение к Φ в $\tilde{W}$, $g^{u^\theta} = \bar{g}\varphi_g$, $g \in G$. Как уже отмечалось, $\bar{\varphi}_g(x) \in Z(F)$ для любого $g \in G$. Из доказательства леммы 2 следует, что Q и Q_1 сопряжены относительно $Z(\Phi)$, т. е. $Q_1 = Q^{i_1}$, $i_1 \in \tilde{I}_1$ и u^θ стабилизирует ряд $W \rhd F \rhd \{e\}$. Покажем, что так построенные автоморфизмы u^θ образуют группу Γ_1. Пусть $g^{u^{\theta i}} = g\varphi_{g^i}$, $i = 1, 2, 3$, и $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$. Тогда $g^{u^{\theta_1}u^{\theta_2}} = g\varphi_g^1\varphi_g^2$, $\varphi_g^1\varphi_g^2(x) = (\theta_1 + \theta_2)(\xi(gg_\lambda)) = \varphi_g^3(x)$, $x^{g_\lambda} = x^*$. Следовательно, $u^{\theta_1}u^{\theta_2} = u^{\theta_3}$. Аналогично $u^{-\theta} = u^{\theta^{-1}}$. Отметим, что при $|X| = \infty$ приведенное дополнение, построенное по некоторому $\theta \in \mathrm{Hom}(K, Z(H))$, может не принадлежать W, поэтому Γ_1 изоморфна некоторой подгруппе $\mathrm{Hom}(K, Z(H))$. Нетрудно проверить, что Γ_1 коммутирует с $\tilde{I}$ и $\Gamma_1 \cap \tilde{I} = \{e\}$. Этим лемма доказана.

Теорема 3. *Если F характеристична, то* $\mathrm{Aut}\, W = N(\Gamma_1 \times \tilde{I})$, *где N — группа автоморфизмов вида $gf \to g^\alpha f^\beta$, $\beta \in N_{\mathrm{Aut}F}(G)$ и $\beta^{-1}g\beta = g^\alpha$, $N \simeq N_{\mathrm{Aut}F}(G)$, $\Gamma_1 \times \tilde{I}_1$ — группа стабильности ряда $W \rhd F \rhd \{e\}$, при $|X| < \infty$, $\Gamma_1 \simeq \mathrm{Hom}(K, Z(H))$ $\tilde{I}$ $(\tilde{I}_1)$ — группа автоморфизмов, индуцируемых $\Phi(Z(\Phi))$ на W.*

Доказательство следует из лемм 3, 5, 6.

Лемма 7. *Если $|X| < \infty$, то $N = N_1C_1$,* где *N_1 — подгруппа автоморфизмов, действующих тождественно на диагонали $D < \Phi$, а C_1 — группа автоморфизмов вида $gf \to gf^\sigma$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\, H$, $C_1 \simeq \mathrm{Aut}\, H$.*

Аналогичное разложение для $C_{\mathrm{Aut}F}(G)$ получено в [2] без использования регулярности (G, X). Те же рассуждения непосредственно переносятся и на $N_{\mathrm{Aut}F}(G)$.

В заключение отметим, что в [3] случай $S_6 \wr H$ не рассматривается в силу наличия у S_6 внешнего автоморфизма α. Как было показано, для того чтобы α поднимался до автоморфизма W, он должен индуцироваться некоторым $\beta \in N_{\mathrm{Aut\,F}}(G)$. Рассмотрим действие S_6 на $X \times X$ по правилу $(x_1, x_2) = (x_1^g, x_2^{g^\alpha})$. Непосредственно проверяется, что такое действие транзитивно. Если β задается системой эндоморфизмов $(T_{x,y})$, то по следствию из леммы 4 все эндоморфизмы этой системы равны между собой и система уравнений (4) имеет более одного решения. Следовательно, α не поднимается до автоморфизма $S_6 \wr H$ и этот случай не является исключительным. Описание автоморфизмов $S_n \wr H$, $n \neq 2$, данное в [3] для $n \neq 6$, верно и в этом случае, его можно получить также, применяя результаты настоящей работы.

1. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М.: Наука, 1966.— 604 с.
2. *Houghton C. H.* On the automorphism of certain wreath products.— Publ. math., 1962, **9**, N 3, p. 307—313.
3. *Ore O.* Theory of monomial groups.—Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **51**, p. 15—64.
4. *Neyman P. M.* On the structure of standart wreath products of groups.— Math. Z., 1964, **84**, p. 343—373.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию 03.05.83
после доработки — 10.11.83