УДК 519.21

В. А. Гасаненко

Редеющие процессы

Редеющим потокам посвящено достаточно много работ [1—9]. Объект исследований в этих работах состоит как бы из трех частей: исходный точечный поток, операция разрежения, результирующий или редеющий поток. Обычно предполагалось, что известны две из них, а исследовалась третья. В данной статье, как и в [1—7], исследуется редеющий поток и сделана попытка предложить общие модели в этом направлении.

Определение 1. *Пусть $\eta(t)$, $t \geqslant 0$, — скачкообразный случайный процесс со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A}(X))$. Обозначим через τ_k моменты k-го скачка процесса $\eta(t)$, а через $\hat{\eta}(k) = \eta(\tau_k)$ — вложенный процесс для $\eta(t)$. Пусть $F_1 = \{s(x, l), x \in X, l = 1, 2, \ldots\}$ — семейство случайных величин со значениями в $\{1, 2, \ldots\}$, у которых функции распределения не зависят от индекса l. Определим редеющий процесс*

$$\varkappa_1(t) = \begin{cases} \eta(0), & 0 \leqslant t < \tau_{s(\hat{\eta}(0),1)}, \\ \eta(s(\hat{\eta}(0), 1)), & \tau_{s(\hat{\eta}(0),1)} \leqslant t < \tau_{s(\hat{\eta}(0),1)+s(\hat{\eta}(s(\hat{\eta}(0),1)),2)}, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Определение 2. *Пусть $y(t)$, $t \geqslant 0$ — случайный процесс с измеримым фазовым пространством $(X, \mathfrak{A}(X))$, а $F_2 = \{z(x, l), x \in X, l = 1, 2, \ldots\}$ — семейство случайных положительных величин, у которых функции распределения не зависят от индекса l. Определим редеющий процесс*

$$\varkappa_2(t) = \begin{cases} y(0), & 0 \leqslant t < z(y(0), 1), \\ y(z(y(0), 1)), & z(y(0), 1) \leqslant t < z(y(0), 1) + z(y(z(y(0), 1)), 2), \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

В приложениях обычно изучают моменты скачков редеющих процессов. Пусть $\tau_{\beta(k)}$ — момент k-го скачка $\varkappa_1(t)$ и $\theta(k)$ — момент k-го скачка $\varkappa_2(t)$. Тогда справедливы стохастические соотношения

$$\beta(k) = \beta(k-1) + s(\hat{\eta}(\beta(k-1)), k),$$
$$\theta(k) = \theta(k-1) + z(y(\theta(k-1), k). \tag{1}$$

Рассмотрим предельное поведение последовательностей, определенных в (1), если семейства F_1, F_2 зависят от индекса n.

Редеющие процессы в схеме серий исследовались достаточно широко [1—7]. Исчерпывающие результаты о редеющих процессах восстановления были, например, получены в [4, 6, 7]. В терминах данных определений в этих работах изучался тот случай, когда случайные величины из семейств F_1, F_2 зависят от индекса n и в известном смысле стремятся к вырожденным случайным величинам.

Докажем предельную теорему для $\theta(k)$, $k \geqslant 0$,— моментов скачков $\varkappa_2(t)$. Аналогичный результат, как следует из (1), будет справедлив и для последовательности $\beta(k)$. Исследование же моментов скачков $\varkappa_1(t) - \tau_{\beta(k)}$ можно проводить с помощью теорем переноса.

Пусть * — символ свертки; при каждом n семейство $F_{2,n}$ независимых в совокупности случайных величин не зависящих от процесса $y(t)$; X — метрическое пространство.

$$\mathfrak{F}_{\leqslant t} = \sigma(y(x), x \leqslant t), \quad \rho(A) = P(y(0) \in A), \quad A \in \mathfrak{A}(X),$$
$$\theta_n(m) = \theta_n(m-1) + z_n(y(\theta_n(m-1)), m). \tag{2}$$

Теорема 1 Пусть выполняются условия:

1) *существуют такие числа* $c_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *что*

$$P(z_n(x, 1) < c_n y) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x, y)$$

равномерно по x *для каждого* y, *здесь* $G(x, y)$ *при каждом* x — *непрерывные функции распределения по* y *и* $G(x, 0+) = 0$

2) почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} |P(y(c_n t) \in A / \mathfrak{F}_{\leqslant c_n(t-x)}) - \pi(A)| = 0,$$

где $\pi(A)$ — *вероятностная мера на* X, A — π-*непрерывно*, $x > 0$, I — *любой фиксированный конечный интервал, отделимый от* 0.
Тогда

$$P(\theta_n(m) < c_n y) \xrightarrow[n\to\infty]{} G_1 * G_2^{*(m-1)}(y),$$

где

$$G_1(y) = \int_X G(x, y)\, \rho(dx), \quad G_2(y) = \int_X G(x, y)\, \pi(dx).$$

Доказательство проведем методом индукции по m. Для $m = 1$

$$P(\theta_n(1) < c_n y) = P(z_n(y(0), 1) < c_n y) = \int_X P(z_n(x, 1) < c_n y)\, \rho(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to\infty]{} G_1(y).$$

Здесь предельный переход сделан в силу теоремы Лебега.

Пусть теорема справедлива для $k = m - 1$. Сделаем следующий шаг индукции:

$$P(\theta_n(m) < c_n y) = P(\theta_n(m) < c_n y, \quad z_n(y(\theta_n(m-2)), m-1) \geqslant c_n \delta) +$$
$$+ P(\theta_n(m) < c_n y, \; z_n(y(\theta_n(m-2)), m-1) < c_n \delta). \tag{3}$$

Оценим второе слагаемое α_n в правой части (3).

$$\alpha_n \leqslant P(z_n(y(\theta_n(m-2)), m-1) < c_n \delta) = \int_X P(z_n(x, m-1) < c_n \delta) \times$$
$$\times P(y(\theta_n(m-2)) \in \mathrm{d}x). \tag{4}$$

Ясно, что в силу условия 1 подбором δ и $N(\varepsilon)$ можно сделать α_n меньше любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $n > N(\varepsilon)$. Первое слагаемое в (3), согласно (2), после замены переменных имеет вид

$$\int_{X^m} \int_{\substack{v_1+\dots+v_m<y \\ v_{m-1}>\delta}} P(z_n(x_1, 1) \in dv_1 c_n) \cdot \ldots \cdot P(z_n(x_{m-1}, m) \in dv_{m-1} c_n) \times \tag{5}$$
$$\times P(z_n(x_m, m) \in dv_m c_n)\, P(y(c_n(v_1 + \ldots + v_{m-1})) \in dx_m, \ldots, y(0) \in dx_1).$$

Так как из условий теоремы при $v_{m-1} > \delta$ следует сходимость

$$\int_X P(z_n(x_m, m) < c_n(t - (v_1 + \ldots + v_{m-1})))\, P(y((v_1 + \ldots + v_{m-1}) c_n) \in$$
$$\in dx_m / y((v_1 + \ldots + v_{m-2}) c_n) \in dx_{m-1}, \ldots, y(0) \in dx_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} G_2(t - (v_1 + \ldots + v_{m-1})), \tag{6}$$

то из (5), (6) заключаем, что

$$P(\theta_n(m) < c_n y) = P(c_n^{-1} \theta_n(m-1) < \cdot) * G_2(y) + \varepsilon_n(\delta),$$

где $\varepsilon_n(\delta) \leqslant P(z_n(y(\theta_n(m-2)), m-1) < c_n \delta)$.

Таким образом, из (4) и предположения индукции следует доказательство теоремы.

Рассмотрим точечный процесс на $[0, \infty)$. Пронумеруем точки-события в порядке их удаленности от нуля. Произведем разрежение этого процесса. Определим индикаторы $\chi(i)$, $i \geqslant 1$,

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я точка осталась в потоке.} \\ 0, & \text{если } i\text{-я точка выброшена.} \end{cases}$$

Если $\xi(l) = \min\{j \geqslant 1 : \chi(l + j) = 1\}$, то многие задачи редеющих процессов сводятся к исследованию последовательности $\beta(m) = \beta(m - 1) + \xi(\beta(m - 1))$, $\beta(0) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Заметим, что $\beta(m)$ — номер m-го оставшегося в потоке требования.

Исследуем предельное поведение последовательности $\beta_n(m) = \beta_n(m - 1) + \xi_n(\beta_n(m - 1))$, $\beta_n(0) = 0$, где $\xi_n(t) \in \{1, 2, \ldots\}$, $t \in \{0, 1, 2 \ldots\}$, $n \geqslant 1$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\nu(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ — случайный целочисленный положительный процесс. Тогда если есть сходимость $P(\nu(t) = k) \underset{t \to \infty}{\to} P(\eta = k)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$ (здесь η — некоторая случайная величина, $\eta \in \{1, 2, \ldots\}$), то через $b_\nu(m)$, $m \geqslant 0$, будем обозначать равномерную скорость стремления к стационарному распределению

$$b_\nu(m) = \sup_{k \geqslant 1} |P(\nu(m) = k) - P(\eta = k)|, \quad m \geqslant 0.$$

Обозначив через $F_{\leqslant x}$, F_x сигма-алгебры, образованные соответственно семействами случайных величин $\{\nu(t), t \leqslant x\}$ $\{\nu(x)\}$, определим коэффициент перемешивания как

$$\alpha_\nu(m) = \sup_x \sup_{A \in F_{\leqslant x}, B \in F_{x+m}} |P(A \cdot B) - P(A) P(B)|, \quad m \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Если существует такая последовательность чисел $c_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что выполнены условия*

$$P(\xi_n(0) < c_n x) \underset{n \to \infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} G_1(x); \tag{7}$$

$$P(\eta_n < c_n x) \underset{n \to \infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} G_2(x); \tag{8}$$

$$\alpha_{\xi_n}(c_n) c_n^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0; \tag{9}$$

$$b_{\xi_n}(c_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{10}$$

то

$$P(\beta_n(m) c_n^{-1} < x) \underset{n \to \infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}} G_1 * G_2^{*(m-1)}(x),$$

где G_1, G_2 — функции распределения, $G_1(0+) = 0$.

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по m. Для $m = 1$ утверждение теоремы следует из условия (7). Пусть утверждение теоремы справедливо для $m = k - 1$ и x — точка непрерывности для $G_1 * G_2^{*(k-1)}(\cdot)$, тогда

$$P(\beta_n(k) < c_n x) = P(\beta_n(k - 1) + \xi_n(\beta_n(k - 1)) < c_n x) =$$

$$= \sum_{l = k-1}^{[c_n x]} \sum_{r = k-2}^{l} P(\beta_n(k - 2) = r, \xi_n(r) = l - r, \quad \xi_n(l) < [c_n x] - l) =$$

$$= \sum_{l=k-1}^{[c_n \delta]} \sum_{r=k-2}^{l} + \sum_{l=[c_n \delta]+1}^{[c_n x]} \sum_{r=k-2} = \sum_{l=k-1}^{[c_n x]} \sum_{r=k-2}^{l} + \sum_{l=[c_n \delta]+1}^{[c_n x]} \sum_{r=k-2}^{[l - c_n \delta_1]} + \sum_{l=[c_n \delta]+1}^{[c_n x]} \sum_{r=[l - c_n \delta_1]+1}^{l}; \tag{11}$$

$$\sum_{l=k-1}^{[c_n \delta]} \sum_{r=k-2}^{l} = P(\xi_n(\beta_n(k - 1) + \beta_n(k - 1) < [c_n x],$$

$$\beta_n(k-1)\leqslant[c_n\delta])\leqslant G_1*G_2^{*(k-1)}(\delta)+o(1); \qquad (12)$$

$$\sum_{l=[c_n\delta]}^{[c_nx]}\sum_{r=[l-c_n\delta_1]+1}^{l}\leqslant\sum_{l=[c_n\delta]}^{[c_nx]}P(\xi_n(l)<[c_nx]-l,\quad \beta_n(k-1)=l,\quad \beta_n(k-2)\in$$

$$\in[[l-c_n\delta_1],\,l])\leqslant\sum_{l=[c_n\delta]}^{[c_nx]}P(\beta_n(k-2)\in[[l-c_n\delta_1],\,l])=$$

$$=\sum_{l=[c_n\delta]}^{[c_nx]}P(\beta_n(k-2)\leqslant l)-\sum_{l_1=[c_n(\delta-\delta_1)]}^{[c_n(x-\delta_1)]}P(\beta_n(k-2)\leqslant l_1)=G_1*G_2^{*(k-3)}(x)-$$

$$-G_1*G_2^{*(k-3)}(x-\delta_1)+G_1*G_2^{*(k-3)}(\delta)-G_1*G_2^{*(k-3)}(\delta-\delta_1)+o(1), \qquad (13)$$

δ_1 выбрано так, что $x-\delta_1$ — точка непрерывности для распределений правой части (13).

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (11). Обозначим его через $J(n)$, получим

$$J(n)-\sum_{l=[c_n\delta]}^{[c_nx]}\sum_{r=k-2}^{[l-c_n\delta_1]}P(\beta_n(k-2)=r,\xi_n(r)=l-r)\,P(\xi_n(l)<[c_nx]-l)\leqslant$$

$$\leqslant\alpha_{\xi_n}([c_n(\delta-\delta_1)])\,[c_nx]^2. \qquad (14)$$

Следовательно, из (14) имеем

$$\mathcal{J}(n)=\sum_{l=0}^{[c_nx]}P(\beta_n(k-1)=l)\,P(\eta_n<[c_nx]-l)+r_n, \qquad (15)$$

где $|r_n|\leqslant G_1*G_2^{*(k-1)}(\delta)+G_1*G_2^{*(k-2)}(\delta-\delta_1)+b_{\xi_n}(c_n\delta)+\alpha_{\xi_n}([c_n(\delta-\delta_1)])\times$ $\times[c_nx]^2$.

Таким образом, подбирая δ, $\delta_1\delta>\delta_1>0$, из (12) — (15), предположения индукции и того факта, что операция свертки непрерывна относительно слабой сходимости вероятностных мер, имеем

$$P(\beta_n(k)<c_nx)\underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}}G_1*G_2^{*(k-1)}(x).$$

1. *Анисимов В. В., Гасаненко В. А.* Управляемые редеющие потоки.— Кибернетика, 1978. № 1, с. 119—121.
2. *Беляев Ю. К.* Предельная теорема для редеющих потоков.— Теория вероятностей и ее применение, 1963, 8, № 2, с. 175—184.
3. *Гасаненко В. А.* О разрежении полумарковского процесса со счетным множеством состояний.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1980, вып. 22, с. 25—29.
4. *Гнеденко Б. В., Фрайер Б.* Несколько замечаний к работе И. Н. Коваленко.— Лит. мат. сб., 1969, 9, № 3, с. 469—470.
5. *Закусило О. К.* Редеющие полумарковские процессы.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1972, вып. 6, с. 54—59.
6. *Коваленко И. Н.* О классе предельных распределений для потоков однородных событий.— Лит. мат. сб., 1965, 5, № 4, с. 569—573.
7. *Модьороди Й.* Несколько замечаний о разрежении рекуррентных потоков.— Там же, 1971, 11, № 2, с. 303—315.
8. *Поляк Д. Т.* О разрежении рекуррентных потоков.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 4, с. 81—87.
9. *Саас Д.* О классе предельных распределений для сумм случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин.— Теория вероятностей и ее применение, 1972, 17, № 3, с. 424—439.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 20.07.81
после переработки — 18.05.82