УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля),
С. И. Жир (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

For the entire transcendental functions f of many complex variables m $(m \geqslant 2)$ of finite generalized order of growth $\rho_m(f;\alpha,\beta)$, we obtain the limiting relationships between the indicated characteristic of growth and the sequences of the best polynomial approximations of f in the Hardy Banach spaces $H_q(U^m)$ and in the Banach spaces $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, studied by M. I. Gvaradze. The presented results are the extensions of the corresponding statements of R. S. Varga, A. V. Batirev, S. M. Shah, A. R. Reddy, I. I. Ibragimov and N. I. Shikhaliev to the multivariate case.

Для цілих трансцендентних функцій f багатьох комплексних змінних m $(m \geqslant 2)$, які мають узагальнений порядок зростання $\rho_m(f;\alpha,\beta)$, отримано граничні співвідношення між вказаною характеристикою зростання та послідовностями найкращих поліноміальних наближень f у банахових просторах Гарді $H_q(U^m)$ та банахових просторах $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, що вивчались М. І. Гварадзе. Зазначені результати є поширенням на багатовимірний випадок відповідних тверджень R. S. Varga, А. В. Батирєва, S. M. Shah, A. R. Reddy, I. I. Ібрагімова та Н. І. Шихалієва.

1. В случае функций одной комплексной переменной в работе [1] была достаточно полно изложена история вопроса о связи между скоростью стремления к нулю последовательностей наилучших полиномиальных приближений целых трансцендентных функций и некоторыми обобщенными характеристиками их роста. Для целых трансцендентных функций многих комплексных переменных в этом направлении получено значительно меньше результатов указанного вида (см., например, [2 – 4]). В данной статье продолжается развитие этой тематики в многомерном случае.

Для изложения необходимых понятий и определений введем следующие обозначения. Под $\mathbb{C}$ понимаем пространство комплексных чисел $z = x + iy$, а под $\mathbb{C}^m := \{\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_m)\colon z_j \in \mathbb{C},\ j = \overline{1,m}\}$ — m-мерное комплексное пространство. Пусть $U^m := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m\colon |z_j| < 1,\ j = \overline{1,m}\}$ — единичный поликруг в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma^m := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m\colon |z_j| = 1,\ j = \overline{1,m}\}$ — его остов. Символом $\mathbb{R}$ обозначим множество всех конечных вещественных чисел, а под $\mathbb{R}^m$ понимаем m-мерное вещественное пространство. Через $T^m := \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m\colon 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\ j = \overline{1,m}\}$ и $\mathbb{I}^m := \{\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_m) \in \mathbb{R}^m\colon 0 \leqslant r_j < 1,\ j = \overline{1,m}\}$ обозначим m-мерные кубы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Множество всех функций f, аналитических на множестве U^m, обозначим символом $A(U^m)$. Для произвольной функции $f \in A(U^m)$ полагаем

$$M_q(f,\mathbf{r}) := \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} \left| f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}}) \right|^q d\mathbf{t} \right\}^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

где $f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}}) := f(r_1 e^{it_1},\ldots,r_m e^{it_m})$, $d\mathbf{t} := dt_1 \ldots dt_m$, и

$$M_\infty(f,\mathbf{r}) := \max\left\{ |f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})|\colon \mathbf{t} \in T^m \right\}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{I}^m.$$

Под $H_q(U^m)$, $0 < q \leqslant \infty$, понимаем пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U^m)$, для которых

© С. Б. ВАКАРЧУК, С. И. ЖИР, 2014

$$\|f\|_{H_q} := \sup\left\{M_q(f,\mathbf{r})\colon \mathbf{r}\in\mathbb{I}^m\right\} < \infty. \tag{1}$$

Напомним, что в случае $q \geqslant 1$ пространство $H_q(U^m)$ является банаховым. При $m = 1$ пространства $H_q(U) := H_q(U^1)$, $0 < q \leqslant \infty$, впервые рассматривались Г. Харди [5] и к настоящему времени исследованы достаточно полно в работах Г. Харди и Дж. Литтльвуда, И. И. Привалова, Ф. Рисса, М. Рисса, А. Зигмунда и др.

Что же касается пространств Харди $H_q(U^m)$, где $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, то при их изучении возникли принципиальные отличия по сравнению с одномерным случаем, поскольку некоторые результаты (например, факторизация), справедливые при $m = 1$, становятся не верными при $m > 1$. Первые результаты по теории пространств $H_q(U^m), m > 1$, были получены А. Зигмундом, А. П. Кальдероном, С. Бохнером и в последующем получили развитие в различных направлениях благодаря усилиям многих математиков.

В результате применения методов действительного анализа к классическим задачам теории аналитических функций возникла теория их граничных свойств, для которой важное значение имеет вопрос о существовании у аналитической в некоторой области функции предельных значений на границе области. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены П. Фату, Ф. Риссом, Р. Неванлиной, А. Островским и др. Для многомерного случая А. Зигмунд в работе [6] установил существование у функции $f \in H_q(U^m)$, где $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $0 < q < \infty$, угловых предельных значений почти всюду на остове Γ^m и доказал справедливость равенства

$$\lim\left\{\int\limits_{T^m} |f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}}) - f(e^{i\mathbf{t}})|^q d\mathbf{t}\colon \mathbf{r}\in\mathbb{I}^m,\ r_j\to 1-0,\ j=\overline{1,m}\right\} = 0. \tag{2}$$

Из данного результата следует, что функцию $f \in H_q(U^m)$, $0 < q < \infty$, можно считать заданной почти всюду на Γ^m и под $H_q(U^m)$ понимать множество таких предельных функций. В указанном здесь смысле будет иметь место вложение $H_q(U^m) \subset L_q(T^m)$. Для произвольной функции $f \in H_q(U^m)$, $0 < q < \infty$, из соотношений (1) и (2) получаем

$$\|f\|_{H_q} = \left\{\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{T^m} |f(e^{i\mathbf{t}})|^q d\mathbf{t}\right\}^{1/q}. \tag{3}$$

С целью обобщения пространств Харди и установления свойств, присущих функциям из этих пространств, у функций $f \in A(U)$, где $A(U) := A(U^1)$, с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы единичного круга М. И. Гварадзе в работе [7] рассмотрел пространства аналитических функций $\mathcal{B}(p,q,\lambda)$, $0 < p < q \leqslant \infty$, $0 < \lambda \leqslant \infty$. Следует отметить, что указанные пространства явились естественным обобщением пространств аналитических в единичном круге функций $\mathcal{B}_p := \mathcal{B}(p,1,1)$, изучавшихся ранее П. Л. Дюреном, Б. Ромбергом и А. Л. Шилдсом [8]. Пространства $\mathcal{B}(p,q,\lambda)$ на случай поликруга U^m, $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, распространены М. И. Гварадзе в работах [9, 10].

Пусть $0 < p < q \leqslant \infty$ и $0 < \lambda \leqslant \infty$. Будем говорить, что функция $f \in A(U^m)$ является элементом пространства $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, если

$$\|f\|_{p,q,\lambda} := \left\{\int\limits_{\mathbb{I}^m} (1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f,\mathbf{r})d\mathbf{r}\right\}^{1/\lambda} < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty, \tag{4}$$

и

$$\|f\|_{p,q,\infty} := \sup\left\{(1-\mathbf{r})^{1/p-1/q}M_q(f,\mathbf{r})\colon \mathbf{r}\in\mathbb{I}^m\right\} < \infty, \quad \lambda=\infty. \tag{5}$$

Пространство $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$ является банаховым, если $\min(q,\lambda)\geqslant 1$, и пространством Фреше с инвариантной метрикой $\rho(f,g):=\|f-g\|_{p,q,\lambda}^{\min(q,\lambda)}$, где $f,g\in\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, если $\min(q,\lambda)<1$ [9]. Отметим (см., например, [10, с. 103]), что при $p\geqslant p_1$, $q\leqslant q_1$, $\lambda\leqslant\lambda_1$, когда хотя бы одно из этих трех неравенств является строгим, имеет место строгое вложение $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)\subset\mathcal{B}_m(p_1,q_1,\lambda_1)$, т. е. для произвольной функции $f\in\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$ выполняется неравенство

$$\|f\|_{p_1,q_1,\lambda_1}\leqslant C_{p_1,q_1,\lambda_1;p,q,\lambda}\|f\|_{p,q,\lambda}, \tag{6}$$

где $C_{p_1,q_1,\lambda_1;p,q,\lambda}$ — некоторая положительная константа, зависящая только от указанных индексов и не зависящая от f.

2. Предложенные М. Н. Шереметой в работах [11, 12] обобщения классических характеристик роста целых функций существенно обогатили соответствующую шкалу роста и позволили получить новые содержательные результаты, касающиеся полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций (см., например, обзорные результаты пунктов 1, 2 статьи [1]).

Символом L обозначим класс функций h, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) функция h, определенная на полусегменте $[a,\infty)$, является дифференцируемой, строго монотонно возрастающей и стремящейся к ∞ при $x\to\infty$;

2) для произвольной функции γ такой, что $\gamma(x)\to 0$ при $x\to\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h((1+\gamma(x))x)}{h(x)}=1.$$

Под Λ понимаем класс функций h, которые удовлетворяют условию 1 из определения класса L и являются функциями медленного роста, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(cx)}{h(x)}=1$$

для произвольного числа $c\in(0,\infty)$.

Отметим, что $\Lambda\subset L$, причем $\Lambda\neq L$, так как, например, $x^\nu\in L$, где $\nu>0$, но $x^\nu\notin\Lambda$.

Пусть f — целая функция m комплексных переменных $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{C}^m$ и $\{D_R\}\in\in C^m$, $R>0$, — семейство полных m-круговых областей, зависящих от параметра R и имеющих свойство, что $\mathbf{z}\in D_R$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\mathbf{z}}{R}:=\left(\dfrac{z_1}{R},\ldots,\dfrac{z_m}{R}\right)\in D$, $D:=D_1$. Полагаем $M_{f,D}(R):=\max\left\{|f(\mathbf{z})|\colon\mathbf{z}\in D_R\right\}$. Для характеристики изменения величины $M_{f,D}(R)$ А. А. Гольдберг ввел в рассмотрение следующий порядок роста [13, 14]:

$$\rho_D=\varlimsup_{R\to\infty}\frac{\ln\ln M_{f,D}(R)}{\ln R}. \tag{7}$$

Он также показал, что величина ρ_D не зависит от области D, т. е. $\rho_D=\rho$. Напомним, что указанную величину называют еще D-порядком целой функции f.

Запишем разложение целой функции f в ряд Тейлора

$$f(\mathbf{z})=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty}c_{\mathbf{k}}(f)\mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

где $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $|\mathbf{k}| := k_1 + \ldots + k_m$; $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}$; $c_{\mathbf{k}}(f) := c_{k_1,\ldots,k_m}(f)$ — коэффициенты Тейлора для f. А. А. Гольдберг установил связь между величиной ρ и модулями коэффициентов $|c_{\mathbf{k}}(f)|$ [13]:

$$\rho = \varlimsup_{|\mathbf{k}|\to\infty} \frac{|\mathbf{k}| \ln |\mathbf{k}|}{-\ln |c_{\mathbf{k}}(f)|}. \tag{8}$$

М. Н. Шеремета обобщил результаты А. А. Гольдберга. Он, в частности, в работе [11] ввел понятие обобщенного порядка роста целых функций многих комплексных переменных, которое определяется следующим образом:

$$\rho_m(f; \alpha, \beta) := \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\alpha\left(\ln M_{f,D}(R)\right)}{\beta(\ln R)}, \tag{9}$$

где α и β — функции, принадлежащие классам Λ и L соответственно. В [11] также было отмечено, что характеристика роста (9) не зависит от выбора m-круговой области D. Полагая, например, $\alpha(x) := \ln x$ и $\beta(x) := x$, из формулы (9) получаем определение порядка целой функции (7), предложенное ранее А. А. Гольдбергом.

М. Н. Шеремета также получил равенство, связывающее обобщенный порядок роста (9) целой функции f с ее коэффициентами Тейлора [11]. Данный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема А. *Пусть* $f(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} c_{\mathbf{k}}(f)\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ *— целая функция* m *комплексных переменных, имеющая обобщенный порядок роста* $\rho_m(f; \alpha, \beta)$, *где* $\alpha \in \Lambda$ *и* $\beta \in L$. *Если для функции* $F(x, c) := \beta^{-1}(c\,\alpha(x))$, *где* β^{-1} *— функция, обратная к* β, *при любом* $c \in (0, \infty)$ *и при* $x \to \infty$ *выполнено условие*

$$\frac{dF(x, c)}{d\ln x} = O(1), \tag{10}$$

то имеет место равенство

$$\rho_m(f; \alpha, \beta) = \varlimsup_{|\mathbf{k}|\to\infty} \frac{\alpha(|\mathbf{k}|)}{\beta\left(-|\mathbf{k}|^{-1} \ln |c_{\mathbf{k}}(f)|\right)}. \tag{11}$$

При указанной выше конкретизации функций α и β из формулы (11) получаем результат А. А. Гольдберга (8).

3. Символом $\mathcal{P}_n$ обозначим подпространство алгебраических полиномов от m комплексных переменных вида

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} : c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C} \right\},$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть X — одно из банаховых пространств аналитических функций m комплексных переменных, перечисленных в пункте 1 данной статьи. Через $E_n(f, X)$ обозначим величину наилучшего полиномиального приближения функции $f \in X$ элементами подпространства $\mathcal{P}_n$, т. е.

$$E_n(f, X) := \inf\left\{\|f - p_n\|_X : p_n \in \mathcal{P}_n\right\}. \tag{12}$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы A, X — одно из рассмотренных в пункте 1 банаховых пространств аналитических в U^m функций и ξ — конечное положительное число. Тогда для функции $f \in X$ равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(-n^{-1}\ \ln E_n(f,X)\right)} = \xi \tag{13}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы f была целой трансцендентной функцией обобщенного порядка роста $\rho_m(f;\alpha,\beta) = \xi$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма, которая может рассматриваться как своеобразное приложение известной теоремы Бернштейна – Уолша (см., например, [15, с. 107]) в случае наилучшей полиномиальной аппроксимации целых функций. Указанное утверждение мы приводим с полным доказательством, поскольку в данном случае наилучшее полиномиальное приближение осуществляется не в равномерной метрике, как в [15], а в интегральных метриках банаховых пространств $H_q(U^m)$ и $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть X — одно из банаховых пространств аналитических в U^m функций, рассмотренных в пункте 1. Для того чтобы функция $f \in X$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f,X)} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим вначале необходимость условия (14). Пусть функция f является целой. Поскольку она аналитична во всем пространстве $\mathbb{C}^m$, то

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \sqrt[|\mathbf{k}|]{|c_{\mathbf{k}}(f)|} = 0. \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что для произвольного положительного числа δ существует натуральное число $n_0 := n_0(\delta)$, зависящее от δ и такое, что при $|\mathbf{k}| > n_0$ выполняется неравенство

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| < \delta^{|\mathbf{k}|}. \tag{16}$$

Символом $\mathcal{T}_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим частную сумму ряда Тейлора функции f, имеющую вид

$$\mathcal{T}_n(f,\mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}}(f)\mathbf{z}^{\mathbf{k}}. \tag{17}$$

Используя формулы (12) и (17), получаем

$$E_n(f,X) \leqslant \|f - \mathcal{T}_n(f)\|_X = \left\| \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} c_{\mathbf{k}}(f)\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\|_X \leqslant \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}(f)| \left\|\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\|_X. \tag{18}$$

В силу определений норм (1) и (4), (5) в пространствах $H_q(U^m)$ и $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$ соответственно, для величин $\left\|\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\|_X$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^m$, в каждом конкретном случае имеем $\left\|\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\|_{H_q} = 1$,

$$\left\|\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\|_{p,q,\lambda} = \left\{ \prod_{j=1}^{m} B(k_j\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)) \right\}^{1/\lambda} \leqslant \left\{\lambda(1/p - 1/q)\right\}^{-m/\lambda}, \quad 1 \leqslant \lambda < \infty,$$

$$\left\|\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right\|_{p,q,\infty} \leqslant 1,$$

где $B(a,b) := \displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \ (a,b>0)$ — эйлеров интеграл первого рода. Из вышеизложенного и соотношений (16) и (18) имеем

$$E_n(f,X) \leqslant \mathcal{K}_X \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}(f)| < \mathcal{K}_X \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} \delta^{|\mathbf{k}|} = \mathcal{K}_X \sum_{j=n+1}^{\infty} j\delta^j, \tag{19}$$

где $\mathcal{K}_X$ — константа, зависящая только от банахова пространства X и не зависящая от функции $f \in X$, а натуральное число $n > n_0$.

Полагая $\delta := \delta_1/2$, где $\delta_1 \in (0,1)$ — любое число, и учитывая неравенство $j/2^j < 1$, которое выполняется для любого $j \in \mathbb{N}$, из формулы (19) получаем

$$E_n(f,X) \leqslant \mathcal{K}_X \sum_{j=n+1}^{\infty} \delta_1^j = \mathcal{K}_X \frac{\delta_1^{n+1}}{1-\delta_1}$$

или

$$\sqrt[n]{E_n(f,X)} \leqslant \sqrt[n]{\frac{\mathcal{K}_X}{1-\delta_1}}\, \delta_1^{1+1/n}. \tag{20}$$

В силу произвольного выбора величины $\delta_1 > 0$ из неравенства (20) следует предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f,X)} = 0.$$

Достаточность. Пусть $\gamma(\mathbf{r}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |z_j| = r_j,\ j = \overline{1,m},\ \mathbf{r} \in \mathbb{I}^m\}$. Запишем выражение для определения коэффициента Тейлора $c_{\mathbf{k}}(f)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+$, функции $f \in X$ [16]:

$$c_{\mathbf{k}}(f) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\gamma(\mathbf{r})} \frac{f(\mathbf{z})}{\mathbf{z}^{\mathbf{k}}} \frac{d\mathbf{z}}{\mathbf{z}} = \frac{1}{(2\pi)^m \mathbf{r}^{\mathbf{k}}} \int\limits_{T^m} f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}, \tag{21}$$

где

$$\mathbf{k}\mathbf{t} := k_1t_1 + .. + k_mt_m, \quad \frac{d\mathbf{z}}{\mathbf{z}} := \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_m}{z_m}, \quad \mathbf{r}^{\mathbf{k}} := r_1^{k_1} \ldots r_m^{k_m}, \quad \frac{f(\mathbf{z})}{\mathbf{z}^{\mathbf{k}}} := \frac{f(z_1,\ldots,z_m)}{z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}}.$$

Пусть p_n — произвольный полином, принадлежащий множеству $\mathcal{P}_n$. Тогда на основании соотношения (21) для случая $|\mathbf{k}| = n+1$ получаем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| = \frac{1}{(2\pi)^m \mathbf{r}^{\mathbf{k}}} \left| \int\limits_{T^m} \left(f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}}) - p_n(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})\right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^m \mathbf{r}^{\mathbf{k}}} \int\limits_{T^m} \left|f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}}) - p_n(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})\right| d\mathbf{t}.$$

Применяя неравенство Гельдера и определение величины $M_q(f,\mathbf{r})$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, отсюда находим

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \frac{1}{\mathbf{r}^{\mathbf{k}}} M_q(f - p_n, \mathbf{r}), \tag{22}$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{I}^m$ — любое.

Пусть функция f принадлежит банахову пространству $H_q(U^m)$. Из неравенства (22) получаем

$$\mathbf{r}^{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant M_q(f - p_n, \mathbf{r}). \tag{23}$$

Переходя в обеих частях неравенства (23) к пределу при $r_j \to 1-0$, где $j = \overline{1, m}$, на основании определения (3) нормы в банаховом пространстве H_q, $1 \leqslant q < \infty$, записываем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \|f - p_n\|_{H_q}. \tag{24}$$

В случае $q = \infty$ имеем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \|f - p_n\|_{H_\infty}. \tag{25}$$

Используя определение (12) величины наилучшего полиномиального приближения элемента $f \in H_q(U^m)$ и учитывая, что в формулах (24), (25) p_n — произвольный полином из множества $\mathcal{P}_n$, получаем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \mathcal{K}^*_{H_q}(\mathbf{k}) E_n(f, H_q(U^m)), \tag{26}$$

где $\mathcal{K}^*_{H_q}(\mathbf{k}) := 1$; $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Пусть теперь f — произвольная функция из банахова пространства $\mathcal{B}_m(p, q, \lambda)$, где $0 < p < < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \lambda < \infty$, $\min(q, \lambda) \geqslant 1$. Возводя обе части неравенства (23) в степень λ, затем умножая их на величину $(1 - \mathbf{r})^{\lambda(1/p - 1/q) - 1}$, интегрируя по $\mathbf{r}$ на множестве $\mathbb{I}^m$ и используя определение (4) нормы в пространстве $\mathcal{B}_m(p, q, \lambda)$, имеем

$$\left\{ \int\limits_{\mathbb{I}^m} \mathbf{r}^{\lambda \mathbf{k}} (1 - \mathbf{r})^{\lambda(1/p - 1/q) - 1} d\mathbf{r} \right\}^{1/\lambda} |c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \|f - p_n\|_{p,q,\lambda}, \tag{27}$$

где $\mathbf{r}^{\lambda \mathbf{k}} := r_1^{\lambda k_1} \ldots r_m^{\lambda k_m}$. Используя данное ранее определение эйлерова интеграла первого рода, полагая

$$B_{k_j, p, q, \lambda} := B^{1/\lambda}(k_j \lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)), \quad j = \overline{1, m}, \tag{28}$$

и учитывая произвольность выбора полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$, из неравенства (27) получаем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) E_n(f, \mathcal{B}_m(p, q, \lambda)), \tag{29}$$

где

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) := \left(\prod_{j=1}^m B_{k_j, p, q, \lambda} \right)^{-1} \tag{30}$$

— константа, зависящая от пространства $\mathcal{B}_m(p, q, \lambda)$ и $\mathbf{k}$ и не зависящая от f.

Рассмотрим случай $\lambda = \infty$. Умножая обе части неравенства (23) на величину $(1-\mathbf{r})^{1/p-1/q}$ и используя определение (5) нормы в пространстве $\mathcal{B}_m(p,q,\infty)$, записываем

$$\sup\left\{\mathbf{r}^{\mathbf{k}}(1-\mathbf{r})^{1/p-1/q} \colon \mathbf{r} \in \mathbb{I}^m\right\}|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \|f-p_n\|_{p,q,\infty}.$$

Полагаем

$$B^*_{k_j,p,q,\infty} := \frac{k_j^{k_j}(1/p-1/q)^{1/p-1/q}}{(k_j+1/p-1/q)^{k_j+1/p-1/q}}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{31}$$

Отсюда в силу произвольности полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ и из определения (12) величины наилучшего полиномиального приближения имеем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) E_n(f, \mathcal{B}_m(p,q,\infty)), \tag{32}$$

где

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) := \left(\prod_{j=1}^m B^*_{k_j,p,q,\infty}\right)^{-1}.$$

Сопоставляя результаты (26), (29) и (32), получаем следующее неравенство более общего вида:

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant \mathcal{K}^*_X(\mathbf{k}) E_n(f, X). \tag{33}$$

Здесь X — любое из рассмотренных в п. 1 банаховых пространств аналитических в U^m функций. Поскольку $|\mathbf{k}| = n+1$, из (33) имеем

$$\sqrt[|\mathbf{k}|]{|c_{\mathbf{k}}(f)|} \leqslant \{\mathcal{K}^*_X(\mathbf{k})\}^{1/|\mathbf{k}|}\left\{E_n^{1/n}(f,X)\right\}^{n/(n+1)}. \tag{34}$$

Покажем, что

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty}\left\{\mathcal{K}^*_X(\mathbf{k})\right\}^{1/|\mathbf{k}|} = 1. \tag{35}$$

Действительно, из вышеизложенного относительно величины $\mathcal{K}^*_{H_q(U^m)}(\mathbf{k})$ непосредственно следует равенство (35) в случае $X := H_q(U^m)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Пусть теперь $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \lambda < \infty$, $\min(q,\lambda) \geqslant 1$.

Нам потребуется соотношение, связывающее эйлеров интеграл первого рода $B(a,b)$, где $a, b > 0$, с Γ-функцией,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \tag{36}$$

а также асимптотическая формула [18]

$$\frac{\Gamma(x+c)}{\Gamma(x+d)} = x^{c-d}\left(1 + \frac{(c-d)(c+d-1)}{2x} + O\left(|x^{-2}|\right)\right), \tag{37}$$

где $|x| \gg 1$ и $x \in \mathbb{R}$, c, d — произвольные фиксированные числа из $\mathbb{R}$. Используя формулы (28), (30), (36) и (37), где $x := k_j\lambda$, $c := 1 + \lambda(1/p-1/q)$, $d := 1$, для достаточно больших $|\mathbf{k}|$ при $k_j \gg 1$, $j = \overline{1,m}$, получаем

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) = \left\{ \frac{1}{\Gamma^m(\lambda(1/p-1/q))} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(k_j\lambda + 1 + \lambda(1/p-1/q))}{\Gamma(k_j\lambda+1)} \right\}^{1/\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^{m(1/p-1/q)}}{\Gamma^{m/\lambda}(\lambda(1/p-1/q))} \left\{ \prod_{j=1}^m k_j \left(1 + \frac{(1/p-1/q)(1+\lambda(1/p-1/q))}{2k_j} + O\left(k_j^{-2}\right)\right)\right\}^{1/\lambda}. \qquad (38)$$

Воспользовавшись теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом [17]

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m a_j \geqslant \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m a_j}, \qquad (39)$$

где a_j, $j = \overline{1,m}$, — неотрицательные числа, из (38) получаем

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) \leqslant \chi_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)} |\mathbf{k}|^{m/\lambda}, \qquad (40)$$

где

$$\chi_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)} := \frac{\lambda^{m(1/p-1/q)}}{\Gamma^{m/\lambda}(\lambda(1/p-1/q))m^{m/\lambda}} \left(1 + (1/p-1/q)(1+\lambda(1/p-1/q)) + A \right)^{m/\lambda},$$

A — абсолютная константа, не зависящая от $\mathbf{k}$.

Используя неравенство (40), получаем оценку сверху

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \left\{ \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) \right\}^{1/|\mathbf{k}|} \leqslant 1.$$

Для получения оценки снизу воспользуемся соотношением (38), из которого имеем

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) \geqslant \frac{\lambda^{m(1/p-1/q)}}{\Gamma^{m/\lambda}(\lambda(1/p-1/q))} \left\{ \prod_{j=1}^m k_j \right\}^{1/\lambda} \geqslant \left\{ \frac{k_m}{\Gamma^m(\lambda(1/p-1/q))} \right\}^{1/\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \left\{ \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k}) \right\}^{1/|\mathbf{k}|} \geqslant 1.$$

Сопоставляя оценки сверху и снизу, получаем равенство (35).

Пусть $X = \mathcal{B}_m(p,q,\infty)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$ и $q \geqslant 1$. В силу формулы (31) имеем

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) = (1/p-1/q)^{m(1/q-1/p)} \prod_{j=1}^m \frac{(k_j + 1/p - 1/q)^{k_j+1/p-1/q}}{k_j^{k_j}} =$$

$$= (1/p-1/q)^{m(1/q-1/p)} \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{1/p-1/q}{k_j} \right)^{k_j+1/p-1/q} \prod_{j=1}^m k_j^{1/p-1/q}. \qquad (41)$$

Используя неравенство (39), отсюда получаем

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) \leqslant \chi_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)} |\mathbf{k}|^{m(1/p-1/q)}, \tag{42}$$

где

$$\chi_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)} := \Big\{ e(1/p-1/q)(1+1/p-1/q) \Big\}^{m(1/p-1/q)}.$$

Из неравенства (42) имеем оценку сверху

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \Big\{ \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) \Big\}^{1/|\mathbf{k}|} \leqslant 1.$$

Для получения оценки снизу воспользуемся формулой (41), из которой следует, что

$$\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) \geqslant (1/p-1/q)^{m(1/p-1/q)} k_m^{1/p-1/q}.$$

Тогда

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \Big\{ \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\infty)}(\mathbf{k}) \Big\}^{1/|\mathbf{k}|} \geqslant 1.$$

Сопоставляя оценки сверху и снизу, получаем равенство (35).

Переходя далее в формуле (34) к пределу при $|\mathbf{k}| \to \infty$ и учитывая равенства (14) и (35), получаем соотношение

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \sqrt[|\mathbf{k}|]{|c_{\mathbf{k}}|} = 0,$$

из которого следует, что рассматриваемая функция $f \in X$ является целой в комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$.

Лемма 1 доказана.

4. ***Доказательство теоремы* 1.** ***4.1.*** Для случая $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$ рассуждения проведем в два этапа. Вначале рассмотрим случай, когда $q = 2$, т. е. когда $X = \mathcal{B}_m(p,2,\lambda)$, где $0 < p < 2$ и $\lambda \geqslant 1$. Это объясняется тем, что в данном случае частная сумма ряда Тейлора (17) произвольной функции $f \in \mathcal{B}_m(p,2,\lambda)$ является также и ее полиномом наилучшего приближения n-й степени. Затем рассмотрим пространство $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $q \neq 2$, $0 < p < q$ и $q, \lambda \geqslant 1$. Если $0 < p < q < 2$ и $\lambda \geqslant 1$, то доказательство сведется к уже рассмотренному случаю $q = 2$. При $0 < p \leqslant 2 < q$ или $2 \leqslant p < q$ и $\lambda \geqslant 1$ мы воспользуемся рядом других соображений. Отметим, что нижеследующие рассуждения проведем для $1 \leqslant \lambda < \infty$, так как случай $\lambda = \infty$ ничем принципиальным не отличается.

Использовав формулу (6), в которой $p \geqslant p_1$, $q \leqslant q_1$, $\lambda \leqslant \lambda_1$ и хотя бы одно из неравенств строгое, а также применив определение величины наилучшего полиномиального приближения (12), запишем соотношение, необходимое нам в дальнейшем:

$$E_n(f; \mathcal{B}_m(p_1,q_1,\lambda_1)) \leqslant C_{p,q,\lambda;p_1,q_1,\lambda_1} E_n(f; \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)), \tag{43}$$

где $f \in \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, а константа $C_{p,q,\lambda;p_1,q_1,\lambda_1}$ не зависит от f и n.

4.1.1. Переходя к первой части доказательства, покажем достаточность условия (13). Пусть для функции $f \in \mathcal{B}_m(p,2,\lambda)$ указанное условие имеет место. Из определений классов функций Λ и L, включений $\alpha \in \Lambda$ и $\beta \in L$, а также из формулы (13) получаем

$$\beta\left(\ln\left(1/E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda))\right)^{1/n}\right)\to\infty$$

при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda))}=0. \tag{44}$$

Из равенства (44) и леммы 1 следует, что функция f является целой. Пусть f имеет обобщенный порядок роста $\rho_m(f;\alpha,\beta)$, определенный формулой (11). Покажем, что величина $\rho_m(f;\alpha,\beta)$ и число ξ, определенное формулой (13), совпадают.

Пусть $|\mathbf{k}|=n+1$. Используя соотношения (17) и (21), записываем равенство

$$\mathbf{r}^{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}(f)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{T^m}\left(f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})-\mathcal{T}_n(f,\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})\right)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}}d\mathbf{t},$$

где $\mathbf{r}\in\mathbb{I}^m$. Применяя неравенство Гельдера, отсюда получаем

$$\mathbf{r}^{\mathbf{k}}|c_{\mathbf{k}}(f)|\leqslant\left\{\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{T^m}\left|f(\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})-\mathcal{T}_n(f,\mathbf{r}e^{i\mathbf{t}})\right|^2d\mathbf{t}\right\}^{1/2}.$$

Возводя обе части данного неравенства в степень λ, затем умножая их на величину $(1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/q)-1}$ и интегрируя по $\mathbf{r}$ на множестве $\mathbb{I}^m$, после извлечения из них корня степени λ имеем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)|\prod_{j=1}^m B_{k_j,p,2,\lambda}\leqslant\|f-\mathcal{T}_n(f)\|_{p,2,\lambda}=E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)). \tag{45}$$

В соотношении (45) величины $B_{k_j,p,2,\lambda}$, $j=\overline{1,m}$, определяются формулой (28). Используя формулы (45) и (30), для всех достаточно больших n записываем

$$\frac{\alpha(n)}{\beta(-n^{-1}\ln E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)))}=\frac{\alpha(n)}{\beta\left((1+1/n)\ln\left(1/\sqrt[n+1]{E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda))}\right)\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\alpha\big((1-1/|\mathbf{k}|)|\mathbf{k}|\big)}{\beta\left(\Big(1+1/(|\mathbf{k}|-1)\Big)\left(\ln\left(1/\sqrt[|\mathbf{k}|]{|c_{\mathbf{k}}(f)|}\right)+\ln\left(\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(\mathbf{k})\right)^{1/|\mathbf{k}|}\right)\right)}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ (т. е. при $|\mathbf{k}|\to\infty$) и учитывая равенства (35) и (11), из данного соотношения имеем

$$\xi=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(n)}{\beta\big(-n^{-1}\ln E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda))\big)}\geqslant\rho_m(f;\alpha,\beta). \tag{46}$$

Получим противоположное неравенство $\rho_m(f;\alpha,\beta)\geqslant\xi$. Из формулы (11) следует, что для произвольного числа $\varepsilon>0$ существует натуральное число $n_0:=n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $|\mathbf{k}|>n_0$ имеет место неравенство

$$\frac{\alpha(|\mathbf{k}|)}{\beta\Big(-|\mathbf{k}|^{-1}\ln|c_{\mathbf{k}}(f)|\Big)} \leqslant \rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$|c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant 1/\exp\Big(|\mathbf{k}|\beta^{-1}\big(\alpha(|\mathbf{k}|)/(\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon)\big)\Big), \tag{47}$$

где β^{-1} — функция, обратная β. Обозначим

$$\Big\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(n+1)\Big\}^{-1} := \max_{|\mathbf{k}|=n+1}\Big\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(\mathbf{k})\Big\}^{-1}. \tag{48}$$

Используя неравенство (47) и соотношения (17), (18), (28), (30) и (48), для любого натурального числа $n > n_0$ имеем

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)) = \|f-\mathcal{T}_n(f)\|_{p,2,\lambda} =$$

$$= \left\{\int\limits_{T^m}(1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/2)-1}\left(\sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty}|c_{\mathbf{k}}(f)|^2\mathbf{r}^{2\mathbf{k}}\right)^{\lambda/2}d\mathbf{r}\right\}^{1/\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(n+1)\Big\}^{-1/\lambda}\left\{\sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty}|c_{\mathbf{k}}(f)|^2\right\}^{1/2}. \tag{49}$$

Используя формулу (47), из соотношения (49) при $n > n_0$ получаем

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Big\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(n+1)\Big\}^{-1/\lambda}}{\exp\left((n+1)\beta^{-1}\left(\dfrac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right)}\left\{\sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty}\Omega^2_{\mathbf{k}}(\alpha,\beta)\right\}^{1/2}, \tag{50}$$

где

$$\Omega_{\mathbf{k}}(\alpha,\beta) := \exp\left((n+1)\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right) - |\mathbf{k}|\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(|\mathbf{k}|)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right).$$

Пусть

$$\widehat{\Omega}(\alpha,\beta) := 1\Big/\exp\left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right). \tag{51}$$

Очевидно, что $\widehat{\Omega}(\alpha,\beta) < 1$. Тогда для любых $|\mathbf{k}| \geqslant n+1$ получаем следующую оценку сверху:

$$\Omega_{\mathbf{k}}(\alpha,\beta) \leqslant \exp\left(-(|\mathbf{k}|-n-1)\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right) \leqslant \widehat{\Omega}^{|\mathbf{k}|-n-1}(\alpha,\beta). \tag{52}$$

Используя неравенства (50) и (52), имеем

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(n+1)\right\}^{-1/\lambda}}{\exp\left((n+1)\beta^{-1}\left(\dfrac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right)}\left\{\sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty}\widehat{\Omega}^{2(|\mathbf{k}|-n-1)}(\alpha,\beta)\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(n+1)\right\}^{-1/\lambda}}{\left(1-\widehat{\Omega}^2(\alpha,\beta)\right)^{m/2}\exp\left((n+1)\beta^{-1}\left(\dfrac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right)}.$$

Из последней формулы при $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha(n+1)}{\beta\left((n+1)^{-1}\left(-\ln E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)) + \ln\dfrac{\left(\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)}(n+1)\right)^{-1/\lambda}}{\left(1-\widehat{\Omega}^2(\alpha,\beta)\right)^{m/2}}\right)\right)}. \tag{53}$$

Переходя в правой части неравенства (53) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая произвольность выбора числа $\varepsilon > 0$, а также формулу (13), имеем

$$\rho_m(f;\alpha,\beta) \geqslant \xi. \tag{54}$$

Сопоставляя неравенства (46) и (54), получаем требуемое равенство

$$\rho_m(f;\alpha,\beta) = \xi \tag{55}$$

в рассматриваемом случае $X = \mathcal{B}_m(p,2,\lambda)$.

Показывая необходимость условия (13), полагаем, что f — целая трансцендентная функция конечного обобщенного порядка $\rho_m(f;\alpha,\beta)$, который определяется формулой (11). Доказательство равенства (55) осуществляем по приведенной выше схеме.

4.1.2. Переходя ко второму этапу доказательства теоремы 1 для общего случая $\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $q \neq 2$, покажем вначале необходимость условия (13).

Пусть $f \in \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$ — целая трансцендентная функция конечного обобщенного порядка $\rho_m(f;\alpha,\beta)$, определенного формулой (11). Покажем справедливость равенства (55) в рассматриваемом случае. Полагая

$$\left\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(n+1)\right\}^{-1} := \max_{|\mathbf{k}|=n+1}\left\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k})\right\}^{-1},$$

записываем

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)) \leqslant \|f-\mathcal{T}_n(f)\|_{p,q,\lambda} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{T^m} (1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f - \mathcal{T}_n(f); \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\}^{1/\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{T^m} (1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/q)-1} \left(\sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}(f)| \mathbf{r}^{\mathbf{k}} \right)^\lambda d\mathbf{r} \right\}^{1/\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(n+1) \right\}^{-1/\lambda} \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}(f)|. \tag{56}$$

Используя формулу (47), из соотношения (56) по аналогии с рассуждениями, проведенными при выводе формул (50) – (52), для $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$E_n(f; \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)) \leqslant \frac{\left\{ \mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(n+1) \right\}^{-1/\lambda}}{\left(1 - \widehat{\Omega}^2(\alpha,\beta)\right)^{m/2} \exp\left((n+1)\beta^{-1}\left(\dfrac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon} \right)\right)}. \tag{57}$$

Разрешая неравенство (57) относительно величины $\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon$, получаем неравенство, в общем аналогичное по форме неравенству (53). Учитывая, что $\varepsilon > 0$ — произвольное число, и переходя в обеих частях данного неравенства к верхнему пределу при $n \to \infty$, на основании формулы (13) получаем в рассматриваемом случае неравенство (54).

Покажем, что одновременно выполняется и обратное неравенство

$$\xi \geqslant \rho_m(f;\alpha,\beta). \tag{58}$$

Если $0 < p < q < 2$ и $\lambda, q \geqslant 1$, то в силу формулы (43), в которой полагаем $p_1 := p$, $q_1 := 2$, $\lambda_1 := \lambda$, и уже доказанного для случая $q = 2$ соотношения (13) получаем

$$\xi \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta(-n^{-1}\ln E_n(f;\mathcal{B}_m(p,2,\lambda)))} = \rho_m(f;\alpha,\beta).$$

Рассмотрим далее случай $0 < p \leqslant 2 < q$. Поскольку $M_2(f;\mathbf{r}) \leqslant M_q(f;\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} \in \mathbb{I}^m$, то

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)) \geqslant \left\{ \int\limits_{T^m} (1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/q)-1} \inf\left(M_2^\lambda(f-p_n;\mathbf{r}) : p_n \in \mathcal{P}_n \right) d\mathbf{r} \right\}^{1/\lambda} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{T^m} (1-\mathbf{r})^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_2^\lambda(f - \mathcal{T}_n(f);\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\}^{1/\lambda}.$$

Учитывая, что $M_2(f - \mathcal{T}_n(f);\mathbf{r}) = \left\{ \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}(f)|^2 \mathbf{r}^{2\mathbf{k}} \right\}^{1/2}$, из последнего неравенства получаем

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)) \geqslant |c_{\mathbf{k}}(f)| \left\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)}(\mathbf{k})\right\}^{-1/\lambda}, \tag{59}$$

где $|\mathbf{k}| = n+1$. Используя формулы (11), (13), (35) и (59), имеем

$$\xi \geqslant \overline{\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty}} \frac{\alpha(|\mathbf{k}|)}{\beta\Big(-|\mathbf{k}|^{-1}\ln|c_{\mathbf{k}}(f)|\Big)} = \rho_m(f;\alpha,\beta).$$

Пусть $2 \leqslant p < q$. Полагая теперь в неравенстве (43) $q_1 := q$, $\lambda_1 := \lambda$ и $p_1 \in (0,2)$, где p_1 — произвольное фиксированное число, а также используя неравенство (59), в котором вместо p записываем p_1, получаем

$$E_n(f;\mathcal{B}_m(p,q,\lambda)) \geqslant \frac{E_n(f;\mathcal{B}_m(p_1,q,\lambda))}{C_{p,q,\lambda;p_1,q,\lambda}} \geqslant \frac{|c_{\mathbf{k}}(f)|}{C_{p,q,\lambda;p_1,q,\lambda}} \left\{\mathcal{K}^*_{\mathcal{B}_m(p_1,q,\lambda)}(\mathbf{k})\right\}^{-1/\lambda}, \tag{60}$$

где $|\mathbf{k}| = n+1$, а $C_{p,q,\lambda;p_1,q,\lambda}$ — константа, не зависящая от n и f. Используя данное неравенство и действуя по аналогии с предыдущим случаем $0 < p \leqslant 2 < q$, получаем соотношение (58). Сопоставляя неравенства (54) и (58), доказанные в случае $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $q \neq 2$, получаем требуемое равенство (13).

Остановимся кратко на идее доказательства достаточности условия (13) в случае $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $q \neq 2$. На основании свойств функций α и β, содержащихся в формуле (13), очевидно, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f;\mathcal{B}_m(p,q,\lambda))} = 0.$$

Тогда из леммы 1 следует, что функция $f \in \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$ является целой. Пусть ее обобщенный порядок роста $\rho_m(f;\alpha,\beta) \in (0,\infty)$. Из неравенств (45) и (43), (59) и (60), а также в силу равенств (13) и (11) получаем соотношение (58). Используя соображения, аналогичные приведенным в пп. 4. 1. 2, получаем противоположное неравенство (54), что означает справедливость формулы (13), когда $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $q \neq 2$.

4.2. Пусть $X = H_q(U^m)$, где $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Покажем необходимость условия (13) в данном случае. Рассмотрим целую трансцендентную функцию $f(z) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} c_{\mathbf{k}}(f)\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$, имеющую конечный обобщенный порядок роста $\rho_m(f;\alpha,\beta)$. Очевидно, что в данных условиях для коэффициентов Тейлора функции f имеет место равенство (15). Поскольку $f \in \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$, $q,\lambda \geqslant 1$, на основании формул (1) и (4) имеем

$$E_n(f;\mathcal{B}(q/2,q,q)) \leqslant E_n(f;H_q(U^m)), \tag{61}$$

где $1 \leqslant q < \infty$. Если же $X = H_\infty(U^m)$, то в силу соотношений (1) и (5) получаем

$$E_n(f;\mathcal{B}(p,\infty,\infty)) \leqslant E_n(f;H_\infty(U^m)), \quad 0 < p < \infty. \tag{62}$$

Воспользуемся уже доказанной справедливостью равенства (13) в случае банахова пространства $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$. Пусть $1 \leqslant q < \infty$. Тогда на основании изложенного и неравенства (61) запишем

$$\xi = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(-n^{-1}\ln E_n(f;H_q(U^m))\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(-n^{-1}\ln E_n(f;\mathcal{B}(q/2,q,q))\right)} = \rho_m(f;\alpha,\beta). \tag{63}$$

В случае $X = H_\infty(U^m)$ неравенство (58) получаем на основании формулы (62) и соображений, использованных при установлении соотношения (63). Для получения обратного неравенства (54) воспользуемся неравенством (47), справедливым для любых $|\mathbf{k}| > n_0$, а также применим рассуждения, аналогичные использованным ранее при выводе формулы (52). Тогда

$$E_n(f; H_q(U^m)) \leqslant \|f - \mathcal{T}_n(f)\|_{H_q} \leqslant \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}(f)| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-(n+1)\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right) \sum_{|\mathbf{k}|=n+1}^{\infty} \widehat{\Omega}^{|\mathbf{k}|-n-1}(\alpha,\beta) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \widehat{\Omega}(\alpha,\beta)\right)^{-1} \exp\left(-(n+1)\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n+1)}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right).$$

Отсюда получаем

$$\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon \geqslant \frac{\alpha(n+1)}{\beta\left(-(n+1)^{-1}\left(\ln E_n(f; H_q(U^m)) + \ln(1-\widehat{\Omega}(\alpha,\beta))\right)\right)}. \qquad (64)$$

Используя формулу (13) при $X = H_q(U^m)$ и учитывая произвольность выбора числа $\varepsilon > 0$, при $n \to \infty$ из соотношения (64) получаем неравенство (54). Следовательно, в случае $X = H_q(U^m)$ также имеет место равенство (55).

Кратко рассмотрим идею доказательства достаточности условия (13). Пусть для функции $f \in H_q(U^m)$ указанное условие выполнено. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f; H_q(U^m))} = 0,$$

и из леммы 1 получаем, что функция f является целой. Пусть ее обобщенный порядок роста $\rho_m(f;\alpha,\beta)$ равен конечному положительному числу. На основании соотношений (43), (45), (59) – (62) и теоремы 1, уже доказанной для случая $X = \mathcal{B}_m(p,q,\lambda)$, получаем неравенство (58). Выполнение обратного неравенства (54) доказываем так же, как и формулу (64). Вытекающая из изложенного справедливость равенства (55) завершает доказательство теоремы 1.

5. Теорема 1 дает четкое представление о скорости стремления к нулю последовательностей наилучших полиномиальных приближений целых трансцендентных функций f, имеющих конечный обобщенный порядок роста $\rho_m(f;\alpha,\beta)$. Например, из теоремы 1 следует, что для целой функции f, определенной обобщенной характеристикой роста (9), и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $\widetilde{n}(\varepsilon, f, X)$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $n > \widetilde{n}(\varepsilon, f, X)$, выполняется неравенство

$$E_n(f, X) \leqslant \exp\left(-nF\left(n; \frac{1}{\rho_m(f;\alpha,\beta)+\varepsilon}\right)\right),$$

в котором функция F была введена при формулировке указанной теоремы 1.

В завершение отметим, что теорему 1 можно рассматривать как своеобразное распространение на многомерный случай некоторых одномерных результатов работ [1, 3, 4, 19 – 23].

1. *Вакарчук С. Б., Жир С. І.* Найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій узагальненого порядку зростання в банахових просторах $\mathcal{E}_p^{'}(G)$ та $\mathcal{E}_p(G)$, $p \geqslant 1$ // Укр. мат. вісн. – 2011. – **8**, № 2. – С. 255 – 291.
2. *Мурадов В. М.* О связи между наилучшим полиномиальным приближением аналитических функций многих комплексных переменных и коэффициентами Фабера // Сб. тр. Ин-та математики и механики АН АзербССР „Специальные вопросы теории функций”. – 1986. – Вып. 3. – С. 195 – 212.
3. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 7. – С. 14 – 25.
4. *Жир С. И., Вакарчук С. Б.* Некоторые вопросы наилучшей полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций одной и многих комплексных переменных // Тези доп. Міжнар. конф. „Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченої 70-річчю з дня народження О. І. Степанця (Кам’янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. – С. 44 – 45.
5. *Hardy G. H.* The mean values of the modules of an analityc function // Proc. London Math. Soc. – 1914. – **14**. – P. 269 – 277.
6. *Zygmund A.* On the boundary values of functions of several complex variables // Fund. Math. – 1949. – **36**. – P. 207 – 235.
7. *Гварадзе М. И.* Об одном классе пространств аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 2. – С. 141 – 150.
8. *Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$ // J. reine und angew. Math. – 1969. – **238**. – S. 32 – 60.
9. *Гварадзе М. И.* Множители одного класа аналитических функций, определенных на полидиске // Тр. Тбил. мат. ин-та. – 1980. – **66**. – С. 15 – 21.
10. *Гварадзе М. И.* Об одном классе пространств аналитических функций: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1975. – 135 с.
11. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100 – 108.
12. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 6. – С. 115 – 121.
13. *Гольдберг А. А.* Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих комплексных переменных // Докл. АН АрмССР. – 1959. – **29**, № 4. – С. 145 – 151.
14. *Фукс Б. А.* Введение в теорю аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1962. – 420 с.
15. *Levenberg N.* Approximation in $\mathbb{C}^N$ // Surv. Approxim. Theory. – 2006. – **2**. – P. 92 – 140.
16. *Картан А.* Элементарная теория аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 296 с.
17. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965. – 166 с.
18. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – М.; Л.: Физматгиз, 1963. – 358 с.
19. *Varga R. S.* On an extension of a result of S. N. Bernstein // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**, № 2. – P. 176 – 179.
20. *Батырев А. В.* К опросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 2. – С. 173 – 175.
21. *Shah S. M.* Polinomial approximation of an entire function and generalized orders // J. Approxim. Theory. – 1977. – **19**, № 4. – P. 315 – 324.
22. *Reddy A. R.* Approximation of an entire function // J. Approxim. Theory. – 1970. – **3**, № 1. – P. 128 – 137.
23. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 2. – С. 280 – 283.

Получено 20.10.13