УДК 517.5

Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова (Донец. нац. ун-т)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МИНКОВСКОГО – РАДОНА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

We study functions on a sphere with zero weighted means over the circles of fixed radius. A description of these functions in the form of series in special functions is obtained.

Вивчаються функції на сфері, які мають нульові зважені середні по колах фіксованого радіуса. Наведено опис таких функцій у вигляді рядів за спеціальними функціями.

1. Введение. Пусть $\mathbb{S}^2$ — стандартная единичная сфера в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, т. е. $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Известно, что непрерывная функция на $\mathbb{S}^2$ имеет нулевые интегралы по всем большим кругам тогда и только тогда, когда она нечетная. Этот результат был впервые установлен Г. Минковским [1] в связи с некоторыми проблемами в теории выпуклых тел. Другие доказательства теоремы Минковского были предложены П. Функом, Т. Боннесеном, В. Фенхелем и К. Пэтти (см. [2 – 4]).

Обобщая рассуждения Г. Минковского, И. Радон в 1917 г. рассмотрел и, по существу, решил задачу об описании непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$ с нулевыми интегралами по всем окружностям произвольного фиксированного радиуса $r \in (0, \pi/2]$ (см. [5], раздел 6). Оказалось, что для некоторого множества радиусов, определяемого нулями многочленов Лежандра, класс U_r таких функций состоит только из нуля. Кроме того, для остальных значений r множество является счетным и всюду плотным на $(0, \pi/2)$, функции из U_r можно описать с помощью разложения по сферическим гармоникам на $\mathbb{S}^2$. Эти результаты получили дальнейшее развитие и уточнение в работах П. Унгара, Р. Шнейдера, Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и Э. Бадерчера, где были установлены обобщения для компактных симметрических пространств ранга один [6 – 10], а также для локально симметрических пространств [11].

Начиная с конца двадцатого века начали изучать локальные аналоги сформулированной задачи для различных однородных пространств X (см. [12 – 14] и приведенную там библиографию). Помимо принципиальных трудностей, связанных с неинвариантностью соответствующих классов относительно группы движений пространства X, здесь возникли и новые эффекты. Например, для любого $r \in (0, \pi/2)$ пространство непрерывных функций на полусфере с нулевыми интегралами по всем окружностям радиуса r является бесконечномерным.

В данной работе получено описание функций на шаре $B \subset \mathbb{S}^2$, имеющих нулевые взвешенные средние по границам всех шаров фиксированного радиуса из B. Рассматриваемый случай интересен тем, что наличие веса в интегралах не позволяет записать указанное интегральное условие в виде уравнения свертки с радиальным распределением, теория которого хорошо развита в последнее время (см. [12 – 14]). Соответственно, здесь неприменимы важные результаты этой теории (в частности, теорема о среднем для собственных функций лапласиана и теорема единственности), которые играли существенную роль в подобных вопросах ранее.

2. Формулировка основного результата. Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел. Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \xi_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \xi_3 = \cos\theta, \qquad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi), \tag{1}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$. Пусть $R \in (0, \pi]$, B_R — открытый геодезический шар радиуса R с центром в точке $o = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, т. е.

$$B_R = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : \xi_3 > \cos R\}.$$

Любой функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\theta) e^{ik\varphi}, \quad \theta \in (0, R), \tag{2}$$

где

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^\circ(\varphi, \theta) e^{-ik\varphi} d\varphi,$$
$$f^\circ(\varphi, \theta) = f(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta). \tag{3}$$

Если $f \in C^\infty(B_R)$, то ряд в (2) сходится к f в стандартной топологии пространства $C^\infty(B_R)$ (см. [13], гл. 11, п. 11.1).

Обозначим через P_ν^μ, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, функции Лежандра первого рода на $(-1, 1)$, т. е.

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad \mu \notin \mathbb{N},$$
$$P_\nu^\mu(x) = (-1)^\mu (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^\mu P_\nu(x), \quad \mu \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где F — гипергеометрическая функция Гаусса, Γ — гамма-функция и $P_\nu = P_\nu^0$ (см. [15], гл. 3, п. 3.4, формула (6) и п. 3.6.1, формула (6)). Ниже показано (см. лемму 4), что при фиксированных $k \in \mathbb{Z}_+$, $\theta \in (0; \pi)$ функция $h(\nu) = P_\nu^{-k}(\cos\theta)$ имеет бесконечно много нулей. Кроме того, все нули h являются вещественными, простыми, расположены симметрично относительно $-\dfrac{1}{2}$ и лежат вне отрезка $[-k-1, k]$. Множество нулей этой функции из промежутка $(k; +\infty)$ будем обозначать через $N_k(\theta)$.

Пусть $O(3)$ — ортогональная группа в $\mathbb{R}^3$. Всюду в дальнейшем считаем, что r — фиксированное число, принадлежащее интервалу $(0; R)$, $\overline{B}_r$ — замыкание шара B_r и S_r — граница B_r.

Для $M \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ положим

$$U_{r,M}(B_R) = \left\{ f \in C(B_R) : \int_{S_r} f(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = 0 \quad \forall \tau \in O(3) : \tau\overline{B}_r \subset B_R \right\},$$

$$U_{r,M}^s(B_R) = U_{r,M}(B_R) \cap C^s(B_R),$$

где $dl(\xi)$ — элемент длины на $\mathbb{S}^2$. При $M = 0$ класс $U_{r,M}(B_R)$ совпадает с классом функций $f \in C(B_R)$, удовлетворяющих уравнению свертки $f * \sigma_r = 0$ в шаре B_{R-r}, где σ_r — дельта-функция, сосредоточенная на S_r. Как уже отмечалось, уравнения такого типа изучались многими авторами для различных однородных пространств (см. [12 – 14]).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция f принадлежит $C^\infty(B_R)$. Тогда для того чтобы f принадлежала классу $U_{r,M}(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \in \mathbb{Z}$ имело место разложение*

$$f_k(\theta) = \sum_{\nu \in N_M(r)} c_\nu P_\nu^{-|k|}(\cos\theta) + (\sin\theta)^{|k|} \sum_{j=0}^{M-|k|-1} \gamma_j (\cos\theta)^j, \qquad 0 \le \theta < R, \tag{5}$$

где $c_\nu, \gamma_j \in \mathbb{C}$, $c_\nu = O(\nu^{-a})$ при $\nu \to +\infty$ для любого $a > 0$ и вторая сумма в (5) равна нулю при $|k| \ge M$.

Отметим, что в работе [16] получен аналогичный результат для вещественного евклидова пространства. Однако методы в [16] существенно используют векторную структуру $\mathbb{R}^n$ и требуют значительного развития в сферическом случае.

3. Вспомогательные утверждения о функциях Лежандра. Теорема показывает, что важную роль в структуре класса $U_{r,M}(B_R)$ играют функции

$$p_{\nu,k}(\theta) = P_\nu^{-|k|}(\cos\theta), \qquad \nu \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Здесь мы приведем свойства этих функций, которые потребуются в дальнейшем.

Обозначим через D_k дифференциальный оператор, определенный на пространстве $C^1(0,\pi)$ следующим образом:

$$(D_k u)(\theta) = (\sin\theta)^k \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u(\theta)}{(\sin\theta)^k}\right), \quad u \in C^1(0,\pi).$$

Пусть также L — оператор Лапласа на $\mathbb{S}^2$, т. е.

$$L = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$D_k\, p_{\nu,k} = (k-\nu)(k+\nu+1)p_{\nu,k+1}, \qquad D_{-k}\, p_{\nu,k} = p_{\nu,k-1}, \tag{7}$$

$$(L + \nu(\nu+1)\,\mathrm{Id})(p_{\nu,k}(\theta)e^{ik\varphi}) = 0, \tag{8}$$

где Id *— тождественный оператор.*

Доказательство. Используя формулу

$$(1-x^2)\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx} = -\nu x P_\nu^\mu(x) + (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.8, формула (19)), находим

$$p'_{\nu,k}(\theta) = \nu \operatorname{ctg}\theta\, p_{\nu,k}(\theta) + \frac{k-\nu}{\sin\theta} p_{\nu-1,k}(\theta).$$

Отсюда

$$D_k\, p_{\nu,k}(\theta) = \frac{k-\nu}{\sin\theta}\Big(p_{\nu-1,k}(\theta) - \cos\theta\, p_{\nu,k}(\theta)\Big), \tag{9}$$

$$D_{-k}\, p_{\nu,k}(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\Big((\nu+k)\cos\theta\, p_{\nu,k}(\theta) - (\nu-k) p_{\nu-1,k}(\theta)\Big). \tag{10}$$

Поскольку

$$P^{\mu}_{\nu-1}(x) - x P^{\mu}_{\nu}(x) = (\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}\, P^{\mu-1}_{\nu}(x),$$

$$(\nu-\mu) x P^{\mu}_{\nu}(x) - (\nu+\mu) P^{\mu}_{\nu-1}(x) = \sqrt{1-x^2}\, P^{\mu+1}_{\nu}(x)$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.8, формулы (15), (17)), из (9) и (10) получаем (7).

Далее, оператор L действует на функцию u вида $u(\xi) = v(\theta)e^{ik\varphi}$ по правилу

$$(Lu)(\xi) = (l_k v)(\theta) e^{ik\varphi},$$

где

$$l_k = \frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d}{d\theta} - \frac{k^2}{\sin^2\theta}\operatorname{Id}.$$

Оператор l_k можно представить в виде

$$l_k = D_{-k-1} D_k - k(k+1)\operatorname{Id} = D_{k-1} D_{-k} - k(k-1)\operatorname{Id}. \tag{11}$$

Теперь соотношение (8) следует из (11) и (7).

Лемма 2. (i) *Пусть* $\varepsilon, \theta \in (0,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда при* $\nu \to \infty$ *так, что* $|\arg \nu| < \pi - \varepsilon$, *справедливо асимптотическое равенство*

$$p_{\nu,k}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}} \frac{\cos\left(\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)\theta - \dfrac{\pi}{4}(2k+1)\right)}{\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{e^{\theta|\Im m\,\nu|}}{|\nu|^{k+\frac{3}{2}}}\right), \tag{12}$$

причем (12) *выполнено равномерно по* θ *на любом отрезке* $[\alpha,\beta] \subset (0,\pi)$.

(ii) *Если* $\nu \in \mathbb{C}$, $\theta \in (0,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\big|p_{\nu,k}(\theta)\big| \le \frac{1}{k!}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-k-1} e^{\theta|\Im m\,\nu|}. \tag{13}$$

(iii) *Пусть* $0 < a < \pi$, $s, k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\max_{\theta\in[0,a]}\left|\frac{d^s p_{\nu,k}(\theta)}{d\theta^s}\right| = O(\nu^{s-k}), \qquad \nu \to +\infty. \tag{14}$$

Доказательство. По формуле Мелера – Дирихле

$$p_{\nu,k}(\theta) = \frac{(\sin\theta)^{-k}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}\right)} \int\limits_{-\theta}^{\theta} (\cos t - \cos\theta)^{k-\dfrac{1}{2}} e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t} dt \tag{15}$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.7, формула (27)). Из (15) и асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [17], гл. 2, доказательство теоремы 10.2) получаем (12).

Для доказательства (13) снова используем (15). Тогда

$$\left|p_{\nu,k}(\theta)\right| \leq \frac{(\sin\theta)^{-k}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}\right)} \int\limits_{-\theta}^{\theta} (\cos t - \cos\theta)^{k-\frac{1}{2}} dt e^{\theta|\Im m\,\nu|}.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{0}^{\theta} (\cos t - \cos\theta)^{k-\frac{1}{2}} dt = \int\limits_{\cos\theta}^{1} (x-\cos\theta)^{k-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}} \int\limits_{\cos\theta}^{1} (x-\cos\theta)^{k-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}2^{k-\frac{1}{2}}\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}\right)}{k!} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1},$$

приходим к оценке (13).

Наконец, докажем (14). Оценка (14) при $a < \pi/2$ следует из интегрального представления

$$p_{\nu,-k}(\theta)e^{ik\varphi} = i^k \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\cos\theta + i\sin\theta\cos(\psi-\varphi)\Big)^{\nu} e^{ik\psi} d\psi, \quad \theta \in (0,\pi/2),$$

и равенства

$$p_{\nu,-k}(\theta) = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)} p_{\nu,k}(\theta) \tag{16}$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.7, формулы (25), (26), п. 3.3.1, формула (7), а также п. 3.4, формула (5)). С другой стороны, асимптотическое разложение (12) и второе соотношение в (7) показывают, что

$$\max_{0<\alpha\leq\theta\leq\beta<\pi} \left|\frac{d^s p_{\nu,k}(\theta)}{d\theta^s}\right| = O(\nu^{s-k-1/2}), \quad \nu \to +\infty.$$

Комбинируя эти два случая, получаем утверждение (iii).

Далее нам потребуется обобщение классической формулы умножения для многочленов Лежандра (см. [18], гл. 3, § 4, п. 3, формула (2′)). Для формулировки и доказательства соответствующего утверждения введем некоторые обозначения.

Пусть $k, m \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{C}$ и вещественные числа θ_1, θ_2 удовлетворяют условиям: 1) $\sin^2(\theta_1/2) \neq$ $\neq 1$, $\cos\theta_2 \neq -1$; 2) $\sin\theta_1 \sin\theta_2 \geq 0$, $\cos(\theta_1+\theta_2) > -1$ или $\sin\theta_1\sin\theta_2 \leq 0$, $\cos(\theta_1-\theta_2) > -1$. Определим интеграл $I_\nu^{k,m}(\theta_1,\theta_2)$ следующим образом:

$$I_\nu^{k,m}(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_\nu^{-k}(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\psi)e^{im\psi}\times$$

$$\times\frac{(\cos\theta_2\sin\theta_1+\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\psi-i\sin\theta_2\sin\psi)^k}{\Big(1-(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\psi)^2\Big)^{k/2}}d\psi.$$

Следуя [18] (гл. 7, § 1, п. 4), для $l\in\mathbb{Z}_+$, $l\geq\max\big\{|k|,|m|\big\}$ введем функции P_{km}^l на (–1, 1) с помощью равенств

$$P_{km}^l(x)=\frac{i^{k-m}}{2^k(k-m)!}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+k)!}{(l-k)!(l+m)!}}(1+x)^{\frac{k+m}{2}}(1-x)^{\frac{k-m}{2}}\times$$

$$\times F\left(l+k+1,k-l;k-m+1;\frac{1-x}{2}\right),\tag{17}$$

если $k\geq m$, и

$$P_{km}^l(x)=\frac{i^{m-k}}{2^m(m-k)!}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-k)!}{(l+k)!(l-m)!}}(1+x)^{\frac{k+m}{2}}(1-x)^{\frac{m-k}{2}}\times$$

$$\times F\left(l+m+1,m-l;m-k+1;\frac{1-x}{2}\right),\tag{18}$$

если $k<m$. Кроме того, если $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq-1,-2,\ldots$, положим

$$\Phi_{\nu,\alpha,\beta}(\theta_1)=F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\nu}{2},\frac{\alpha+\beta+1-\nu}{2};\alpha+1;\sin^2\frac{\theta_1}{2}\right).\tag{19}$$

Отметим, что функции (17) – (19) тесно связаны с классическими многочленами Якоби (см. [18], гл. 3, § 3, п. 9).

Лемма 3. *Пусть числа θ_1, θ_2 и $\theta_1+\theta_2$ принадлежат промежутку $[0,\pi)$, $k,m\in\mathbb{Z}$, $k\geq m$, $\nu\in\mathbb{C}$. Тогда*

$$I_\nu^{k,m}(\theta_1,\theta_2)=I_\nu^{k,-m}(\theta_1-\pi,\theta_2-\pi)=$$

$$=\frac{1}{(k-m)!}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\right)^{k-m}\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\right)^{k+m}\Phi_{2\nu+1,k-m,k+m}(\theta_1)p_{\nu,m}(\theta_2),\tag{20}$$

$$I_\nu^{k,m}(-\theta_1,\theta_2)=I_\nu^{k,-m}(\pi-\theta_1,\theta_2-\pi)=$$

$$=\frac{(-1)^{m+k}}{(k-m)!}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\right)^{k-m}\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\right)^{k+m}\Phi_{2\nu+1,k-m,k+m}(\theta_1)p_{\nu,m}(\theta_2).$$

Доказательство. По формуле умножения для функций P_{km}^l имеем (см. [18], гл. 3, § 4, п. 3, формула (1))

$$P^l_{km}(\cos\theta_1)P^l_{m0}(\cos\theta_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P^l_{k0}(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\psi)e^{im\psi}\times$$

$$\times\frac{(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1\cos\psi - i\sin\theta_2\sin\psi)^k}{\Big(1-(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\psi)^2\Big)^{k/2}}d\psi. \tag{21}$$

Согласно [18] (гл. 3, § 3, п. 9, формулы (9), (10))

$$P^l_{m0}(x) = i^m\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}P^{-m}_l(x). \tag{22}$$

Поэтому (21) принимает вид

$$I^{k,m}_l(\theta_1,\theta_2) = i^{m-k}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-k)!}{(l+k)!(l-m)!}}P^l_{km}(\cos\theta_1)p_{l,m}(\theta_2). \tag{23}$$

Учитывая, что $k \geq m$, из (17), (19) и (23) находим

$$I^{k,m}_l(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{(k-m)!}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\right)^{k-m}\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\right)^{k+m}\Phi_{2l+1,k-m,k+m}(\theta_1)p_{l,m}(\theta_2). \tag{24}$$

Рассмотрим теперь целую функцию

$$f(z) = z(z-1)\ldots(z-a+1)\times$$

$$\times\left(I^{k,m}_z(\theta_1,\theta_2) - \frac{1}{(k-m)!}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\right)^{k-m}\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\right)^{k+m}\Phi_{2z+1,k-m,k+m}(\theta_1)p_{z,m}(\theta_2)\right),$$

где $a = \max\big\{|m|,|k|\big\}$. Тогда $f(n) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. (24)). Кроме того, f удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leq c\big(1+|z|\big)^{3a}e^{(\theta_1+\theta_1)|\mathfrak{Im}\, z|}, \quad z\in\mathbb{C},$$

где c не зависит от z (см. (13), (16) и [13], гл. 7, следствие 7.2). По теореме Карлсона (см. [19], гл. 5) отсюда заключаем, что $f\equiv 0$. Это дает совпадение крайних частей в (20). Остальные равенства в лемме выводятся из доказанного соотношения с помощью простых замен переменной в интеграле.

В заключение этого пункта приведем некоторые свойства нулей ν функции (6).

Лемма 4. *Пусть* $r\in(0;\pi)$, $k\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда*:

(i) *функция* $\nu\to p_{\nu,k}(r)$, $\nu\in\mathbb{C}$, *имеет бесконечно много нулей*;

(ii) *все нули этой функции являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки* $\nu = -\dfrac{1}{2}$;

(iii) *если* $\nu\in[-k-1,k]$, *то* $p_{\nu,k}(r) > 0$;

(iv) *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\nu\in N_k(r)} \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} < \infty, \tag{25}$$

где, как и выше, $N_k(r) = \big\{\nu > k : p_{\nu,k}(r) = 0\big\}$.

Доказательство. Рассмотрим четную целую функцию

$$q_r(\lambda) = p_{\lambda-\frac{1}{2},k}(r), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{26}$$

Из (15) следует, что $q_r(\overline{\lambda}) = \overline{q_r(\lambda)}$ и, в частности, q_r вещественнозначна на $\mathbb{R}^1$. Кроме того, $q_r > 0$ на мнимой оси. Далее, $q_r \to 0$ при $\lambda \to \infty$ по вещественной оси и является функцией экспоненциального типа r (см. (13)). Отсюда и из теоремы Адамара о факторизации [20] (гл. 1, § 3, п. 8) заключаем, что q_r имеет бесконечно много нулей. Это влечет утверждение (i).

Для доказательства утверждения (ii) воспользуемся соотношением

$$(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)\int\limits_0^r p_{\nu,k}(\theta)p_{\mu,k}(\theta)\sin\theta d\theta = \sin r\Big(p_{\mu,k}(r)p'_{\nu,k}(r) - p_{\nu,k}(r)p'_{\mu,k}(r)\Big) \tag{27}$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.12, формула (1)). Пусть $q_r(\lambda) = 0$. Предположим, что $\lambda \notin \mathbb{R}^1$. Тогда $\lambda^2 \neq \overline{\lambda}^2$, так как $i\lambda \notin \mathbb{R}^1$. Полагая в (27) $\mu = \overline{\nu} = \lambda - \dfrac{1}{2}$ и учитывая, что $q_r(\overline{\lambda}) = 0$, получаем

$$\int\limits_0^r \Big|p_{\lambda-\frac{1}{2},k}(\theta)\Big|^2 \sin\theta d\theta = 0, \tag{28}$$

что невозможно. Предположим теперь, что $q_r(\lambda) = q'_r(\lambda) = 0$. Полагая в (27) $\mu = \lambda - \dfrac{1}{2}$, при $\nu \to \mu$ снова получаем (28). Таким образом, все нули q_r вещественные, простые и симметричны относительно точки $\lambda = 0$. Отсюда и из (26) имеем утверждение (ii).

Утверждение (iii) следует из равенства

$$p_{\nu,k}(r) = \frac{(\sin r)^k}{2^k k!} F\left(k-\nu, \nu+k+1; k+1; \sin^2\frac{r}{2}\right)$$

(см. [15], гл. 3, п. 3.5, формула (8)) и определения гипергеометрической функции. Наконец, используя связь между порядком целой функции и показателем сходимости последовательности ее нулей (см. [20], гл. 1, § 2, п. 2), получаем утверждение (iv).

Лемма 5. *Пусть* $r \in (0;\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\delta(\mu,\nu) = \int\limits_0^r p_{\nu,k}(\theta)p_{\mu,k}(\theta)\sin\theta d\theta, \quad \mu,\nu \in N_k(r).$$

Тогда $\delta(\mu,\nu) = 0$ *при* $\mu \neq \nu$ *и*

$$\delta(\nu,\nu) > \frac{c}{\nu^{2k+2}}, \tag{29}$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* ν.

Доказательство. При $\mu \neq \nu$ утверждение следует из (27). Далее, неравенство (29) достаточно доказать при всех достаточно больших $\nu \in N_k(r)$. Пусть $\nu > \dfrac{\pi}{4r} - \dfrac{1}{2}$. Положим

$$g_k(\theta, t) = (\cos t - \cos\theta)^{k-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq \theta \leq \pi. \tag{30}$$

Тогда из (15) имеем

$$\delta(\nu,\nu) = \int\limits_0^r (p_{\nu,k}(\theta))^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi\Gamma^2(k+1/2)} \int\limits_0^r (\sin\theta)^{1-2k} \left(\int\limits_0^\theta g_k(\theta,t)\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right) tdt\right)^2 d\theta \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi\Gamma^2(k+1/2)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}} (\sin\theta)^{1-2k} \left(\int\limits_0^\theta g_k(\theta,t)\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right) tdt\right)^2 d\theta \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi\Gamma^2(k+1/2)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}} (\sin\theta)^{1-2k} \left(\int\limits_{\frac{\theta}{2}}^\theta g_k(\theta,t)dt\right)^2 d\theta. \tag{31}$$

Внутренний интеграл в (31) оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} g_k(\theta,t)dt = \int\limits_{\cos\theta}^{\cos\frac{\theta}{2}} (x-\cos\theta)^{k-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sin\theta} \int\limits_{\cos\theta}^{\cos\frac{\theta}{2}} (x-\cos\theta)^{k-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{2k+1} \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)^{k+\frac{1}{2}}}{\sin\theta}. \tag{32}$$

Учитывая, что

$$\frac{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\dfrac{3\theta}{4}}{2\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}} \geq \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{4} \geq \frac{3\theta}{4\pi}$$

при $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4(\nu+1/2)}$, из (31), (32) получаем

$$\delta(\nu,\nu) \geq \frac{1}{\pi\Gamma^2(k+3/2)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}} \left(\frac{3\theta}{4\pi}\right)^{2k+1} d\theta,$$

откуда следует (29).

Лемма 6. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}_+$, $u \in L[0,r]$ *и*

$$v(z) = \int\limits_0^r u(\theta) p_{z,k}(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{33}$$

Тогда если $v(z) = 0$ *при всех* $z \in N_k(r)$, *то* $u = 0$.

Доказательство. Из (33), (15) и (30) имеем

$$v(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+k\right)} \int\limits_0^r u(\theta) K(z,\theta)(\sin\theta)^{1-k} d\theta, \tag{34}$$

где

$$K(z,\theta) = \int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{i\left(z+\frac{1}{2}\right)t} g_k(\theta,t) dt. \tag{35}$$

Интегрируя (35) по частям, находим

$$K(z,\theta) = \left(\frac{i}{z+\dfrac{1}{2}}\right)^k \int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{i\left(z+\frac{1}{2}\right)t} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \big(g_k(\theta,t)\big) dt. \tag{36}$$

Из (34), (36) и (13) видно, что

$$|v(z)| \leq c\left(e^{\frac{r}{2}|\Im m\, z|} + \frac{e^{r|\Im m\, z|}}{\big(1+|z|\big)^k}\right), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{37}$$

где c не зависит от z. Рассмотрим функцию $w(z) = v(z)/p_{z,k}(r)$. Поскольку $p_{z,k}(\theta) = p_{-z-1,k}(\theta)$ (см. [15], гл. 3, п. 3.4, формула (7)), из условия, леммы 4 и оценок (37), (13) следует, что w — целая функция не выше первого порядка, причем $w(z) = w(-z-1)$, $z \in \mathbb{C}$. Кроме того, $w(z) = O(|z|)$ при $z \to \infty$ по прямым $\Im m\, z = \pm \mathrm{Re}\, z$ (см. (12)). Отсюда и из принципа Фрагмена – Линделефа делаем вывод, что w — многочлен не выше первой степени. В силу четности w относительно $-\dfrac{1}{2}$ имеем $w(z) = w(0)$ при всех z. Это означает (см. (34), (35) и (15)), что

$$\int\limits_{-r}^{r} e^{i\left(z+\frac{1}{2}\right)t} \int\limits_{|t|}^{r} u(\theta)(\sin\theta)^{1-k} g_k(\theta,t) d\theta dt = w(0)(\sin r)^{-k} K(z,r).$$

Тогда

$$\int\limits_t^r u(\theta)(\sin\theta)^{1-k} \frac{g_k(\theta,t)}{g_k(r,t)} d\theta = w(0)(\sin r)^{-k}$$

при всех $t \in (0,r)$. Переходя здесь к пределу при $t \to r$, заключаем, что $w(0) = 0$. Таким образом, приходим к интегральному уравнению типа Абеля

$$\int\limits_t^r u(\theta)(\sin\theta)^{1-k} g_k(\theta,t) d\theta = 0, \quad t \in (0,r),$$

решением которого является нулевая функция (см. [21], гл. 1, § 2, доказательство теоремы 2.6).

4. Свойства классов $U^s_{r,M}(B_R)$. Пусть $0 < R \leq \pi$, $f \in C(B_R)$, $f_k(\theta)$ — коэффициенты Фурье, определенные равенством (3). Для краткости положим

$$f^k(\xi) = f_k(\theta)e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Далее все функции из класса $C(B_R \setminus \{o\})$, допускающие непрерывное продолжение в точку $\{o\}$, считаются доопределенными в этой точке по непрерывности.

Лемма 7. *Пусть* $f \in U^s_{r,M}(B_R)$. *Тогда*:

(i) $\overline{f} \in U^s_{r,M}(B_R)$;

(ii) $f^k \in U^s_{r,M}(B_R)$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) *если* $s \geq 1$ *и* $f(\xi) = u(\theta)e^{ik\varphi}$, *то функции* $(D_k u)(\theta)e^{i(k+1)\varphi}$ *и* $(D_{-k}u)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}$ *принадлежат классу* $U^{s-1}_{r,M}(B_R)$;

(iv) *если* $s \geq 2$ *и* $f(\xi) = u(\theta)e^{ik\varphi}$, *то* $(l_k u)(\theta)e^{ik\varphi} \in U^{s-2}_{r,M}(B_R)$;

(v) *если* $f(\xi) = u(\theta)e^{iM\varphi}$, *то* $u(r) = 0$.

Доказательство. Будем считать, что τ — элемент группы $O(3)$ такой, что $\tau\overline{B}_r \subset B_R$.

(i) Пусть $\varkappa_\alpha$ — ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^3$, действующее по правилу

$$\varkappa_\alpha\xi = (\xi_1\cos\alpha + \xi_2\sin\alpha, \xi_1\sin\alpha - \xi_2\cos\alpha, \xi_3), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Тогда $\varkappa_\alpha = \varkappa_\alpha^{-1}$ и $\tau\varkappa_\alpha\overline{B}_r \subset B_R$. Поэтому

$$\int\limits_{S_r} \overline{f}(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = \int\limits_{S_r} \overline{f}(\tau\varkappa_\alpha\varkappa_\alpha\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) =$$

$$= e^{i\alpha M}\int\limits_{S_r} \overline{f}(\tau\varkappa_\alpha\eta)(\eta_1 - i\eta_2)^M dl(\eta) = e^{i\alpha M}\overline{\int\limits_{S_r} f(\tau\varkappa_\alpha\eta)(\eta_1 + i\eta_2)^M dl(\eta)} = 0,$$

что и требовалось в первом утверждении.

(ii) Обозначим через τ_α вращение $\mathbb{R}^3$ в плоскости (x_1, x_2) на угол α, т. е.

$$\tau_\alpha\xi = (\xi_1\cos\alpha - \xi_2\sin\alpha, \xi_1\sin\alpha + \xi_2\cos\alpha, \xi_3). \tag{39}$$

Из (2) следует формула

$$f^k(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau_\alpha\xi)e^{ik\alpha}d\alpha. \tag{40}$$

В частности, $f^k \in C^s(B_R)$. Далее, согласно (40) имеем

$$\int\limits_{S_r} f^k(\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{S_r} f(\tau_\alpha\tau\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi)e^{ik\alpha}d\alpha.$$

Учитывая, что $\tau_\alpha\tau\overline{B}_r \subset B_R$ для любого $\alpha \in [0, 2\pi]$, отсюда получаем утверждение (ii).

(iii) , (iv) Пусть a_t — вращение $\mathbb{R}^3$ в плоскости (x_2, x_3) на угол $(-t)$, т. е.

$$a_t\xi = (\xi_1, \xi_2 \cos t + \xi_3 \sin t, -\xi_2 \sin t + \xi_3 \cos t). \tag{41}$$

При достаточно малых $|t|$ из условия имеем

$$\int\limits_{\tau S_r} F(a_t\xi)\mathcal{P}_M(\tau^{-1}\xi)dl(\xi) = 0, \tag{42}$$

где $F(x) = f(x/|x|)$, $\mathcal{P}_M(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^M$. Дифференцируя (42) по t и полагая $t = 0$, находим

$$\int\limits_{\tau S_r} h(\xi)\mathcal{P}_M(\tau^{-1}\xi)dl(\xi) = 0, \tag{43}$$

где $h(\xi) = \xi_3 \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\xi) - \xi_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_3}(\xi)$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$h^\circ(\varphi, \theta) = \cos\varphi \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta} - \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial f^\circ}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}(D_k u)(\theta)e^{i(k+1)\varphi} + \frac{1}{2}(D_{-k}u)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}.$$

Теперь утверждение (iii) следует из (43) и утверждения (ii), а утверждение (iv) получается из утверждения (iii) и (11).

(v) Используя определение класса $U_{r,M}(B_R)$, имеем

$$\int\limits_{S_r} f(\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = 0.$$

Осталось заметить, что для функций вида $f(\xi) = u(\theta)e^{iM\varphi}$ это соотношение эквивалентно равенству $u(r) = 0$.

Лемма 8. (i) *Пусть* $\nu \in N_M(r)$, $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда функция* $s_{\nu,k}(\xi) = p_{\nu,|k|}(\theta)e^{ik\varphi}$ *принадлежит классу* $U^\infty_{r,M}(B_\pi)$.

(ii) *Пусть* $M \geq 1$, $|k| \leq M - 1$. *Тогда функция*

$$f(\xi) = (\sin\theta)^{|k|} \sum_{j=0}^{M-|k|-1} \gamma_j (\cos\theta)^j e^{ik\varphi}, \quad \gamma_j \in \mathbb{C},$$

принадлежит классу $U^\infty_{r,M}(\mathbb{S}^2)$ *для любого* $r \in (0, \pi)$.

Доказательство. (i) Гладкость функций $s_{\nu,k}$ следует из равенств

$$s_{\nu,k}(\xi) = \frac{1}{k!} F\left(-\nu, \nu + 1; 1 + k; \frac{1 - \xi_3}{2}\right) \frac{(\xi_2 + i\xi_1)^k}{(1 + \xi_3)^k}, \quad k \geq 0,$$

$$s_{\nu,k}(\xi) = \frac{1}{(-k)!} F\left(-\nu, \nu + 1; 1 - k; \frac{1 - \xi_3}{2}\right) \frac{(\xi_2 - i\xi_1)^{-k}}{(1 + \xi_3)^{-k}}, \quad k < 0$$

(см. (4) и (1)). Докажем, что $s_{\nu,k} \in U_{r,M}(B_\pi)$.

Пусть сначала $k \geq M$. Используя лемму 3 и (16), при $|t| < \pi - r$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$\int\limits_{S_r} s_{\nu,k}(\tau_\beta a_t \tau_\alpha \xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = \frac{2\pi}{(k-M)!} i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} \times$$

$$\times (\sin r)^{M+1} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k-M} \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{k+M} \Phi_{2\nu+1,k-M,k+M}(t) p_{\nu,M}(r), \tag{44}$$

$$\int\limits_{S_r} s_{\nu,k}(\varkappa_\beta a_t \tau_\alpha \xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = \frac{2\pi}{(k+M)!} (-1)^{k+M} i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} \times$$

$$\times (\sin r)^{M+1} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+M} \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{k-M} \frac{\Gamma(\nu+M+1)}{\Gamma(\nu-M+1)} \Phi_{2\nu+1,k+M,k-M}(t) p_{\nu,M}(r), \tag{45}$$

где τ_α, $\varkappa_\beta$, a_t определены в (38), (39) и (41). Учитывая, что $p_{\nu,M}(r) = 0$, из (44), (45) и теоремы Эйлера о разложении собственных ортогональных матриц в композицию вращений вокруг координатных осей получаем требуемое утверждение при $k \geq M$. Общий случай легко выводится отсюда с помощью леммы 7 (i), (iii) и (7).

(ii) В силу леммы 7 (i) можно считать, что $k \geq 0$. Тогда

$$f(\xi) = (\xi_2 + i\xi_1)^k \sum_{j=0}^{M-k-1} \gamma_j \xi_3^j,$$

и для доказательства утверждения (ii) достаточно установить равенство

$$\int\limits_{S_r} Y(\xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = 0, \tag{46}$$

где Y — произвольная сферическая гармоника на $\mathbb{S}^2$ степени не выше $M-1$ (см. [18], гл. 3, § 6, п. 5). Сферическая гармоника порядка m на $\mathbb{S}^2$ имеет вид

$$\sum_{n=-m}^{m} c_n P_m^{-n}(\cos\theta) e^{in\varphi}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Поэтому (46) следует из ортогональности тригонометрической системы $\{e^{in\varphi}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в $L^2[0, 2\pi]$.

Лемма 9. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}$, $f(\xi) = u(\theta) e^{ik\varphi} \in U_{r,M}^{M+|k|+4}(B_R)$ *и* $f = 0$ *в* B_r. *Тогда* $f = 0$ *в* B_R.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $k = 0$, т. е. $f(\xi) = u(\theta)$ (см. лемму 7 (iii)). Пусть $0 < \varepsilon < R - r$. Рассмотрим функцию w_ε, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\mathrm{w}_\varepsilon \in C^\infty[0, \pi]$; 2) $\mathrm{w}_\varepsilon = 1$ на $[0, R-\varepsilon]$ и $\mathrm{w}_\varepsilon = 0$ на $[R - \varepsilon/2, \pi]$. Для $\theta \in [0, \pi]$ положим $\Phi(\theta) = u(\theta)\mathrm{w}_\varepsilon(\theta)$, где $u = 0$ на $[R, \pi]$. Тогда $\Phi \in C^{M+4}[0, \pi]$ и

$$\Phi(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_j(\cos\theta), \tag{47}$$

где

$$\alpha_j = \frac{2j+1}{2} \int_0^\pi \Phi(\theta) P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

(см. [18], гл. 3, § 6, п. 4, формулы (21), (22)). При этом $\alpha_j = O(j^{-M-2})$, $j \to +\infty$, и ряд (47) сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. Далее будет использоваться отображение (41), где $0 < t < R - r - \varepsilon$. Из условия имеем

$$\int_{S_r} F(a_t \xi)(\xi_1 + i\xi_2)^M dl(\xi) = 0, \tag{48}$$

где $F(\xi) = \Phi(\arccos \xi_3)$. Разложение (47) показывает, что

$$F(a_t\xi) = \sum_{j=0}^\infty \alpha_j P_j(\xi_3 \cos t - \xi_2 \sin t).$$

Поэтому из (48) следует соотношение

$$\sum_{j=0}^\infty \alpha_j \int_0^{2\pi} P_j(\cos r \cos t - \sin r \sin t \cos\varphi) e^{-iM\varphi} d\varphi = 0. \tag{49}$$

Полагая в (21) $l = j$, $k = 0$, $m = -M$, $\theta_1 = r$, $\theta_2 = t$, из (22), (16) и (49) получаем

$$\sum_{j=0}^\infty \alpha_j P_j^{-M}(\cos r) P_j^M(\cos t) = 0. \tag{50}$$

Произведение функций Лежандра в (50) можно представить в виде

$$P_j^{-M}(\cos r) P_j^M(\cos t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t-r|}^{t+r} P_j(\cos\theta) T_M\left(\frac{\cos r\cos t - \cos\theta}{\sin r \sin t}\right) \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos(t+r))(\cos(t-r) - \cos\theta)}},$$

где T_M — многочлен Чебышева первого рода (см. [18], гл. 3, § 4, п. 3, формула (7)). Теперь, учитывая (47), приходим к уравнению

$$\int_{|t-r|}^{t+r} \Phi(\theta) T_M\left(\frac{\cos r\cos t - \cos\theta}{\sin r \sin t}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos(t+r))(\cos(t-r) - \cos\theta)}} = 0, \quad 0 < t < R - r - \varepsilon.$$

Отсюда заключаем (см. [22], лемма 4), что $\Phi = 0$ на $[0, R - \varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon \in \in (0, R - r)$ $f = 0$ в B_R.

5. Доказательство теоремы. *Достаточность* условий теоремы легко следует из леммы 8 (см. (2)). Установим *необходимость*. По лемме 7 (ii) $f^k \in U^\infty_{r,M}(B_R)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Сначала рассмотрим случай, когда $k = M$. Положим

$$c_\nu = \frac{1}{\delta(\nu,\nu)} \int\limits_0^r f_M(\theta) p_{\nu,M}(\theta) \sin\theta d\theta, \quad \nu \in N_M(r), \tag{51}$$

где

$$\delta(\nu,\nu) = \int\limits_0^r (p_{\nu,M}(\theta))^2 \sin\theta d\theta.$$

Интегрируя (51) по частям с учетом (7), (11) и леммы 7 (iv), (v), получаем

$$c_\nu = \frac{1}{\delta(\nu,\nu)} \frac{(-1)^m}{(\nu(\nu+1))^m} \int\limits_0^r (l^m_M f_M)(\theta) p_{\nu,M}(\theta) \sin\theta d\theta$$

для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому из (29) и (14) имеем

$$c_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^{2m-M-2}}\right), \qquad \nu \to +\infty. \tag{52}$$

Определим гладкую функцию F на $[0, R)$ равенством

$$F(\theta) = \sum_{\nu \in N_M(r)} c_\nu p_{\nu,M}(\theta) \tag{53}$$

(см. (52), (14) и (25)). Используя лемму 5, отсюда находим

$$c_\nu = \frac{1}{\delta(\nu,\nu)} \int\limits_0^r F(\theta) p_{\nu,M}(\theta) \sin\theta d\theta, \qquad \nu \in N_M(r). \tag{54}$$

Сравнивая (51) с (54), на основании леммы 6 заключаем, что $f_M = F$ на $[0, r]$. Тогда функция $(f_M(\theta) - F(\theta))e^{iM\varphi}$ равна нулю в B_r и принадлежит $U^\infty_{r,M}(B_R)$ (см. лемму 8 (i)). Теперь требуемое разложение (5) при $k = M$ следует из леммы 9 и (53). Случай $k \geq 0$ сводится к рассмотренному индукцией по k с использованием (7) и леммы 7 (iii). При $k < 0$ представление (5) получается отсюда в силу леммы 7 (i). Таким образом, теорема полностью доказана.

1. *Minkowski H.* Über die Körper konstanter Breite // Mat. Sb. – 1904. – **25**. – C. 505 – 508 (in Russian). Ges. Abh. – 1904. – 2. – P. 277 – 279.
2. *Funk P.* Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätishen Linien // Math. Ann. – 1913. – **74**. – P. 278 – 300.
3. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der Konvexen Körper. – Berlin: Springer, 1934.
4. *Petty C. M.* Centroid surfaces // Pacif. J. Math. – 1961. – **11**. – P. 1535 – 1547.
5. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. – 1917. – **69**. – S. 262 – 277.
6. *Ungar P.* Freak theorem about functions on a sphere // J. London Math. Soc. – 1954. – **29**. – P. 100 – 103.
7. *Schneider R.* Functions on a sphere and vanishing integrals over certain subspheres // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – **26**. – P. 381 – 384.

8. *Schneider R.* Über eine Integralgleichung in der Theorie der konvexen Körper // Math. Nachr. – 1970. – **44**. – S. 55 – 75.
9. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on spaces of constant curvature // J. Anal. Math. – 1976. – **30**. – P. 113 – 130.
10. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. math. helv. – 1980. – **55**. – P. 593 – 621.
11. *Badertscher E.* The Pompeiu problem on locally symmetric spaces // J. Anal. Math. – 1991. – **57**. – P. 250 – 281.
12. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
13. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
14. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
16. *Волчков В. В.* Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 4. – С. 737 – 745.
17. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов. – Рига: Зинатне, 1974. – Т. 1. – 392 с.
18. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп: 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
19. *Titchmarsh E. C.* The theory of functions. – 2nd ed. – New York: Oxford Univ. Press, 1939.
20. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 175 с.
21. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
22. *Волчков Вит. В., Савостьянова И. М.* Аналог теоремы Йона для взвешенных шаровых средних на сфере // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 5. – С. 611 – 619.

Получено 07.02.13