УДК 517.951.2

Ю. П. Апаков, Б. Ю. Иргашев (Наманган. инж.-пед. ин-т, Узбекистан)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

We consider a boundary-value problem for a degenerate high-order odd equation. The uniqueness of the solution is shown by the method of energy integrals. The solution is constructed by the method of separation of variables. In this case, the problem of eigenvalues is obtained for a degenerate even-order ordinary differential equation. The existence of eigenvalues is shown by means of reduction to an integral equation.

Розглядається крайова задача для вироджуваного рівняння непарного порядку. Єдиність розв'язку встановлюється методом інтегралів енергії. Розв'язок будується методом відокремлення змінних, при цьому отримується задача на власні значення для вироджуваного звичайного диференціального рівняння парного порядку. Існування власного значення показується шляхом зведення до інтегрального рівняння.

1. Введение и формулировка основных результатов. В области $\Omega = \big\{(x,y) \colon 0 < x, y < 1\big\}$ для уравнения

$$(-1)^n D_x^{2n+1} u(x,y) + (-1)^k y^m D_y^{2k} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $D_z^i = \dfrac{\partial^i}{\partial z^i}$, $n, k \in N$, $0 \le m < 2k$, изучим следующую задачу.

Задача А. Найти регулярное решение уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C_{x,y}^{(2n+1),(2k)}(\Omega) \cap$ $\cap\, C_{x,y}^{(2n),(2k-1)}\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$D_y^s u(x,0) = D_y^s u(x,1) = 0, \quad s = \overline{0,k-1}, \tag{2}$$

которые выполняются равномерно по x,

$$D_x^j u(0,y) = \varphi_j(y), \quad j = \overline{0,n}, \tag{3}$$

$$D_x^r u(1,y) = \varphi_{n+1+r}(y), \quad r = \overline{0,n-1}. \tag{4}$$

В случае $m = 0$ уравнение (1) изучалось в работе [1], где разработана методика построения фундаментального решения. Используя методику из [1], для уравнений

$$D_x^{2n} u - (-1)^n D_y^1 u = 0,$$

$$D_x^{2n+1} u + (-1)^n D_y^2 u = 0,$$

$$D_x^{2n+1} u + (-1)^n D_y^1 u = 0$$

в работах [2, 3, 4] соответственно найдены фундаментальные решения в виде несобственных интегралов и построена теория потенциала.

При изучении так называемого стационарного вязкого трансзвукового линейного уравнения (или ВТ-уравнения)

$$D_x^3 u(x,y) + D_y^2 u + \frac{a}{y} D_y^1 u = f(x,y)$$

© Ю. П. АПАКОВ, Б. Ю. ИРГАШЕВ, 2014

в случае $a = 0$ с помощью метода подобия и автомодельного решения в работах [5 – 7] построены и изучены свойства фундаментальных решений, выраженные через специальные функции, а также решены некоторые краевые задачи. Кроме того, в работах [8, 9] в явном виде построены функции Грина некоторых внешних краевых задач в случаях $a = 0$ и $a = 1$. Случай произвольного a исследован в [10].

В данной работе для уравнения (1), которое является некоторым обобщением BT-уравнения, исследована задача A. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Задача A имеет не более одного решения.*

Решение задачи A ищется в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Учитывая условие (2), относительно переменной y получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &y^m Y^{(2k)} - (-1)^k \lambda^{2n+1} Y = 0, \\ &Y^{(s)}(0) = Y^{(s)}(1) = 0, \quad s = \overline{0, k-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 2. *Для собственных функций $Y(y)$ задачи* (5) *справедливо соотношение*

$$Y(y) = O(y^k), \quad y \to +0.$$

Далее строится функция Грина задачи (5).

Теорема 3. *Функция Грина имеет вид*

$$G(y,\xi) = -\frac{1}{(2k-1)!} \begin{cases} G_1(y,\xi), & 0 \le y \le \xi, \\ G_2(y,\xi), & \xi \le y \le 1, \end{cases}$$

где

$$G_1(y,\xi) = (1-\xi)^k y^k \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^i C_{2k-1}^i C_{k-1+j}^j y^{k-i-1} \xi^{j+i},$$

$$G_2(y,\xi) = (1-y)^k \xi^k \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^i C_{2k-1}^i C_{k-1+j}^j \xi^{k-i-1} y^{j+i}.$$

Задача (5) сводится к эквивалентному интегральному уравнению, затем показывается, что интегральное уравнение имеет собственные значения. Получены достаточные условия, при которых произвольная функция разлагается в ряд по собственным функциям задачи (5).

Теорема 4. *Если функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям*:

1) $\varphi^{(s)}(0) = \varphi^{(s)}(1) = 0$, $s = \overline{0, k-1}$,

2) $y^{-\frac{m}{2}} \varphi(y)$ *непрерывна на отрезке* $[0,1]$,

3) $y^{\frac{m}{2}} \varphi^{(2k)}(y)$ *кусочно-непрерывна на отрезке* $[0,1]$,

то ее можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (5).

Относительно переменной x получена задача

$$X_j^{(2n+1)} + (-1)^n \lambda_j^{2n+1} X_j = 0,$$
$$X_j^{(i)}(0) = \varphi_{i,j}, \quad i = \overline{0,n}, \tag{6}$$
$$X_j^{(i)}(1) = \varphi_{i+n+1,j}, \quad i = \overline{0,n-1},$$

где

$$\varphi_{i,j} = \int\limits_0^1 \varphi_i(y) Y_j(y) y^{-m} dy.$$

Теорема 5. *Для решения $X_j(x)$ задачи* (6) *справедлива оценка*

$$|X_j(x)| \leq M \sum_{i=0}^{2n} |\varphi_{i,j}|, \tag{7}$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Теорема 6. *Если граничные функции $\varphi_i(y)$, $i = \overline{0, 2k-1}$, удовлетворяют следующим условиям*:

1) $\varphi_i(y) \in C^{4k}(0,1]$,
2) $\varphi_i^{(j)}(1) = 0$, $j = \overline{0, 3k-1}$,
3) $\varphi_i^{(j)}(y) = O(y^{\alpha - j})$, $j = \overline{0, 4k}$, $\alpha > 4k - \dfrac{3m+1}{2}$,

то решение задачи A существует в виде бесконечного ряда

$$u(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(y) X_j(x), \tag{8}$$

где $Y_j(y), X_j(x)$ — решения задач (5), (6) *соответственно.*

2. Доказательства полученных результатов. ***Доказательство теоремы* 1.** Покажем, что если задача (1)–(4) имеет решение, то оно единственно. В силу линейности уравнения для этого достаточно доказать, что однородная задача (2)–(4) для уравнения (1) имеет только тривиальное решение. Предположим обратное, пусть $u(x,y) \neq 0$ — решение однородной задачи (1)–(4). Из условия задачи следует, что

$$u(x,y) = O(y^k), \quad y \to +0.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} y^{1-m} u L[u] dx dy \equiv 0. \tag{9}$$

Имеем

$$(-1)^n \int\limits_0^1 u D_x^{2n+1} u(x,y)\, dx = \frac{1}{2}\left(D_x^n u(1,y)\right)^2, \tag{10}$$

$$(-1)^k \int\limits_0^1 yuD_y^{2k} u\,(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 D_y^k\,(yu) D_y^k u dy = \int\limits_0^1 y\Big(D_y^k u\Big)^2 dy + k\int\limits_0^1 D_y^{k-1} u D_y^k u dy =$$

$$= \int\limits_0^1 y\Big(D_y^k u\Big)^2 dy + \frac{k}{2}\int\limits_0^1 D_y^1 \Big(D_y^{k-1} u\Big)^2 dy = \int\limits_0^1 y\Big(D_y^k u\Big)^2 dy. \tag{11}$$

Подставляя (10), (11) в (9), получаем

$$0 = \iint\limits_{\Omega} y^{1-m} uL\,[u] dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^{1-m}\Big(D_x^n u(1,y)\Big)^2 dy + \iint\limits_{\Omega} y\Big(D_y^k u\Big)^2 dxdy.$$

Поскольку оба интеграла существуют и положительны, то $u\,(x,y) \equiv 0.$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Решение задачи (5) будем искать в виде ряда

$$g_s\,(y,\lambda) = y^s \sum_{j=0}^{\infty} c_j^s y^{j(2k-m)},$$

где $s = \overline{0, 2k-1}$, а коэффициенты c_j^s подлежат определению. Подставим его в уравнение (5):

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j^s \Big(j(2k-m)+s\Big)_{2k} y^{(j-1)(2k-m)+s} - (-1)^k \lambda^{2n+1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^s y^{j(2k-m)+s} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+1}^s \left((j+1)\,(2k-m)+s\right)_{2k} y^{j(2k-m)+s} - (-1)^k \lambda^{2n+1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^s y^{j(2k-m)+s} = 0,$$

откуда

$$c_{j+1}^s = \lambda^{2n+1} \frac{(-1)^k c_j^s}{\Big((j+1)(2k-m)+s\Big)_{2k}}.$$

Если теперь m нецелое, то $c_0^s \neq 0$ выбирается произвольно. Если m целое, то может оказаться, что $\big((j+1)(2k-m)+s\big)_{2k} = 0$ для $j = \overline{0, l}$. Тогда положим $c_j^s = 0$ при $j = \overline{0, l-1}$; $c_l^s \neq 0$ выбирается произвольно, а остальные коэффициенты вычисляются с помощью рекуррентной формулы. Очевидно, что рассматриваемый ряд при фиксированном λ сходится абсолютно и равномерно по признаку Даламбера. Поскольку функции $\big\{g_s(y,\lambda)\big\}_{s=0}^{s=2k-1}$ образуют фундаментальную систему решений, собственная функция задачи (5) имеет вид

$$Y(y) = \sum_{j=0}^{2k-1} b_j g_j(y,\lambda).$$

Из условия $Y^{(i)}(0) = 0$ для $i = \overline{0, k-1}$ следует, что

$$Y(y) = \sum_{j=k}^{2k-1} b_j g_j\,(y,\lambda). \tag{12}$$

Для нахождения $b_j, j = \overline{k, 2k-1}$, имеем систему

$$\sum_{j=k}^{2k-1} b_j g_j^{(l)}(1,\lambda) = 0, \quad l = \overline{0, k-1}.$$

Последняя система имеет нетривиальное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_k(1,\lambda) & \ldots & g_{2k-1}(1,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_k^{(k-1)}(1,\lambda) & \ldots & g_{2k-1}^{(k-1)}(1,\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. получили уравнение для нахождения собственного значения. Из (12) следует, что

$$Y(y) = O(y^k), \quad y \to +0.$$

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Будем искать функции $G_1(y,\xi)$, $G_2(y,\xi)$ в виде

$$G_1(y,\xi) =$$

$$= (1-\xi)^k y^k \left(y^{k-1}P_0(\xi) + y^{k-2}P_1(\xi) + \ldots + yP_{k-2}(\xi) + P_{k-1}(\xi)\right), \quad 0 \le \xi \le y,$$

$$G_2(y,\xi) =$$

$$= (1-y)^k \xi^k \left(\xi^{k-1}P_0(y) + \xi^{k-2}P_1(y) + \ldots + \xi P_{k-2}(y) + P_{k-1}(y)\right), \quad y \le \xi \le 1,$$

где

$$P_i(y) = \sum_{j=0}^{k-i-1} a_{k+j}^i y^{i+j}.$$

Далее, подберем $P_i(y)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$G_1(y,\xi) - G_2(y,\xi) = (y-\xi)^{2k-1}. \tag{13}$$

В тождестве (13) рассмотрим производные по ξ до $(k-1)$-го порядка включительно в точке $\xi = 0$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y :

$$\begin{gathered} D_\xi^p G_2(y,0) = 0, \quad p = \overline{0, k-1}, \\ D_\xi^p (y-\xi)^{2k-1}(y,0) = (-1)^p \frac{(2k-1)!}{(2k-1-p)!} y^{2k-1-p}. \end{gathered} \tag{14}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F_0(y,\xi) = y^{2k-1}(1-\xi)^k P_0(\xi),$$

$$D_\xi^p F_0 = y^{2k-1} \sum_{j=0}^{p} \left((1-\xi)^k \right)^{(j)} P_0^{(p-j)}(\xi)\, C_p^j,$$

$$\left((1-\xi)^k \right)^{(j)} = (-1)^j \frac{k!}{(k-j)!} (1-\xi)^{k-j},$$

$$\left((1-\xi)^k \right)^{(j)}_{\xi=0} = (-1)^j \frac{k!}{(k-j)!},\ P_0^{(p-j)}(0) = (p-j)! a_{p-j}^0, \tag{15}$$

$$D_\xi^p F_0(y,0) = y^{2k-1} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{p!}{j!\,(p-j)!} \frac{k!}{(k-i)!} (p-j)! a_{p-i}^0 =$$

$$= y^{2k-1} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{p!k!}{j!\,(k-j)!} a_{p-j}^0 = y^{2k-1} p! \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_k^j a_{p-j}^0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях y в соотношениях (14) и (15), получим систему уравнений для нахождения коэффициентов a_j^0, $j = \overline{0, n-1}$:

$$a_0^0 C_k^0 = 1,$$

$$(-1)^1 a_0^0 C_k^1 + (-1)^0 a_1^0 C_k^0 = 0,$$

$$(-1)^2 a_0^0 C_k^2 + (-1)^1 a_1^0 C_k^1 + (-1)^0 a_2^0 C_k^0 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-1)^{k-1} a_0^0 C_k^{k-1} + (-1)^{k-2} a_1^0 C_k^{k-2} + \ldots + (-1)^0 a_{k-1}^0 C_k^0 = 0,$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Используя формулу из [11]

$$C_n^0 C_{n+k-1}^k - C_n^1 C_{n+k-2}^{k-1} + \ldots + (-1)^k C_{n-1}^0 C_n^k = 0, \tag{16}$$

получаем решение системы в виде

$$a_j^0 = C_{k+j-1}^j.$$

Итак,

$$P_0(\xi) = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+j-1}^j \xi^j.$$

Аналогичным образом найдем другие неизвестные полиномы $P_i(\xi)$. Для этого введем обозначение

$$F_i(y,\xi) = y^{2k-1-i} (1-\xi)^k P_i(\xi)$$

и вычислим частные производные p-го порядка в точке $\xi = 0$:

$$D_\xi^p F_i\left(y,0\right) = y^{2k-1-i} p! \sum_{j=0}^{p-i} (-1)^j C_k^j a_{p-j}^i, \quad p = \overline{i, k-1}. \tag{17}$$

В тождестве (13) рассмотрим производные по ξ до $(k-1)$-го порядка включительно в точке $\xi = 0$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y. Учитывая (17), получаем следующую систему уравнений для определения коэффициентов полинома $P_i(\xi)$:

$$a_i^i = (-1)^i C_{2k-1}^i,$$

$$\sum_{j=0}^{p-i} (-1)^j C_k^j a_{p-j}^i = 0, \quad p = \overline{(i+1)\,, k-1}.$$

Используя формулу (16), имеем

$$a_{i+j}^i = (-1)^i C_{2k-1}^i C_{k-1+j}^j,$$

$$P_i\left(\xi\right) = (-1)^i C_{2k-1}^i \sum_{j=0}^{k-m-1} C_{k-1+j}^j \xi^{i+j}.$$

Итак, окончательно получаем

$$G_1\left(y,\xi\right) = (1-\xi)^k\, y^k \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^i C_{2k-1}^i C_{k-1+j}^j y^{k-i-1} \xi^{j+i},$$

$$G_2\left(y,\xi\right) = (1-y)^k\, \xi^k \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^i C_{2k-1}^i C_{k-1+j}^j \xi^{k-i-1} y^{j+i}.$$

Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** Для функции Грина задачи (5) справедливо соотношение

$$Y(y) = (-1)^k \lambda^{2n+1} \int_0^1 \xi^{-m} G\left(y,\xi\right) Y\left(\xi\right) d\xi,$$

или

$$y^{-\frac{m}{2}} Y(y) = (-1)^k \lambda^{2n+1} \int_0^1 (y\xi)^{-\frac{m}{2}}\, G\left(y,\xi\right) \left\{\xi^{-\frac{m}{2}} Y\left(\xi\right)\right\} d\xi.$$

Введем обозначения

$$Z(y) = y^{-\frac{m}{2}} Y(y), \qquad B\left(y,\xi\right) = (y\xi)^{-\frac{m}{2}}\, G\left(y,\xi\right).$$

Тогда получим интегральное уравнение с симметричным ядром

$$Z(y)=(-1)^k\lambda^{2n+1}\int\limits_0^1 B\,(y,\xi)\,Z\,(\xi)\,d\xi.$$

Из теории интегральных уравнений с симметричным ядром известно, что это уравнение имеет собственные значения. Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$y^{-\frac{m}{2}}\varphi(y)=\int\limits_0^1 B\,(y,\xi)\left(\xi^{\frac{m}{2}}\varphi^{(2k)}\,(\xi)\right)d\xi.$$

Применяя теорему Гильберта – Шмидта, получаем требуемый результат.

Теорема 4 доказана.

***Доказательство теоремы* 5.** Будем считать, что граничные функции $\varphi_i(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда

$$\varphi_i(y)=\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi_{i,j}Y_j(y),$$

где

$$\varphi_{i,j}=\int\limits_0^1\varphi_i(y)Y_j(y)y^{-m}dy.$$

Расположим собственные значения λ в порядке возрастания $0<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$. Характеристическое уравнение для (6) имеет вид

$$\mu_j^{2n+1}=(-1)^{n+1}\lambda_j^{2n+1}. \tag{18}$$

Для решения уравнения (18) рассмотрим 2 случая:

1. Пусть $n=2s+1$, тогда

$$\mu_{j,p}=\lambda_j(\alpha_p+i\beta_p),$$

где

$$\alpha_p=\cos\theta_p,\qquad \beta_p=\sin\theta_p,\qquad \theta_p=\frac{2\pi p}{4s+3},\qquad p=\overline{0,4s+2},\quad \theta_p\neq 0,\quad p\neq 0,$$

причем $\alpha_p>0$ при $p=\overline{0,s}$; $\overline{3s+3,4s+2}$, $\alpha_p<0$ при $p=\overline{s+1,3s+2}$.

Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$X_j(x)=a_{1,j}e^{\lambda_jx}+\sum_{p=1}^{s}e^{\lambda_j\alpha_px}\Big(b_{p,j}\cos\lambda_j\beta_px+b_{p+s,j}\sin\lambda_j\beta_px\Big)+$$

$$+\sum_{p=s+1}^{2s+1}e^{\lambda_j\alpha_px}\Big(c_{p,j}\cos\lambda_j\beta_px+c_{p+s+1,j}\sin\lambda_j\beta_px\Big).$$

Заметим, что в первом ряду все α_p положительны, а во втором — отрицательны. Имеем

$$D_x^iX_j(x)=\lambda_j^i\left(a_{1,j}e^{\lambda_jx}+\sum_{p=1}^{s}e^{\lambda_j\alpha_px}\Big(b_{p,j}\cos\left(\lambda_j\beta_px+i\theta_p\right)+b_{p+s,j}\sin\left(\lambda_j\beta_px+i\theta_p\right)\Big)+\right.$$

$$+\sum_{p=s+1}^{2s+1} e^{\lambda_j\alpha_p x}\Big(c_{p,j}\cos\left(\lambda_j\beta_p x+i\theta_p\right)+c_{p+s+1,j}\sin\left(\lambda_j\beta_p x+i\theta_p\right)\Big)\Bigg),\quad i=\overline{0,2s+1}.$$

Для определения неизвестных $a_{ij,p}$ получим систему уравнений

$$a_{1,j}+\sum_{p=1}^{s}\big(b_{p,j}\cos i\theta_p+b_{p+s,j}\sin i\theta_p\big)+$$

$$+\sum_{p=s+1}^{2s+1}\left(c_{p,i}\cos i\theta_p+c_{p+s+1,j}\sin i\theta_p\right)=\frac{\varphi_{i,j}}{\lambda_j^i},\quad i=\overline{0,2s+1},$$

$$\Bigg(a_{1,j}e^{\lambda_j}+\sum_{p=1}^{s} e^{\lambda_j\alpha_p}\Big(b_{p,j}\cos\left(\lambda_j\beta_p+i\theta_p\right)+b_{p+s,j}\sin\left(\lambda_j\beta_p+i\theta_p\right)\Big)+ \tag{19}$$

$$+\sum_{p=s+1}^{2s+1} e^{\lambda_j\alpha_p}\Big(c_{p,j}\cos\left(\lambda_j\beta_p+i\theta_p\right)+c_{p+s+1,j}\sin\left(\lambda_j\beta_p+i\theta_p\right)\Big)\Bigg)=\frac{\varphi_{i+2s+2,j}}{\lambda_j^i},\quad i=\overline{0,2s}.$$

Основная матрица системы (19) имеет вид

$$\Delta_{(4s+3)\times(4s+3)}=\begin{pmatrix} A_{(2s+2)\times(2s+1)} & B_{(2s+2)\times(2s+2)} \\ C_{(2s+1)\times(2s+1)} & D_{(2s+1)\times(2s+2)} \end{pmatrix},$$

где

$$A=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \ldots & \cos\theta_s & \sin\theta_1 & \ldots & \sin\theta_s \\ 1 & \cos 2\theta_1 & \ldots & \cos 2\theta_s & \sin 2\theta_1 & \ldots & \sin 2\theta_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \cos\left(2s+1\right)\theta_1 & \ldots & \cos\left(2s+1\right)\theta_s & \sin\left(2s+1\right)\theta_1 & \ldots & \sin\left(2s+1\right)\theta_s \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cos\theta_{s+1} & \ldots & \cos\theta_{2s+1} & \sin\theta_{s+1} & \ldots & \sin\theta_{2s+1} \\ \cos 2\theta_{s+1} & \ldots & \cos 2\theta_{2s+1} & \sin 2\theta_{s+1} & \ldots & \sin 2\theta_{2s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos\left(2s+1\right)\theta_{s+1} & \ldots & \cos\left(2s+1\right)\theta_{2s+1} & \sin\left(2s+1\right)\theta_{s+1} & \ldots & \sin\left(2s+1\right)\theta_{2s+1} \end{pmatrix},$$

$$C=\big(C_1 \quad C_2\big),$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & e^{\lambda_j \alpha_1} \cos \lambda_j \beta_1 & \dots & e^{\lambda_j \alpha_s} \cos \lambda_j \beta_s \\ e^{\lambda_j} & e^{\lambda_k \alpha_1} \cos(\lambda_j \beta_1 + \theta_1) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_s} \sin(\lambda_j \beta_s + \theta_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_j} & e^{\lambda_j \alpha_1} \cos(\lambda_j \beta_1 + 2s\theta_1) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_1} \cos(\lambda_j \beta_s + 2s\theta_s) \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_k \alpha_1} \sin \lambda_j \beta_1 & \dots & e^{\lambda_j \alpha_1} \sin \lambda_j \beta_s \\ e^{\lambda_k \alpha_1} \sin(\lambda_j \beta_1 + \theta_1) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_1} \sin(\lambda_j \beta_s + \theta_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_k \alpha_1} \sin(\lambda_j \beta_1 + 2s\theta_1) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_1} \sin(\lambda_j \beta_s + 2s\theta_s) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j \alpha_{s+1}} \cos \lambda_j \beta_{s+1} & \dots & e^{\lambda_j \alpha_{2s+1}} \cos \lambda_j \beta_{2s+1} \\ e^{\lambda_j \alpha_{s+1}} \cos(\lambda_j \beta_{s+1} + \theta_{s+1}) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_{2s+1}} \cos(\lambda_j \beta_{2s+1} + \theta_{2s+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_j \alpha_{s+1}} \cos(\lambda_j \beta_{s+1} + 2s\theta_{s+1}) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_{2s+1}} \cos(\lambda_j \beta_{2s+1} + 2s\theta_{2s+1}) \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j \alpha_{s+1}} \sin \lambda_j \beta_{s+1} & \dots & e^{\lambda_j \alpha_{2s+1}} \sin \lambda_j \beta_{2s+1} \\ e^{\lambda_j \alpha_{s+1}} \sin(\lambda_j \beta_{s+1} + \theta_{s+1}) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_{2s+1}} \sin(\lambda_j \beta_{2s+1} + \theta_{2s+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_j \alpha_{s+1}} \sin(\lambda_j \beta_{s+1} + 2s\theta_{s+1}) & \dots & e^{\lambda_j \alpha_{2s+1}} \sin(\lambda_j \beta_{2s+1} + 2s\theta_{2s+1}) \end{pmatrix}.$$

В силу единственности задачи детерминант системы (19) отличен от нуля. Найдем самую большую степень экспоненты при вычислении детерминанта Δ. Поскольку в матрице $C_{(2s+1)\times(2s+1)}$ у всех экспонент степени положительны, то, очевидно, самая большая степень экспоненты получается при вычислении произведения определителей

$$\left| C_{(2s+1)\times(2s+1)} \right| \left| B_{(2s+2)\times(2s+2)} \right|.$$

Вычислим каждый определитель в отдельности. Используя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, имеем

$$\det C = e^{\lambda_j \left(1 + 2\sum_{p=1}^{s} \alpha_p\right)} \left(\frac{i}{2}\right)^s \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\theta_1 i} & \dots & e^{\theta_s i} & e^{-\theta_1 i} & \dots & e^{-\theta_s i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{2s\theta_1 i} & \dots & e^{2s\theta_s i} & e^{-2s\theta_1 i} & \dots & e^{-2s\theta_s i} \end{vmatrix}.$$

Последний детерминант есть определитель Вандермонда, который вычисляется явно:

$$\det C = e^{\lambda_j \left(1 + 2\sum_{p=1}^{s} \alpha_p\right)} \left(\frac{i}{2}\right)^s \prod_{r=1}^{s} \left(e^{i\theta_r} - 1\right)\left(e^{-i\theta_r} - 1\right) \prod_{r>t} \left(e^{i\theta_r} - e^{i\theta_t}\right)\left(e^{-i\theta_r} - e^{-i\theta_t}\right) \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{s} \left(e^{-i\theta_r} - e^{i\theta_r}\right) \prod_{r \neq t} \left(e^{-i\theta_r} - e^{i\theta_t}\right)\left(e^{-i\theta_t} - e^{i\theta_r}\right).$$

Выполняя некоторые преобразования, получаем

$$\det C = 2^{2s} e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{p=1}^{s}\alpha_p\right)} \prod_{r=1}^{s} \sin\theta_r \prod_{r=1}^{s} \sin^2\frac{\theta_r}{2} \prod_{r>t} 4\sin^2\frac{\theta_r-\theta_t}{2} \prod_{r\neq t} (-4)\sin^2\frac{\theta_r+\theta_t}{2}. \tag{20}$$

Поскольку в выражении (20) каждый множитель отличен от нуля, то $\det C \neq 0$.

Теперь вычислим определитель матрицы $B_{(2s+2)\times(2s+2)}$. Опять используя формулу Эйлера, имеем

$$\det B = \left(\frac{i}{2}\right)^{s+1} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\theta_{s+1}} & \ldots & e^{i\theta_{2s+1}} & e^{-i\theta_{s+1}} & \ldots & e^{-i\theta_{2s+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{i\theta_{s+1}(2s+1)} & \ldots & e^{i\theta_{2s+1}(2s+1)} & e^{-i\theta_{s+1}(2s+1)} & \ldots & e^{-i\theta_{2s+1}(2s+1)} \end{vmatrix}.$$

Снова получили определитель Вандермонда

$$B = \left(\frac{i}{2}\right)^{s+1} \prod_{r=s+1}^{2s+1} \left(e^{-i\theta_r} - e^{i\theta_r}\right) \prod_{r>t} \left(e^{-i\theta_r} - e^{-i\theta_t}\right)\left(e^{i\theta_r} - e^{i\theta_t}\right) \prod_{r\neq t} \left(e^{-i\theta_r} - e^{i\theta_t}\right)\left(e^{-i\theta_t} - e^{i\theta_r}\right).$$

Выполнив некоторые преобразования, получим

$$\det B = \prod_{r=s+1}^{2s+1} \sin\theta_r \prod_{r>t} 4\sin^2\frac{\theta_r-\theta_t}{2} \prod_{r\neq t} (-4)\sin^2\frac{\theta_r+\theta_t}{2} \neq 0.$$

Итак,

$$\det\Delta = e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{p=1}^{s}\alpha_p\right)} N + f(\lambda_j), \tag{21}$$

где

$$N = 2^{2s} \prod_{r=1}^{2s+1} \sin\theta_r \prod_{r=1}^{s} \sin^2\frac{\theta_r}{2} \prod_{r>t\geq 1}^{2s+1} 4\sin^2\frac{\theta_r-\theta_t}{2} \prod_{\substack{r\neq t \\ r,t=1}}^{2s+1} (-4)\sin^2\frac{\theta_r+\theta_t}{2} \neq 0,$$

$$f(\lambda_j) = o\left(e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{p=1}^{s}\alpha_p\right)}\right), \quad \lambda_j \to +\infty.$$

Имеем следующую оценку:

$$\left|X_j(x)\right| \leq |a_{1,j}| e^{\lambda_j x} + \sum_{p=1}^{s} e^{\lambda_j \alpha_p x}\left(|b_{p,j}| + |b_{p+s,j}|\right) + \sum_{p=s+1}^{2s+1} \left(|c_{p,j}| + |c_{p+s+1,j}|\right).$$

Оценим теперь коэффициенты

$$|a_{1,j}| = \frac{\left|\det\Delta^1\right|}{|\det\Delta|}, \qquad |b_{p,j}| = \frac{\left|\det\Delta^{p+1}\right|}{|\det\Delta|}, \quad p = \overline{1,2s},$$

$$|c_{p,j}| = \frac{\left|\det\Delta^{p+s+1}\right|}{|\det\Delta|}, \quad p = \overline{s+1,3s+2},$$

где Δ^r — матрица, полученная из матрицы заменой r-й строки правой частью системы (19). По формуле Лапласа разложим $\det\Delta^r$ по ее r-й строке:

$$\det\Delta^r = \sum_{i=0}^{4s+2} \frac{\varphi_{i,j}}{\lambda_j^i}\Delta^r_{ri+1},$$

где Δ^r_{ri+1} — алгебраические дополнения. Отсюда получим оценки

$$|\det\Delta^1| \le K_1 e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{i=1}^s \alpha_i\right)-\lambda_j} \sum_{i=0}^{4s+2} |\varphi_{i,j}|,$$

$$|\det\Delta^{p+1}| \le K_{p+1} e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{i=1}^s \alpha_i\right)-\lambda_j\alpha_p} \sum_{i=0}^{4s+2} |\varphi_{,j}|, \quad p=\overline{1,s},$$

$$|\det\Delta^{p+s+1}| \le K_{p+s+1} e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{i=1}^s \alpha_i\right)-\lambda_j\alpha_p} \sum_{i=0}^{4s+2} |\varphi_{i,j}|, \quad p=\overline{1,s},$$

$$|\det\Delta^{p+s+1}| \le M_p e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{i=1}^s \alpha_i\right)} \sum_{i=0}^{4s+2} |\varphi_{i,j}|, \quad p=\overline{s+1,2s+1},$$

$$|\det\Delta^{p+2s+2}| \le M_{p+s+1} e^{\lambda_j\left(1+2\sum_{i=1}^s \alpha_i\right)} \sum_{i=0}^{4s+2} |\varphi_{i,j}|, \quad p=\overline{s+1,2s+1},$$

где $K_1,\ K_{p+1},\ K_{p+s+1},\ M_p,\ M_{p+s+1}$ — некоторые положительные постоянные. Учитывая последние пять оценок и (21), окончательно получаем основную оценку (7).

2. При $n=2s$ те же самые рассуждения и вычисления опять приведут нас к оценке (7).

Теорема 5 доказана.

***Доказательство теоремы* 6.** Покажем, что ряд (8) является решением поставленной задачи. Имеем

$$\big|u(x,y)\big| \le \sum_{j=0}^{\infty} \big|X_j(x)\big|\,\big|Y_j(y)\big| \le M\sum_{j=0}^{\infty}\left(|Y_j(y)|\sum_{s=0}^{2n}|\varphi_{sj}|\right). \tag{22}$$

Покажем сходимость каждого слагаемого в ряде (22). По неравенству Коши – Буняковского при $j=0$ (для остальных слагаемых вычисления аналогичны), получим

$$\sum_{j=0}^{\infty}|Y_j(y)|\,|\varphi_{0j}| \le \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{Y_j(y)}{\lambda_j^{2n+1}}\right)^2}\sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_j^{2n+1}\varphi_{0j}\right)^2},$$

$$\lambda_j^{2n+1}\varphi_{0j} = \lambda_j^{2n+1}\int_0^1 \varphi_0(y)Y_k(y)y^{-m}dy = (-1)^k\int_0^1 \varphi_0 Y_k^{(2k)}dy = (-1)^k\int_0^1\left(y^m\varphi_0^{(2k)}\right)y^{-m}Y_k dy.$$

Используя неравенство Бесселя, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_j^{2n+1}\varphi_{0j}\right)^2 \leq \int\limits_0^1 \left(\varphi_0^{(2k)}\right)^2 y^m dy < \infty, \tag{23}$$

а также

$$\frac{Y_j(y)}{\lambda^{2n+1}} = (-1)^k \int\limits_0^1 \xi^{-m} G\left(y,\xi\right) Y\left(\xi\right) d\xi.$$

По неравенству Бесселя получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{Y_j(y)}{\lambda_j^{2n+1}}\right) \leq \int\limits_0^1 G^2\left(y,\xi\right)\xi^{-m}d\xi < \infty. \tag{24}$$

Из (23), (24) следует равномерная сходимость (8).

Покажем теперь равномерную сходимость рядов, составленных из частных производных. Путем формального дифференцирования ряда (8) имеем

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}} = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(x) Y_j^{(2k)}(y) = (-1)^k y^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j^{2n+1}X_j(x)Y_j(y),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j^{2n+1}\left|X_j(x)\right|\left|Y_j(y)\right| \leq M\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_j^{2n+1}\left|Y_j(y)\right|\sum_{s=0}^{2n}\left|\varphi_{sj}\right|\right). \tag{25}$$

Покажем сходимость каждого слагаемого в ряде (25). По неравенству Коши – Буняковского получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_j^{2n+1}\left|Y_j(y)\right|\left|\varphi_{0j}\right|\right) \leq \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{Y_j(y)}{\lambda_j^{2n+1}}\right)^2}\sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_j^{2(2n+1)}\varphi_{0j}\right)^2}.$$

Сходимость первого множителя мы показали выше. Рассмотрим второй множитель

$$\lambda_j^{2(2n+1)}\varphi_{0j} = \lambda_j^{2(2n+1)}\int\limits_0^1 Y_j(y)\varphi_0(y)y^{-m}dy =$$

$$= (-1)^k\,\lambda_j^{2n+1}\int\limits_0^1 \varphi_0 Y_j^{(2k)}dy = (-1)^k\lambda_j^{2n+1}\int\limits_0^1 \varphi_0^{(2k)}Y_k dy =$$

$$= (-1)^k\lambda_j^{2n+1}\int\limits_0^1 \varphi_0^{(2k)}y^m Y_j y^{-m}dy = \int\limits_0^1 \varphi_0^{(2k)}y^m Y_j^{(2k)}dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\varphi_0^{(2k)}y^m\right)^{(2k)} y^m Y_j y^{-m}dy. \tag{26}$$

Последний переход в равенстве (26) мы пока будем считать законным. Далее, используя неравенство Бесселя, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_j^{2(2n+1)}\varphi_{0j}\right)^2 \leq \int\limits_0^1 \left[\left(\varphi_0^{(2k)}y^m\right)^{(2k)} y^{\frac{m}{2}}\right]^2 dy. \tag{27}$$

Поскольку $\varphi_0^{(i)}(y) = O\big(y^{\alpha-i}\big)$, $i = \overline{0,4k}$, где $\alpha > 4k - \dfrac{3m+1}{2}$, то интеграл (27) ограничен и, значит, ряд (25) сходится равномерно. Теперь вернемся к равенству (26). Если учесть, что $Y_j^{(2k)} = O\big(y^{k-m}\big)$ при $y \to +0$, то условия теоремы 5 обеспечивают законность последнего перехода в равенстве (26).

Теорема 6 доказана.

1. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. Note 1. – 1912. – **7(13)**. – P. 1 – 34; Note 2. – 1912. – **7(21)**. – P. 1 – 30; Note 3. – 1912 – 1913. – **8(23)**. – P. 1 – 51.
2. *Cattabriga L.* Una generalizationi del problema fundamentale di valori al contorno per eguationi paraboliche lincari // Ann. mat. pura ed appl. – 1958. – **46**. – P. 215 – 247.
3. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1961. – **31**. – P. 1 – 45.
4. *Абдиназаров С.* Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Ташкент, 1992. – 239 с.
5. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. техн. уни-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 18 – 26.
6. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 40 – 51.
7. *Апаков Ю. П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 1. – С. 3 – 13.
8. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – **12**, № 5. – С. 1265 – 1269.
9. *Диесперов В. Н., Ломакин Л. А.* Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 5. – С. 1244 – 1260.
10. *Засорин Ю. В.* Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений // Докл. АН СССР. – 1984. – **287**, № 6. – С. 1347 – 1351.
11. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

Получено 24.04.13