УДК 512.64

О. М. Клименко (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ГОЛОМОРФНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДО МІНІВЕРСАЛЬНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ВІДНОСНО *КОНГРУЕНТНОСТІ ІСНУЄ НЕ ЗАВЖДИ

In 1971, V. I. Arnold constructed miniversal deformations of square complex matrices under the similarity transformation. Similar miniversal deformations were constructed for matrices under congruence and under *congruence. For matrices under similarity and under congruence, the holomorphic transformations to their miniversal deformations always exist. We prove that this is not true for matrices under *congruence.

В. И. Арнольд в 1971 году построил миниверсальные деформации квадратных комплексных матриц относительно преобразований подобия. Аналогичные миниверсальные деформации были построены для матриц относительно конгруэнтности и относительно *конгруэнтности. Для матриц относительно подобия и относительно конгруэнтности всегда существуют голоморфные преобразования к их миниверсальным деформациям. В статье доказано, что это неверно для матриц относительно *конгруэнтности.

Зведення матриці до жорданової нормальної форми — нестійка операція: як жорданова форма, так і перетворення подібності залежать розривно від елементів початкової матриці. Тому якщо елементи матриці відомі лише приблизно, то зводити її до жорданової форми нерозумно. Також нерозумно зводити до жорданової форми матриці, які гладко залежать від параметрів, оскільки гладка залежність від параметрів втрачається.

З цих причин В. І. Арнольд [1] побудував мінiверсальні деформації матриць відносно перетворень подібності, тобто нормальну форму, до якої не тільки задана квадратна матриця A, але й всі близькі до неї матриці B можуть бути зведені перетвореннями подібності, що гладко залежать від елементів B. Ці мінiверсальні деформації також гладко залежать від елементів B. Мінiверсальні деформації також побудовані для в'язки матриць [2 – 4], матриць відносно конгруентності [5] і матриць відносно *конгруентності [6] (дві комплексні матриці A і B **конгруентні*, якщо $A = S^*BS$ для деякої невиродженої S). Для всіх матриць відносно подібності або конгруентності та для всіх в'язок матриць існують голоморфні перетворення до їх мінiверсальних деформацій. Ми доводимо, що не існують голоморфні перетворення до мінiверсальної деформації відносно *конгруентності навіть якщо обмежитись (1×1)-матрицями. Всі матриці, які ми розглядаємо, є комплексними.

Нехай $[a]$ — довільна ненульова (1×1)-матриця, $a = re^{i\varphi}$, $r > 0$. Тоді $[a]$ *конгруентна матриці $[b] := [e^{i\varphi}]$, яка є канонічною формою $[a]$ для *конгруентності. Всі матриці $[a + \varepsilon]$, які є достатньо близькими до $[a]$, можуть бути одночасно зведені деяким перетворенням

$$[s(\varepsilon)]^*[a+\varepsilon][s(\varepsilon)], \qquad s(\varepsilon) \quad \text{неперервне}, \qquad s(0) = \sqrt{r}, \tag{1}$$

до форми

$$[\varphi(\varepsilon)] = \begin{cases} [b + \alpha(\varepsilon)], & \text{якщо } a \notin \mathbb{R}, \\ [b + \alpha(\varepsilon)i], & \text{якщо } a \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{де} \quad \alpha(\varepsilon) \text{ — дійснозначна функція}, \tag{2}$$

яка є мінiверсальною деформацією $[a]$ відносно *конгруентності (див [6]).

Мета статті — довести, що комплексні функції $s(\varepsilon)$ і $\varphi(\varepsilon)$ в (1) і (2) не можуть бути голоморфними в нулі.

Нагадаємо, що якщо комплекснозначна функція $f(z)$ голоморфна в нулі, то вона голоморфна і в деякому околі U нуля і умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{3}$$

виконуються для всіх $x_0 + iy_0 \in U$, де $u(x, y)$ і $v(x, y)$ — дійсна та уявна частини $f(z)$:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Нехай $a = b$; для спрощення будемо вважати, що $b = 1$.

Теорема. *Якщо* $a = b = 1$, *то комплексні функції* $s(\varepsilon)$ *і* $\varphi(\varepsilon) = 1 + \alpha(\varepsilon)i$ *в* (1) *і* (2) *не є голоморфними в нулі.*

Запишемо ε у вигляді $\varepsilon = -1 + x + iy$, де $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в околі $(1, 0)$. Тоді $[a + \varepsilon] = [x + iy]$ зводиться деяким перетворенням (1) вигляду

$$[x + iy] \mapsto [|s(\varepsilon)|^2(x + iy)]$$

до мініверсальної деформації $[1 + \alpha(\varepsilon)i]$ з $\alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$. Отже, $|s(\varepsilon)|^2(x + iy) = 1 + \alpha(\varepsilon)i$ і тому

$$|s(\varepsilon)|^2 x = 1, \qquad |s(\varepsilon)|^2 y = \alpha(\varepsilon). \tag{4}$$

З цих рівностей випливає, що

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \alpha(\varepsilon)i = 1 + |s(\varepsilon)|^2 yi = 1 + \frac{y}{x} i.$$

Функція $\varphi(\varepsilon)$ має дійсну частину 1 і уявну частину y/x, вони не задовольняють (3), і тому $\varphi(\varepsilon)$ не є голоморфною.

Зауважимо, що голоморфність $[s(\varepsilon)]$ не гарантує голоморфності $[s(\varepsilon)]^*$, і тому неголоморфність $\varphi(\varepsilon)$ не гарантує неголоморфності $s(\varepsilon)$.

Запишемо першу рівність із (4) у вигляді

$$u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = \frac{1}{x}, \tag{5}$$

де $u(x, y)$ і $v(x, y)$ — дійсна та уявна частини $s(\varepsilon)$.

Функція $s(\varepsilon)$ не може бути голоморфною в 0 за наступною лемою.

Лема. *Не існують дійсні функції* $u(x, y)$ *і* $v(x, y)$ *в околі* $(1, 0)$ *такі, що* (5) *виконується та* $u(x, y) + iv(x, y)$ *є голоморфною.*

Доведення проведемо від супротивного. Нехай такі $u(x, y)$ та $v(x, y)$ існують. Тоді вони повинні задовольняти умови Коші – Рімана

$$u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x\,. \tag{6}$$

За рівністю (5)

$$uu'_x + vv'_x = -\frac{1}{2x^2}, \qquad uu'_y + vv'_y = 0\,. \tag{7}$$

Крок 1. Підставляючи (6) у друге рівняння з (7), одержуємо систему лінійних рівнянь відносно u'_x та v'_x:

$$\begin{aligned} uu'_x + vv'_x &= -\frac{1}{2x^2}, \\ -vu'_x + uv'_x &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Її визначником є (5). За правилом Крамера

$$u'_x = \frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2x^2} & v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{1/x} = -\frac{u}{2x}, \qquad v'_x = \frac{\begin{vmatrix} u & -\dfrac{1}{2x^2} \\ -v & 0 \end{vmatrix}}{1/x} = -\frac{v}{2x}\,. \tag{9}$$

З першого рівняння маємо $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u}{2x}$, тому $\dfrac{\partial u}{u} = -\dfrac{\partial x}{2x}$,

$$\ln u = -\frac{1}{2}\ln x + \ln C(y) = \ln x^{-\frac{1}{2}} C(y), \qquad u = C(y)x^{-\frac{1}{2}}\,.$$

З другого рівняння в (9) маємо $v = D(y)x^{-\frac{1}{2}}$. Таким чином, всі розв'язки системи (8) мають вигляд

$$u = \frac{C(y)}{\sqrt{x}}, \qquad v = \frac{D(y)}{\sqrt{x}} \tag{10}$$

(див. [7], глава IV).

Крок 2. Підставляючи (6) у перше рівняння з (7), отримуємо систему лінійних рівнянь відносно u'_y та v'_y:

$$\begin{aligned} vu'_y - uv'_y &= \frac{1}{2x^2}, \\ uu'_y + vv'_y &= 0. \end{aligned}$$

Її визначником є (5). За правилом Крамера

$$u'_y = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2x^2} & -u \\ 0 & v \end{vmatrix}}{1/x} = \frac{v}{2x}, \qquad v'_y = \frac{\begin{vmatrix} v & \dfrac{1}{2x^2} \\ u & 0 \end{vmatrix}}{1/x} = -\frac{u}{2x}\,.$$

Тоді

$$u''_{yy} = \frac{v'_y}{2x} = -\frac{u}{4x^2}, \qquad v''_{yy} = -\frac{u'_y}{2x} = -\frac{v}{4x^2}\,.$$

Загальними розв'язками рівнянь $u''_{yy} + \dfrac{1}{4x^2}u = 0$ та $v''_{yy} + \dfrac{1}{4x^2}v = 0$ є функції

$$u = A(x)\cos\frac{y}{2x} + B(x)\sin\frac{y}{2x}, \qquad v = A_1(x)\cos\frac{y}{2x} + B_1(x)\sin\frac{y}{2x}\,. \tag{11}$$

Згідно з (10) функції $u\sqrt{x}$ та $v\sqrt{x}$ не залежать від x, а згідно з (11) вони не залежать від x тільки якщо u та v тотожно дорівнюють 0, що суперечить (5).

Лему доведено.

1. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, № 2 (158). – С. 101 – 114.
2. *Edelman A., Elmroth E., Kågström B.* A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Pt I: Versal deformations // Siam J. Matrix Anal. and Appl. – 1997. – **18**. – P. 653 – 692.
3. *Garcia-Planas M. I., Sergeichuk V. V.* Simplest miniversal deformations of matrices, matrix pencils, and contragredient matrix pencils // Linear Algebra and Appl. – 1999. – **302 – 303**. – P. 45 – 61.
4. *Klimenko L., Sergeichuk V. V.* Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Appl. / Eds V. Olshevsky, E. Tyrtyshnikov. – New York: World Sci. Publ. Co., 2010. – P. 69 – 84.
5. *Dmytryshyn A. R., Futorny V., Sergeichuk V. V.* Miniversal deformations of matrices of bilinear forms // Linear Algebra and Appl. – 2012. – **436**. – P. 2670 – 2700.
6. *Dmytryshyn A. R., Futorny V., Sergeichuk V. V.* Miniversal deformations of matrices under *congruence and reducing transformations // arXiv:1105.2160. – 2013. – 36 p.
7. *Hartman P.* Ordinary differential equations. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964. – 628 p.

Одержано 07.10.13