УДК 517

М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАДАЧІ, ЩО ІНІЦІЮВАЛИ ВИНИКНЕННЯ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ, ТА ЙОГО РОЗВИТОК В УКРАЇНІ *

We present a brief survey of the development of functional analysis in Ukraine and the problems of infinite-dimensional analysis posed and solved for thousands of years, which laid the foundations for the initiation of this branch of mathematics.

Приведен краткий обзор развития функционального анализа в Украине и тех задач бесконечномерного анализа, которые появлялись и решались в течение тысячелетий, а также послужили животворной силой для возникновения этого раздела математики.

Вихід у світ (1932 р.) монографій С. Банаха „Théorie des Operations Linéaries" і М. Стоуна „Linear Transformations in a Hilbert Space and Applications to Analysis" засвідчив появу одного з основних розділів сучасної математики — нескінченновимірного (функціонального) аналізу, метою якого стало дослідження функцій $y = f(x)$, де, на відміну від класичного аналізу, принаймні одна з величин x або y змінюється у нескінченновимірному просторі. Проте варто зауважити, що задачі з нескінченновимірного аналізу виникали набагато раніше і розв'язувались упродовж тисячоліть багатьма математиками. Не перебільшуючи, можна сказати, що окремі, найвідоміші з них, послужили життєдайною силою для розвитку всієї математичної науки. Часто-густо для свого розв'язання вони потребували виходу за межі існуючої математики, створюючи нові її напрями. Ми зупинимося лише на задачах, що належать до двох напрямків: 1) знаходження екстремалей, за якими здійснюються реальні закони нашого буття; 2) встановлення гармонії між неперервним і дискретним у процесі розвитку науки. Крім того, наведемо короткий огляд розвитку функціонального аналізу в Україні.

1. Екстремальні задачі. Задачі, пов'язані з відшуканням найбільших і найменших значень величин, розглядались ще античними вченими. Однією з найвідоміших із них є класична ізопериметрична задача. Вона полягає у знаходженні серед замкнених кривих однакової довжини на площині тієї, що охоплює максимальну площу. Подібну задачу було поставлено і в тривимірному просторі. Про це згадує у своїх коментарях до праць Арістотеля (IV ст. н. е.) один із останніх представників афінської школи Платона Симпліцій (VI ст. н. е.): „Доведено ще до Арістотеля (бо він користується цим як відомим фактом), а згодом більш повно Архімедом і Зенодором, що серед ізопериметричних фігур найбільшу вмістимість має круг, а серед ізопіфанних — куля". Але самого доведення в античній літературі не знайдено. Можливо, у такій постановці задачі воно й не могло з'явитись. Доведення було здійснено лише у XIX ст. як аналітичними, так і геометричними методами. Очевидно, що ця задача належить до нескінченновимірного аналізу.

З поеми Вергілія „Енеїда", де описуються події VIII ст. до н. е., ми також дізнаємося про екстремальну задачу нескінченновимірного аналізу — задачу Дідони. Нагадаємо, що античними математиками розв'язано ще багато інших екстремальних задач, котрі виникали як безпосередньо у самій математиці, так і в прикладних питаннях, причому кожна з них розв'язувалась своїм оригінальним методом. Загального методу не існувало аж до XVII ст. Найвірогідніше, Й. Кеплер був першим, хто у своїй книзі „Нова стереометрія винних бочок" (1615 р.) заклав

* Виконано за підтримки спільного українсько-російського проекту НАН України і Російського фонду фундаментальних досліджень (проект № 01/01-12).

перші паростки інтегрального і диференціального числення і дав, разом з тим, перші загальні правила обчислення екстремалей, сформульовані П. Ферма (1629 р.) у вигляді точної теореми для випадку, коли $f(x)$ — многочлен. Згодом І. Ньютон і Г. Лейбніц розглянули загальний випадок, коли $f(x)$ є функцією однієї змінної.

Надзвичайно велику роль в історії екстремальних задач відіграла проблема знаходження кривої найшвидшого спуску, тобто кривої, уздовж якої тіло під дією сили тяжіння спускається з однієї точки в іншу за найкоротший проміжок часу (задача про брахістохрону). Ця задача була запропонована у 1696 р. Й. Бернуллі як виклик тодішнім математикам, зокрема старшому братові Я. Бернуллі, якого він прилюдно висміював за некомпетентність у математиці. Її розв'язок було дано самим Й. Бернуллі, а також Г. В. Лейбніцом, Я. Бернуллі та І. Ньютоном. Варто зазначити, що старший Бернуллі перевершив молодшого своєю оригінальністю. При цьому він привернув увагу до ніким не поміченого до нього факту, що задача відшукання серед усіх кривих, які проходять через дві задані точки, тої, що має властивість мінімальності або максимальності, є задачею нового типу і її розв'язання потребує нових методів. Наприклад, множина всіх вписаних у трикутник паралелограмів або множина всіх вписаних у кулю циліндрів залежить від одного параметра, а тому знаходження паралелограма, що обмежує найбільшу площу, у першому випадку (задача Евкліда) і циліндра найбільшого об'єму — у другому (задача Кеплера) зводиться до задачі на екстремум для функції однієї змінної. В задачі ж про брахістохрону множина кривих, серед яких шукається екстремальна, є нескінченновимірною, і вона зводиться до задачі на екстремум для функції нескінченної кількості змінних. Саме при розв'язанні цієї задачі було зроблено неочікуваний стрибок у теорії екстремальних задач — від функцій однієї змінної до функцій нескінченної кількості змінних. Після роботи Й. Бернуллі щодо брахістохрони виникло чимало інших подібних задач. Для кожної з них підбирався свій власний секретний ключ. У зв'язку з цим Й. Бернуллі запропонував своєму учневі Л. Ейлеру знайти загальний підхід до їх розв'язання.

У 1744 р. вийшла праця Л. Ейлера „Метод знаходження кривих ліній, що мають властивості максимуму та мінімуму, або розв'язок ізопериметричної задачі в найширшому її розумінні", в якій було закладено теоретичні основи нового розділу математики — варіаційного числення. В цій роботі уперше було розвинено загальний підхід до розв'язання цілої низки екстремальних задач із різних розділів природознавства і математики, за допомогою якого ці задачі зводились до відшукання максимуму або мінімуму функціонала вигляду

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

(f — фіксована функція трьох змінних), заданого на деякому (допустимому) класі функцій $y(x)$. Було показано, що екстремаль цього функціонала досягається на функції $y(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{2}$$

Розв'язок базувався на ідеї апроксимації екстремалі ламаними, уперше використаній Г. Лейбніцом при розв'язанні задачі про брахістохрону. Ця ідея застосовувалась ще античними геометрами, наприклад, для знаходження площ певних геометричних фігур. І хоча цей метод геометрично наочний, однак він є досить громіздким і не обґрунтований до кінця ще й понині.

На той час рівняння (2) всіх задовольняло, і це можна зрозуміти, якщо врахувати тодішню невизначеність основних понять математичного аналізу, в тому числі й поняття збіжності. Розв'язки деяких екстремальних задач, одержані раніше своїми власними способами, підтвердили правильність рівняння (2), адже функції, які доставляли екстремум, його задовольняли. Зауважимо, що застосування методу Ейлера до знаходження екстремалей функціонала (1) у випадку, коли $y(x)$ залежить від багатьох змінних, фактично ставало неможливим у рамках математичного аналізу тих часів.

У 1755 р. Л. Ейлер отримав листа від 19-річного Ж. Лагранжа, в якому останній пропонував аналітичний підхід до отримання рівняння (2). Він увів у вираз (1) малий параметр ε, тобто розглядав функцію

$$\widehat{F}(\varepsilon) = F(y(x) + \varepsilon\eta(x)),$$

де $y(x)$ — екстремаль функціонала (1), а $\eta(x)$ — довільна фіксована допустима функція, яка при $\varepsilon = 0$ досягає свого екстремального значення, а отже,

$$\frac{d\widehat{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Беручи до уваги, що $\eta(x)$ перебігає достатньо великий запас функцій, із (3) одержується (2).

Лист Ж. Лагранжа, де так просто і геніально виведено рівняння (2), викликав у Л. Ейлера ще більший потяг до дослідження екстремальних задач. Однак він не поспішав з публікацією своїх нових результатів і чекав доки той повністю не опублікує свої здобутки, аби не відібрати слави, на яку так заслуговував молодий Ж. Лагранж. І лише по тому, як у 1761 – 1762 рр. в „Туринських записках" був надрукований мемуар Ж. Лагранжа, Л. Ейлер опублікував свої результати з такою передмовою: „Після того, як я довго й безплідно працював над розв'язанням цього питання, я із задоволенням побачив, що в „Туринських записках" задачу розв'язано настільки ж легко, як і щасливо. Це прекрасне відкриття викликало у мене таке велике захоплення, бо воно значно відрізняється від розроблених мною методів і значно перевершує їх за простотою". У другому томі „Туринських записок" також міститься стаття Ж. Лагранжа „Застосування методу, викладеного у попередньому мемуарі, до розв'язування різних задач динаміки", в якій із використанням розробленої ним техніки варіаційного числення розв'язано чимало задач динаміки, зокрема гідродинаміки. За висловленням Ж. Фур'є, „він (Лагранж) зводить всі закони рівноваги й руху до одного принципу і підпорядковує їх одному й тому ж методу, винахідником якого він сам є". Так фактично, за допомогою варіаційного числення, Ж. Лагранж написав одну із своїх основних книг „Аналітична механіка" (1788 р.), в якій уніфікував механіку і, як сказав В. Гамільтон, „створив свого роду наукову поему". Варто зазначити, що запропонований там метод побудови механіки став універсальним методом, основним орієнтиром при побудові нових розділів науки, які вийшли далеко за межі самої механіки. Так, книга Ж. Лагранжа стала взірцем для Д. Максвелла при створенні ним аналітичної теорії електрики. Метод Лагранжа може бути застосований до обрахунку руху небесних тіл, обґрунтування руху електронів у атомі, а також багаточисельних задач техніки. Особливо ефективним засобом експансії ідей Ж. Лагранжа за межі механіки став принцип найменшої дії. За висловом М. Планка, „всі зворотні процеси, чи то механічні або електродинамічні, чи то термічного характеру — усі підкоряються одному й тому ж принципу — принципу найменшої дії".

Подальші праці А. Лежандра, К. Якобі, К. Вейєрштрасса, Г. Дарбу та ін. поповнили варіаційне числення новими результатами і розширили сферу його застосувань не лише у класичній механіці. Вагомий внесок у розвиток цієї галузі зробив М. Остроградський своєю фундаментальною працею „Мемуар про обчислення варіації кратних інтегралів”, представленою Петербурзькій академії у 1834 р., яка відразу опинилася в центрі уваги математиків. У 1836 р. її було перевидано відомим журналом Крелля „Journal für reine und angewandte Mathematik”, а її англійський переклад повністю увійшов до „Історії варіаційного числення упродовж XIX століття” Тотгентера (1861 р.). Саме там було викладено результати, основоположні для інтегрального числення функцій багатьох змінних. Вони вже давно стали класичними і ще й понині є одним із основних робочих інструментів в теорії рівнянь з частинними похідними. Насамперед це стосується формули інтегрування частинами у випадку довільної кратності інтеграла, правила розміщення меж інтегрування по кожній змінній при переході від кратного інтеграла до повторного, способу знаходження похідної по параметру від багатовимірного об’ємного інтеграла зі змінною межею інтегрування, яка разом з підінтегральною функцією залежить від цього параметра. Одночасно з К. Якобі в мемуарі вперше було введено функціональні визначники (якобіани). Розроблені М. Остроградським основи інтегрального числення дали йому змогу остаточно розв’язати проблему обчислення варіації n-кратного інтеграла зі змінними межами інтегрування (у випадку $n = 2$ розв’язана Л. Ейлером і С. Пуассоном, а при $n = 3$ — Ж. Лагранжем). Нагадаємо також, що основні праці Г. Вороного з теорії чисел пов’язані з відшуканням мінімуму квадратичних форм, незалежні змінні яких перебігають певну множину цілих чисел.

Таким чином, у другій половині XIX ст. варіаційне числення — це розділ математики, украй наповнений різноманітними, але не завжди строго обґрунтованими результатами і методами. Взагалі кажучи, важко знайти якийсь інший розділ науки, історія якого знає стільки помилок, скільки їх було зроблено у варіаційному численні. Так, достатні умови екстремуму у А. Лежандра та Ж. Лагранжа виявились помилковими. В цьому й полягають причини глибоких тріщин, яких зазнав у кінці XIX ст. зазначений розділ, особливо в тих його місцях, котрі стосуються застосувань до питань існування розв’язків основних крайових задач для рівнянь математичної фізики. Найгучніший резонанс викликали роботи Б. Рімана з теорії функцій комплексної змінної, а якщо сказати точніше, то вони спричинили глибоку кризу тривалістю близько 50-ти років. На ній ми і зупинимось більш детально.

У своїй докторській дисертації „Основи теорії функцій комплексної змінної” (1851 р.) Б. Ріман показав, що в однозв’язній області $\mathcal{D}$ є одна і тільки одна неперервна аж до межі функція u із заданим граничним значенням f, яка всередині області задовольняє рівняння Лапласа (гармонічна функція). В процесі доведення було використано варіаційний принцип, а саме, розглядався інтеграл

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy, \tag{4}$$

де на функцію u накладались такі умови: 1) u є неперервною в $\overline{\mathcal{D}}$ і набуває на межі $\mathcal{D}$ значення f; 2) інтеграл (4) існує (u — допустима функція). Оскільки для таких функцій зазначений інтеграл є невід’ємним, то існує нижня межа його значень. Б. Ріман вважав, що ця нижня межа досягається на деякій допустимій функції $\widetilde{u}(x, y)$, яка і є гармонічною. У подальшому він активно користувався цим методом, названим ним принципом Діріхле: „Допустима функція є гармонічною тоді і тільки тоді, коли вона реалізує мінімум інтеграла (4)”. З цим принципом Б. Ріман ознайомився на лекціях П. Діріхле, хоча він був відомий ще К. Гауссу, Д. Гріну, В. Томсону (лорду Кельвіну), котрі застосовували його при розв'язанні конкретних фізичних задач. Варто зауважити, що принцип Діріхле приховує небезпечні підводні камені, які не так вже й просто відразу помітити. Адже на відміну від скінченновимірного випадку мінімум функціонала (неперервної функції), заданого на обмеженій замкненій множині у нескінченновимірному просторі, не завжди досягається. Але Б. Ріман і далі використовував цей принцип. Особливо це стосується його мемуару „Теорія абелевих функцій" (1857 р.), де продовжується тема його дисертації. Робота ця містить так багато нових блискучих і непередбачуваних ідей, що була сприйнята математиками тих часів як справжнє „одкровення". Так, К. Вейєрштрасс — головний конкурент Б. Рімана в теорії абелевих функцій — був настільки приголомшений її результатами, що забрав свою роботу, присвячену теорії абелевих функцій, подану в Берлінську академію у 1857 р. Упродовж кількох років мемуар Б. Рімана котирувався як один із найзначніших внесків у математику. Проте невдовзі К. Вейєрштрасс вказав на серйозні прогалини в ньому, які поставили під загрозу основні результати Б. Рімана. Він на прикладах показав, що з варіаційного принципу ще не можна у загальній ситуації зробити висновок про існування екстремалі. Цей факт вимагав спеціального доведення, а Б. Ріман його не надав. Особисто ж Б. Ріман дотримувався іншої думки. Він цілком визнавав законність і справедливість критики К. Вейєрштрасса, проте скористався принципом Діріхле як зручним інструментом, що виявився під руками. Він вважав також, що його теорема про існування алгебраїчної функції на рімановій поверхні все ж таки є правильною. К. Вейєрштрасс також був упевнений в цьому і тому запропонував своєму учневі Г. Шварцу знайти інше доведення. Критика К. Вейєрштрасса підірвала довіру до варіаційного числення майже на 50 років. Необхідність строгого обґрунтування одержаних вже результатів щодо розв'язності задачі Діріхле спричинила потяг багатьох тогочасних математиків до пошуку і розробки нових підходів до розв'язання крайових задач математичної фізики.

Першим порівняно строгим методом розв'язування задачі Діріхле був метод К. Неймана арифметичних середніх (60-ті рр. XIX ст.), завдяки якому ця задача була розв'язана для опуклих областей. До того самого часу відноситься і розвинений Г. Шварцом „альтернувальний метод", який дозволяє шляхом послідовного розв'язування задачі Діріхле для кожної з двох областей знайти її розв'язок і для їх суми.

У 1877 р. А. Пуанкаре запропонував „метод вимітання", за допомогою якого йому вдалося розв'язати задачу Діріхле для досить широкого класу областей. Праці К. Неймана, Г. Робена та А. Пуанкаре підготували ґрунт для створення методу граничних інтегральних рівнянь, застосованого невдовзі до крайових задач для рівняння Лапласа. Поява теорії інтегральних рівнянь Фредгольма (1900 р.) значно прискорила його розвиток (Ш. Валле Пуссен, О. Гельдер, Т. Карлеман, А. Ляпунов, В. Стєклов) і посприяла відкриттю доволі ефективного, а інколи й єдино можливого методу чисельного розв'язання задач математичної фізики для областей складної форми. Отже, на межі XIX та XX століть теорія крайових задач для рівнянь з частинними похідними досягла неабиякого успіху. Важко знайти приклад в історії математики XIX ст., коли б боротьба за строгість доведення приводила до таких плідних творчих результатів. Що ж стосується фізиків, то для них роботи Б. Рімана були цілком переконливими. Г. Гельмгольц дивувався, які ж такі складності могли відшукати у Б. Рімана спеціалісти-математики? Для нього виклад Б. Рімана був винятково зрозумілим.

А як відбувались події, пов'язані з принципом Діріхле? Ідея, котра так приваблювала багатьох учених, довго чекала на своє втілення в життя. Нарешті, Ч. Арцела (1896 р.) і Д. Гільберт (1897 р.) незалежно один від одного обґрунтували варіаційний принцип розв'язання задачі

Діріхле, базуючись на побудові компактних мінімізуючих послідовностей. Щоправда, як зауважив Ж. Адамар, істотний недолік їхнього обґрунтування полягав у відсутності доведення існування принаймні однієї допустимої функції. І Д. Гільберт добре це усвідомлював, а тому через 6 років повернувся до принципу Діріхле і дав його нове доведення. Варто зазначити, що роботи Д. Гільберта з варіаційного числення належать до його найглибших і найвидатніших результатів. Доведення існування допустимої функції було не тільки значно спрощено, але й узагальнено зусиллями багатьох математиків, після чого набуло конструктивного характеру. Так, В. Рітц у 1908 р. розвинув зручний для застосувань наближений метод розв'язання варіаційних задач (метод Рітца) і обґрунтував можливість його застосування до конкретних задач математичної фізики, викликавши тим самим підвищений інтерес представників прикладних наук. Як приклад наведемо висловлювання С. Тимошенка з його монографії „Історія науки опору матеріалів": „Найімовірніше, жоден інший математичний метод не спромігся так широко розгорнути наукові дослідження з опору матеріалів і теорії пружності, як цей метод". Зауважимо також, що метод Рітца відіграв важливу роль у розвитку прямих методів розв'язування варіаційних задач і заклав фундамент для багатьох досліджень у математичному аналізі, математичній фізиці, механіці. Активну участь у цих дослідженнях взяли українські математики М. Крилов, М. Боголюбов, М. Кравчук, Н. Польський, А. Мартинюк, В. Петришин, А. Лучка та ін.

Відмітимо також виникнення у зв'язку з принципом Діріхле нового розділу в теорії крайових задач для диференціальних рівнянь. Як видно з викладеного вище, вихідним пунктом доведення цього принципу було твердження про можливість продовження граничної функції на всю область так, щоб інтеграл Діріхле (4) для продовження збігався. Постає питання: а чи будь-яка неперервна функція має цю властивість? У 1906 р. Ж. Адамар дав негативну відповідь на це питання. Він навів приклад функції, гармонічної всередині одиничного круга і неперервної на його замиканні, для якої інтеграл (4) дорівнює нескінченності. Відомо, що задачу Діріхле для неперервної на колі функції розв'язав ще С. Пуассон, проте не завжди можна довести існування цього розв'язку за допомогою принципу Діріхле. Інший приклад був наведений Ф. Прімом у 1871 р., але помічений математиками лише в 1978 р. Виявилось, що збіжність інтеграла Діріхле накладає певну умову на поведінку функції на межі. Цей факт був усвідомлений повністю тільки в 50–60-х рр. XX ст., коли були введені простори функцій з „дробовою гладкістю", без яких неможливо уявити сучасну теорію крайових задач для рівнянь з частинними похідними.

Отже, в кінці XIX ст. варіаційне числення містило різноманітні результати і методи, але основний його недолік полягав у тому, що велика будівля не мала міцного фундаменту. При доведенні багатьох тверджень використовувався (часто-густо на віру) апарат скінченновимірного аналізу, в той час як самі задачі формулювались в сенсі аналізу функцій нескінченної кількості змінних, якого тоді ще не було. У цьому й криється причина тріщин, яких зазнало варіаційне числення того періоду, особливо там, де справа торкалась застосувань до математичної фізики. Усе це призвело до глибокої кризи в математиці кінця XIX — початку XX ст., подолання якої спричинило необхідність розробки основ нескінченновимірного аналізу.

2. Співвідношення між дискретним і неперервним. Із найдавніших часів розвиток природничих наук і математики відбувався під впливом, з одного боку, двох протилежних, а з іншого — тісно взаємопов'язаних тенденцій, суть яких можна коротко охарактеризувати за допомогою двох понять — дискретне і неперервне. Дискретне намагається описати природу і математику атомістично, в термінах індивідуально різних елементів і цілих чисел. Неперервне ж прагне осягнути такі явища, як рух, бо, як сказав Геракліт, „все тече”. Головна задача математики — встановити гармонію між цими поняттями і виключити незрозумілості з обох.

Першою науковою школою, яка запропонувала дискретний варіант „математичного плану” побудови Всесвіту, була школа піфагорійців. Основна теза їхнього вчення містилась у гаслі: „Всі речі — числа, і вони присутні в усіх діяннях і подумках людей, в усіх ремеслах і музиці”. З’ясувавши, що висота тону, виданого струною, залежить від її довжини і гармонійне звучання дають однаково натягнуті струни, довжини яких відносяться як цілі числа, піфагорійці звели музику до простих відношень цілих чисел і розробили знамениту музичну шкалу. Рух планет був так само зведений ними до числових відношень. Цей дискретний підхід продовжив засновник атомістичного вчення Демокріт: замість цілих чисел у нього фігурували геометричні атоми. Але дискретний підхід піфагорійців не дав змоги розв’язати чимало важливих математичних проблем, таких як, наприклад, проблема знаходження коренів рівнянь або сумірності відрізків, спричинивши тим самим застій у математиці того часу. Вихід був запропонований Евдоксом, котрий побудував теорію сумірних (дійсних) чисел, надавши їй геометричну інтерпретацію. В результаті вся математика, за винятком теорії чисел, перетворилась на геометрію, яка одночасно давала пояснення як дискретним, так і неперервним процесам. Проте, як ще й понині, грецькі вчені поділились на дві непримиренні групи. Основна з них пішла шляхом Евдокса і не визнавала праць ані Демокріта, ані його прихильників — навіть вилучила їх із бібліотек. І тільки Архімед зрозумів важливість обох підходів для розв’язання різних задач математики і природознавства.

Особливо великі суперечки розгорнулись у XVII ст. між математиками і фізиками щодо розповсюдження світла. Неперервний (хвильовий) підхід був розвинутий Х. Гюйгенсом і Р. Гуком. Але на той час їхня теорія ще не могла пояснити прямолінійність розповсюдження світла. І тоді І. Ньютон висунув свою (корпускулярну) теорію, не заперечуючи при цьому хвильової, і користувався нею при з’ясуванні багатьох явищ, що виникають в теорії світла. Фактично, так само, як і свого часу Архімед, він визнавав дуалізм цих підходів. Після І. Ньютона погляди на природу світла постійно змінювались аж до початку XX ст. Так, у XVII ст. Л. Ейлер захищав хвильову теорію, а П. Лаплас — корпускулярну. На початку XX ст. дуалізм Ньютона був підтверджений у певному сенсі квантовою хвильовою механікою. Математичне ж обґрунтування йому могла дати теорія розвинення функцій у степеневі ряди, яку так широко застосовував І. Ньютон і на основі якої отримав цілу низку нових важливих результатів; за висловленням Г. Лейбніца „ці здобутки перевищували все, що було зроблено в математиці до нього”. На превеликий жаль, тодішня математика не була спроможною підтвердити або заперечити можливість такого розвинення — це стало можливим значно пізніше. Серйозна дискусія щодо зображення функцій рядами (тригонометричними) розпочалась у середині XVIII ст. і тривала до початку XX. В ній взяли участь видатні математики того часу. Важко переоцінити її вплив на розвиток як класичного математичного, так і функціонального аналізу. На ній ми коротко й зупинимось.

Ідея розвинення довільної функції в тригонометричний ряд виникла у зв’язку зі спробами описати розв’язки рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l < \infty. \tag{5}$$

За це завдання взялися такі визначні математики, як Ж. Даламбер, Л. Ейлер, Д. Бернуллі. Ж. Даламбер (1749 р.) і Л. Ейлер (1749 р.) методом характеристик показали, що загальний розв’язок рівняння (5) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

де φ і ψ — функції, що задовольняють деякі умови гладкості; вони визначаються заданням крайових і початкових умов. Виходячи з досліджень Б. Тейлора (1713 р.) та власних спостережень, Д. Бернуллі (1753 р.) дійшов висновку, що закріплена в точках 0 і l струна коливається за законом

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x \cos\frac{n\pi a}{l}(t-\beta_n). \tag{6}$$

Отже, саме формула (6) дає загальний вигляд розв'язку рівняння (5), що задовольняє умову

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{7}$$

Оскільки початкова форма струни ($t=0$) може задаватися будь-якою функцією $f(x)\colon f(0) = f(l) = 0$, то зображення (6) обумовлює розклад

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad x \in [0,l], \tag{8}$$

для довільної функції $f(x)$ із зазначеною властивістю. Заперечення останнього факту Ж. Даламбером і Л. Ейлером (хоча кожен з них розумів функцію по-своєму) і відсутність у Д. Бернуллі формул для обчислення коефіцієнтів b_n в (8) призвели до повного забуття цього геніального відкриття на більш ніж 50 років.

Д. Бернуллі ж був глибоко переконаний, що запропонований ним спосіб розв'язання задачі (5), (7) через розклад (6), відомий нині як принцип суперпозиції хвиль, є природнішим і простішим, ніж метод Ейлера і Даламбера. В одному з листів він писав з цього приводу: „Не для таких абстрактних питань моя теорія може бути корисною. Я більше дивуюся скарбові, що був прихований, а саме, можливості звести існуючі в природі і, як нам здається, не підпорядковані жодному законові рухи до простих ізохронних, якими природа користується в більшості своїх дій.” Зауважимо, що згаданий вище метод Даламбера – Ейлера відшукання розв'язку (5), що задовольняє задану початкову умову, давав розв'язок задачі в замкненій у певному розумінні формі, проте коло задач, до яких цей метод застосовний, є досить обмеженим. Тому Д. Бернуллі мав рацію, коли підкреслював широкі можливості застосування свого підходу. Це підтвердилось значно пізніше, через 50 років, коли в 1807 р. Ж. Фур'є перевідкрив принцип суперпозиції хвиль і подав до Паризької академії наук статтю про поширення тепла всередині твердого тіла.

Стрижнем роботи Ж. Фур'є є твердження про можливість зображення довільної (графічно заданої) функції $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{9}$$

де коефіцієнти a_k і b_k ряду визначаються формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Як приклад було розглянуто функцію $f(x)$ — ординату ламаної від абсциси x — і описано ряд, який для кожного x давав значення $f(x)$. За свідченням Б. Рімана (див. Б. Риман, Сочинения. – Москва; Ленинград, 1948. – 230 с.), для маститого Ж. Лагранжа це було настільки несподіваним, що він відразу ж виступив з різким запереченням цього факту. Адже він сам довго думав над обґрунтуванням зображення (8). І хоча йому не поталанило в цьому питанні, в 1779 р. він уперше висунув ідею апроксимації розв'язку лінійного рівняння з частинними похідними розв'язками скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, замінюючи неперервний розподіл мас у струні скінченною множиною матеріальних точок (так званий метод скінченних різниць).

Незважаючи на критику з боку першого математика Франції (Ж. Лагранжа), робота Ж. Фур'є справила вражаючий ефект на весь математичний світ. Паризька академія з цього приводу оголосила математичне обґрунтування теорії поширення тепла темою, гідною великої премії 1812 року в галузі математики. В кінці 1811 р. Ж. Фур'є подав на здобуття цієї премії свій „Memoire sur la propagation de la chaleur". Після обговорення роботи поважними математиками (Ж. Лагранжем, П. Лапласом, А. Лежандром та ін.) його було удостоєно великої нагороди. І хоча сама робота була опублікована лише в 1826 р., всі її результати увійшли в його класичну монографію „Theorie analytique de la chaleur" 1822 р. Ця книга відіграла надзвичайно велику роль не лише в математичній фізиці. Вона поставила на порядок денний низку нових кардинальних проблем у самій математиці, які виходили далеко за її тодішні рамки, оскільки зображення (9) означає на математичній мові не що інше, як можливість співіснування хвильової і корпускулярної теорій світла, так само, як і інших наукових теорій в одночасній неперервній і дискретній їх інтерпретації. Услід за Ж. Фур'є П. Лаплас і С. Пуассон розглянули задачі поширення тепла в сфері та циліндрі, що привело їх до розвинення довільної функції в ряд за сферичними та, відповідно, циліндричними функціями (ортогональність перших встановив П. Лаплас, а других — С. Пуассон).

Розвинення функцій в тригонометричні ряди було однією з центральних проблем математики XIX століття. Воно спричинило виникнення таких важливих її понять, як функція, множина, інтеграл, міра, функціональний простір, різноманітні види збіжності функціональних рядів тощо. Важко назвати математика першої половини цього століття, спеціаліста в галузі математичного аналізу або математичної фізики, роботи якого не були б пов'язані з цією проблемою. Серед великої кількості таких робіт 20 – 30-х років насамперед слід відзначити праці П. Діріхле та М. Остроградського. Вони виходили в світ майже одночасно. Якщо П. Діріхле для кусково-неперервних функцій на сегменті $[0, 2\pi]$ зі скінченною кількістю максимумів і мінімумів на цьому проміжку дав у них уперше строге доведення зображення (9) у розумінні поточкової збіжності ряду, то М. Остроградський у своїй праці „Замітки до теорії тепла", виданій Петербурзькою академією наук (1828 р.), розглядав задачу про розклад за власними функціями оператора L, породженого виразом Лапласа $\left(\Delta = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$ в довільній обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^3$ та третьою крайовою умовою на границі ∂G, тобто задачу

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in G,$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + h(x)u(x) = 0, \quad x \in \partial G.$$

Принциповим моментом роботи є висунута в ній гіпотеза про існування нетривіального розв'язку $u_i(x)$ цієї задачі лише для дискретної множини $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ параметра λ і можливість зображення довільної функції $f(x)$ у вигляді ряду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \frac{\displaystyle\int_G f(x) u_i(x)\, dx}{\displaystyle\int_G u_i^2(x)\, dx},$$

який завжди збігається всередині області. Так, він пише, що довести це дуже важко, але довести можна.

Зазначимо, що дискретність множини власних значень наведеної задачі була доведена А. Пуанкаре лише в 1894 р. Що стосується збіжності ряду, то її доведення було здійснене в XX столітті. Сам же М. Остроградський намагався довести цей факт в одновимірному випадку, а саме, обґрунтувати зображення періодичної функції $f(x)$ у вигляді тригонометричного ряду. І якщо результати П. Діріхле щодо зображення функцій тригонометричними рядами стали класичними, а їх зразковий виклад міститься у майже кожному підручнику з математичного аналізу, то названа вище праця М. Остроградського була програмою розвитку цієї науки упродовж двох століть.

Не маючи можливості докладно розглянути подальші дослідження з проблем зображення функцій тригонометричними рядами математиків XIX ст. (С. Пуассона, О. Коші, Е. Дірксена, М. Лобачевського, Ф. Бесселя, Д. Стокса, Р. Ліпшиця, А. Гарнака, К. Жордана та ін.), котрі своїми працями внесли істотний вклад у математичний аналіз, зупинимося коротко лише на деяких результатах Г. Рімана, що стосуються зазначеної тематики і склали цілу епоху в розвитку цього розділу. Ці результати були подані ним у 1853 р. філософському факультетові Геттінгенського університету як habilitationschrift на право читати лекції, але опубліковані в 1866 р., вже по його смерті. Вони містять багато нових фактів, що відносяться до чистого аналізу, а з іншого боку, в них значно розширюється сфера застосувань тригонометричних рядів. На відміну від попередників, які шукали умови на функцію, достатні для того, щоб її можна було зобразити рядом Фур'є, Г. Ріман поставив перед собою задачу вивчення властивостей функцій, зображених тригонометричним рядом з прямуючими до нуля коефіцієнтами, а також знаходження необхідних і достатніх умов для того, щоб функцію можна було розкласти в такий ряд. Ці умови Г. Ріман формулює в термінах функції $F(x)$, одержаної формальним почленним двократним інтегруванням вихідного ряду. Ідея його доведення згодом послужила базисом при побудові теорії узагальнених функцій. Варто зауважити, що в той час тільки розпочинались серйозні дослідження з основ аналізу (теорій інтегрування і збіжності), а такого, наприклад, поняття, як рівномірна збіжність, взагалі не існувало. Г. Ріман практично склав програму розвитку математичного аналізу на 50 років. Як і в роботах з теорії функцій, він пропонує розглядати не кожну окремо взяту функцію, а клас функцій — функціональний простір, що виникає при розв'язанні конкретних задач певного типу.

У 1829 р. П. Діріхле висловив переконання, що будь-яку неперервну періодичну функцію можна зобразити поточково збіжним тригонометричним рядом. Над доведенням цього твердження працювало чимало математиків, у тому числі й Г. Ріман. Проте в 1873 р. Дюбуа Реймон побудував приклад такої функції, ряд Фур'є якої розбігається в заданій точці. Це був один із найвизначніших і найнеочікуваніших результатів, що призупинив у деякій мірі впритул до початку XX ст. потяг до розвинення функцій у тригонометричні ряди. І лише Л. Фейєр у роботах 1900 – 1904 рр. знову привернув увагу математиків до тригонометричних рядів Фур'є, показавши, що кожна неперервна 2π-періодична функція може бути представлена як рівномірна границя середніх арифметичних частинних сум її ряду Фур'є. До Л. Фейєра фраза „функція зображується рядом" мала на увазі поточкову збіжність ряду до цієї функції. Л. Фейєр відкинув цю майже 100-річну традицію і слову „зображується" надав дещо ширшого сенсу, після чого відкрились нові перспективи розвитку теорії збіжності тригонометричних рядів та її застосувань. І тут вирішальну роль відіграла теорія інтеграла Лебега, завдяки якій стало можливим ввести простори $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, довести їх повноту і встановити за допомогою зображення (9) ізометричний ізоморфізм між $L_2(0, 2\pi)$ та l_2. Збіжність ряду (9) вже розуміється в сенсі метрики простору $L_2(0, 2\pi)$. Усвідомлення того факту, що формула (9) є не що інше, як аналог розкладу вектора з простору $\mathbb{R}^3$ за ортонормованим базисом, в якому роль вектора відіграє функція з $L_2(0, 2\pi)$, роль ортонормованого базису відіграють функції $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а рівність Парсеваля — це теорема Піфагора, і строга математична аргументація його мали епохальне значення для подальшого розвитку всього природознавства. Адже після цього стає зрозумілим, що кожна фізична теорія може мати одночасно дві версії — неперервну і дискретну. Тим самим було усунено ряд суперечностей у фізичних теоріях, висвітлених лише в одному варіанті (хвильова або корпускулярна теорія світла, хвильова або матрична квантова механіка і т. ін.). Що ж до самої математики, то вона отримала серйозний поштовх для з'ясування низки аналогій між різними розділами класичного аналізу, геометрії і алгебри, таких, наприклад, як лінійні диференціальні оператори в аналізі і многочлени в алгебрі, теорія інтегральних рівнянь (Фредгольма, Гільберта) і теорія лінійних систем алгебраїчних рівнянь, розклад за власними функціями диференціальних операторів і зведення поверхонь другого порядку до канонічної форми. Враховуючи ці аналогії, математики почали створювати загальні концепції, які дозволили б охопити з єдиної точки зору паралельні побудови в різних областях науки і виявити істотні розбіжності, існуючі між аналізами функцій скінченної і нескінченної кількості змінних. У математичних центрах Європи у зв'язку з цим виникають математичні семінари, які поставили собі за мету створити галузь математики, здатну дати загальний підхід до різноманітних проблем класичної математики на основі нескінченновимірного аналізу. До математиків приєднались і фізики з їхньою далекосяжною інтуїцією, сміливістю, передбаченням. Коли механіки або фізики того періоду при вивченні якихось явищ використовували лінійні диференціальні рівняння, вони були глибоко переконані, що насправді рівняння мають бути нелінійними, а їхні дослідження є дослідженнями лише в першому наближенні. І раптом нова квантова механіка заявила про природну закономірність лінійності операторів, що діють у нескінченновимірному просторі і описують явища мікросвіту, а отже, настав час для формування нового розділу математики, а саме, функціонального аналізу. Виняткова роль у його створенні й подальшому розвитку належить математикам, котрі працювали на теренах України.

3. Розвиток нескінченновимірного аналізу в Україні. У 1922 р. до Львівського університету запрошують С. Банаха, неординарного вченого, лекторський талант і манера поведінки (простота, доступність) якого привернули до нього багато здібної молоді. Завдяки С. Банаху і його учителю Г. Штейнгаузу у Львові сформувався відомий всьому математичному загалу колектив — Львівська математична школа, головною метою якої був розвиток основ теорії функцій нескінченної кількості змінних. С. Банах і Г. Штейнгауз заснували журнал „Studia Mathematica", завдання якого полягало в публікації досліджень у цьому напрямі. Це дало змогу львівським математикам пропагувати свої здобутки в галузі функціонального аналізу та його застосувань. Серед представників Львівської школи окрім Банаха слід згадати Ю. Шаудера, а також учнів Банаха В. Орліча, С. Мазура та С. Улама.

Внесок С. Банаха та його школи у створення і розвиток функціонального аналізу не можна назвати інакше, як фундаментальний. Тут, насамперед, варто відзначити три основні принципи сучасного аналізу: продовження лінійного функціонала, рівномірної збіжності та відкритих відображень (теорема Банаха про обернений оператор). На них, як на фундаменті, тримається сьогодні весь функціональний аналіз. Вони є невід'ємною частиною будь-якого підручника з цього предмета. Введені С. Банахом в усій їх загальності поняття спряженого простору і спряженого оператора, а також і його теорія двоїстості в категорії лінійних просторів — незамінні інструменти при побудові таких, наприклад, розділів, як теорія узагальнених функцій або гармонічний аналіз. Книга С. Банаха „Теорія лінійних операцій", видана польською (1931 р.), французькою (1932 р.), українською (1948 р.), англійською (1987 р.) та російською (2001 р.) мовами, в якій функціональний аналіз уперше постав як окрема красива дисципліна з її різноманітними застосуваннями, увійшла в математичну класику, ставши невичерпним джерелом нових математичних ідей. Вона дуже швидко завоювала численних прихильників зазначеного нового напряму в усьому світі і відіграла велику роль у створенні знаменитих шкіл з функціонального аналізу в СРСР, США та інших країнах. Її вплив підсилювався ще й тим, що термінологія Банаха і позначення відразу стали повсюдно визнаними і загальновживаними.

Великих успіхів досягла школа С. Банаха і в розвитку нелінійного аналізу. Тут, насамперед, варто згадати основоположні результати С. Банаха та Ю. Шаудера щодо принципу нерухомої точки та його застосувань до нелінійних диференціальних рівнянь, а також щодо поліноміальних симетричних операторів.

Перші значні результати з функціонального аналізу у Києві одержали в 1935 – 1937 рр. М. Боголюбов і М. Крилов. Вони стосувались існування інваріантних мір у динамічних систем та вивчення їх сукупності і відіграли важливу роль у розвитку загальної теорії динамічних систем, формуванні нових геометричних підходів до розв'язання різних типів задач. Неабияким поштовхом до його розвитку послужили також роботи М. Кравчука з лінійної алгебри. У 30-ті рр. в області функціонального аналізу розпочав свої дослідження М. Крейн, котрий вніс фундаментальний вклад у його розвиток і заснував знамениту одеську школу з функціонального аналізу. Під впливом названих математиків проблемами цієї нової області почали займатися у Києві, Харкові, Одесі, Львові, Чернівцях.

Під час першої фази своїх досліджень (1935 – 1948 рр.) М. Крейн отримав результати першорядного значення (деякі у співавторстві з А. Рутманом, С. Крейном, Д. Мільманом, В. Шмульяном) з геометрії нормованих просторів і операторів у них (банахові простори з конусом, опуклі множини і слабкі топології в банахових просторах), які здобули світове визнання; сьогодні чимало з них містяться в усіх стандартних посібниках з функціонального аналізу. Подальші глибокі дослідження у цьому напрямку містяться в роботах М. Кадеця, В. Мільмана, В. Гурарія (Харків) та А. Плічка (Львів). М. Крейн також описав усі напівобмежені самоспряжені розширення напівобмеженого щільно заданого ермітового оператора (випадок операторів з нещільною областю визначення розглянуто М. Красносєльським) і дав конструктивний опис узагальнених резольвент ермітового оператора з рівними дефектними числами (формула Крейна узагальнених резольвент). Серед таких операторів було виділено клас так званих цілих операторів, до якого, зокрема, входять оператори, що фігурують у таких класичних задачах, як проблема моментів і проблема продовження додатно визначених функцій, проблема Неванлінни – Піка тощо. Завдяки розвинутій М. Крейном теорії цілих операторів йому вдалося знайти єдиний операторний підхід до розв'язання зазначених проблем та їх операторних узагальнень. Вона також привела до постановки і успішного розв'язання нових оригінальних задач в теорії аналітичних функцій. Теорія цілих операторів з нескінченним індексом дефекту і узагальненим масштабом була побудована Ю. Шмульяном. Її конкретні реалізації для операторів, породжених диференціальними виразами із частинними похідними, були здійснені М. Горбачуком і В. Горбачук, а ще раніше — Ю. Березанським для виразів із частинними різницями.

За допомогою розробленого ним методу напрямних функціоналів М. Крейн повністю розв'язав проблему розкладів за власними функціями довільного самоспряженого звичайного диференціального оператора.

У 1956 р. Ю. Березанський розробив загальний підхід до розкладів за власними функціями самоспряжених операторів у функціональних гільбертових просторах, який дав змогу побудувати розклади за узагальненими власними функціями диференціальних операторів із частинними похідними. Тим самим теорія розкладів за узагальненими власними функціями лінійних самоспряжених диференціальних операторів довільної кількості змінних, вивчення яких розпочалось ще у XVIII ст. і продовжувалось протягом тривалого часу (Д. Бернуллі, М. Остроградський, Г. Вейль, М. Крейн, В. Стєклов та ін.), набрала завершеного вигляду. Невдовзі ця теорія була поширена Ю. Березанським і Г. Кацом (Київ) на абстрактні самоспряжені оператори, для чого було введено простори з позитивною та негативною нормами (простори Березанського), які знайшли своє застосування в різних розділах сучасної математики (з усім цим можна детально ознайомитися у монографії Ю. Березанського „Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов", 1965 р.), а згодом і на скінченні та нескінченні сім'ї комутуючих операторів. Для сімей не комутуючих, а пов'язаних певними алгебраїчними співвідношеннями самоспряжених операторів, ряд результатів вищезгаданої природи отримав Ю. С. Самойленко (Київ). Спектральна теорія нескінченних сімей привела Ю. Березанського та його учнів Ю. С. Самойленка і Ю. Кондратьєва до введення і вивчення важливих класів основних і узагальнених функцій нескінченної кількості змінних та їх застосувань до задач теорії поля і статистичної механіки.

Питанням спектральної теорії (умови самоспряженості, дефектні числа, структура спектра, асимптотика спектральної та власних функцій) для звичайних диференціальних операторів присвячено численні роботи М. Крейна, І. Каца, Д. Арова, В. Адамяна (Одеса), О. Повзнера, І. Глазмана, Б. Левітана, В. Марченка, Й. Островського, Ф. Рофе-Бекетова (Харків), Л. Нижника, В. Михайлеця (Київ). Особливу увагу було приділено рівнянням Штурма – Ліувілля і канонічним системам. Аналогічні питання для операторів із частинними похідними і частинними різницями розглядались О. Повзнером, Ю. Березанським, Л. Нижником, Ф. Рофе-Бекетовим, М. Горбачуком та ін.

Обернені спектральні задачі й задачі розсіяння для звичайних диференціальних рівнянь у різних постановках досліджувались В. Марченком, Б. Левітаном, Ф. Рофе-Бекетовим у Харкові, М. Крейном, Л. Сахновичем, Д. Аровим, В. Адамяном в Одесі, З. Лейбензоном у Києві, В. Лянце у Львові, М. Маламудом у Донецьку та ін. Першим обернені спектральні задачі для рівнянь із частинними похідними й частинними різницями розглянув Ю. Березанський, а задачі розсіяння для рівнянь із частинними різницями досліджувала М. Ескіна (Київ). Згодом Л. Нижник розпочав вивчення прямої та оберненої задач нестаціонарного розсіяння, зокрема для системи рівнянь Дірака. Ці дослідження продовжив його учень В. Тарасов (Житомир).

У багатьох задачах квантової теорії поля виникає необхідність побудови спектральної теорії сингулярно збурених операторів, коли збурення не є оператором у вихідному просторі. В. Кошманенком (Київ) було розвинуто теорію розсіяння в термінах напівлінійних функціоналів. Метод квадратичних форм дослідження таких операторів був поширений Л. Нижником на випадок сильних сингулярностей. Метод, що базується на теорії самоспряжених розширень симетричних операторів, набув подальшого розвитку та застосувань у працях А. Кочубея, В. Михайлеця, Л. Нижника, С. Кужеля (Київ) і Р. Гринiва, Я. Микитюка (Львів). В. Кошманенко, М. Працьовитий і Г. Торбін (Київ) дослідили також фрактальні властивості спектральної міри. У 1994 р. С. Кужель розпочав поширення схеми розсіяння Лакса – Філліпса на еволюції, що описуються диференціально-операторними рівняннями гіперболічного типу.

Спектральною теорією несамоспряжених операторів займались М. Крейн, Д. Аров, В. Адамян, М. Бродський, Л. Сахнович, Г. Губреєв (Одеса), В. Марченко, М. Лівшиць, В. Мацаєв, В. Золотарьов, Ю. Любіч, Ф. Рофе-Бекетов (Харків), В. Лянце та його учні (Львів), М. Маламуд, Е. Цекановський (Донецьк), Г. Кисилевський (Житомир), Ю. Арлінський (Луганськ). У спектральній теорії операторних пучків низку важливих результатів отримали М. Крейн, С. Крейн (Київ), В. Мацаєв (Харків), Г. Радзієвський (Київ), В. Пивоварчик (Одеса), М. Копачевський (Сімферополь). У зв'язку з теорією несамоспряжених операторів варто відмітити монографії М. Крейна і І. Гохберга „Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве" та „Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве", а також оглядову доповідь М. Крейна на Міжнародному конгресі математиків (Москва, 1966 р.), в яких не тільки підсумовано дослідження з цієї теорії, але й окреслено шляхи її подальшого розвитку.

Спектральній теорії операторів у просторах з індефінітною метрикою типу Понтрягіна і просторах Крейна та геометрії цих просторів присвячено ряд робіт М. Крейна, І. Іохвідова, Ю. Шмульяна, Ю. Гінзбурга (Одеса) та О. Кужеля (Сімферополь).

Однією із задач, внаслідок розв'язування якої з'явилась низка нових напрямів у функціональному аналізі, є класична проблема моментів. Так, з нею тісно пов'язані проблема продовження додатно визначених функцій і гвинтових дуг, спектральна теорія операторів, інтерполяція та екстраполяція функцій тощо. Особливий вплив на їх виникнення і розвиток мали публікації М. Крейна і Н. Ахієзера (Харків). У 40 – 50-х рр. М. Крейн довів теорему про можливість продовження додатно визначеної функції зі скінченного інтервалу на всю вісь, описав у невизначеному випадку всі такі продовження і побудував теорію інтегральних зображень додатно визначених ядер через власні функції диференціальних операторів. Аналогічні питання для ермітово-індефінітних ядер зі скінченною кількістю від'ємних квадратів розглянула В. Горбачук (Плющова). Ю. Березанський отримав зображення додатно визначених ядер від багатьох змінних. Згодом він і його учні поширили цей результат на випадок нескінченної кількості змінних та на операторнозначні ядра і дослідили узагальнену проблему моментів з кореляційними мірами статистичної механіки. Останнім часом зріс інтерес до вивчення комплексної проблеми моментів, а також теорії ортогональних многочленів на довільній множині комплексної площини (Ю. Березанський, М. Дудкін (Київ), Л. Голінський (Харків)).

У 40-х рр. М. Крейн розпочав дослідження диференціальних рівнянь у банаховому просторі, коефіцієнтами яких є обмежені оператори. Разом з Ю. Далецьким (Київ) вони перенесли основні положення теорії стійкості Ляпунова зі звичайних диференціальних рівнянь на розглядувані ними операторно-диференціальні рівняння. Умови стійкості нелінійних рівнянь з обмеженими операторними коефіцієнтами вивчав В. Слюсарчук (Рівне). Лінійні диференціальні рівняння у банаховому просторі, коефіцієнтами яких служать необмежені оператори, розглянули М. Горбачук, В. Горбачук, А. Князюк (Київ). Для таких рівнянь еліптичного та параболічного типів вони описали всі розв'язки всередині інтервалу і побудували теорію граничних значень цих розв'язків, яка містить у собі як частинний випадок значну частину результатів теорії граничних значень аналітичних (гармонічних) функцій (теореми Фату, Ф. Рісса, Комацу тощо) і дає змогу поширити їх на розв'язки широких класів рівнянь із частинними похідними. Важливу роль тут відіграв абстрактний аналог теореми Пелі – Вінера, одержаний В. Горбачук. На основі цієї теореми М. Горбачуком та В. Горбачук було запропоновано загальний (операторний) підхід до одержання прямих і обернених теорем теорії наближень, що дало змогу охопити, а інколи й уточнити відомі результати і отримати низку нових. М. Горбачук та В. Горбачук дослідили також поведінку на нескінченності розв'язків задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь. Для багатьох класів диференціальних рівнянь у банаховому просторі А. Кочубеєм доведено існування фундаментальних і знайдено умови існування майже періодичних розв'язків. У випадку самоспряжених диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі було розвинуто (Ф. Рофе-Бекетов, М. Горбачук) спектральну теорію граничних задач, яка невдовзі привела до побудови теорії розширень симетричних операторів у термінах просторів граничних значень (А. Кочубей, В. Михайлець, Л. Вайнерман (Київ), М. Маламуд, В. Деркач (Донецьк), О. Сторож (Львів) та ін.). М. Горбачуком розроблено конструктивний метод побудови групи та аналітичної півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі безпосередньо за їх генераторами без використання резольвенти генератора.

У серії робіт А. Кочубея, виконаних починаючи з 1991 р., започатковано декілька напрямків аналізу над неархімедовими полями, зокрема над полем p-адичних чисел; закладено основи неархімедового нескінченновимірного аналізу. М. Горбачук та В. Горбачук дослідили на коректну розв'язність задачу Коші для диференціальних рівнянь у банаховому просторі як над архімедовими, так і неархімедовими полями. Випадок вироджених рівнянь розглянув А. Руткас (Харків).

Алгебраїчними аспектами функціонального аналізу займались у Києві М. Кравчук, М. Крейн, Г. Кац, С. Крейн, Г. Шилов, Ю. Березанський, Ю. С. Самойленко та їхні учні. Істотні результати в гармонічному аналізі на групах одержав М. Крейн. У 1949 р. він дослідив двоїстий об'єкт до компактної некомутативної групи (в комутативному випадку цей об'єкт перетворюється на групу характерів). Ці дослідження М. Крейна продовжив Г. Кац, котрий детально вивчив указаний об'єкт (зараз він називається алгеброю Каца). Г. Шилов у 1953 р. довів, що нормована алгебра з незв'язною множиною незв'язних ідеалів розкладається в пряму суму ідеалів. До алгебраїчних питань також відносяться дослідження С. Крейна і Ю. Березанського з теорії гіперкомплексних систем з локально компактним базисом. На такі системи вони перенесли чимало положень гармонічного аналізу. Варто зазначити, що ця теорія передувала теорії гіпергруп, яка наразі активно розвивається як в Україні, так і за її межами. Ряд фактів гармонічного аналізу і теорії зображень для некомутативних гіперкомплексних систем встановили Ю. Березанський, О. Калюжний, Л. Вайнерман (Київ). Результати були застосовані ними до інтегрування нелінійних рівнянь. Вивченню зображень різноманітних видів алгебр і нескінченновимірних груп присвячено численні роботи Ю. С. Самойленка, С. Кругляка, В. Островського, О. Косяка (Київ) та їхніх учнів. А. Клімик (Київ) розвинув прикладні аспекти теорії зображень груп Лі та квантових груп, знайшов алгебраїчні підходи до вивчення базисних гіпергеометричних функцій, зв'язаних з некомутативною геометрією і квантовими групами.

У 1950 – 1952 рр. М. Красносєльський (Київ) отримав значні результати щодо рівнянь з нелінійними операторами і використав їх при розв'язуванні нелінійних інтегральних рівнянь. І. Скрипник (Донецьк) увів новий клас нелінійних операторів, що діють з банахового простору на двоїстий до нього, розробив для нього топологічну теорію, яка ґрунтується на введеному ним понятті степеня узагальненого монотонного відображення, і застосував свої результати до дослідження розв’язності конкретних нелінійних рівнянь із частинними похідними і гладкості їх розв’язків.

1. *Банах С. С.* Курс функціонального аналізу. – Київ: Рад. шк., 1948. – 216 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
3. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 292 с.
4. *Горбачук М. Л., Самойленко А. М.* Михайло Васильович Остроградський і його роль у розвитку математики // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1011 – 1023.
5. *Gorbachuk M. L.,Gorbachuk V. I.* M.G. Krein’s lectures on entire operators. – Basel etc.: Birkhäuser, 1997. – 222 p.
6. *Горбачук М. Л.* Вороний Георгій Феодосійович // Видатні постаті України. – Київ: МАУП, 2004. – С. 186 – 190.
7. *Боголюбов О. М., Митропольський Ю. О., Самойленко А. М., Горбачук М. Л.* Математика // Історія укр. культури. – Київ: Наук. думка, 2012. – Т. 5, книга 3. – С. 449 – 480.
8. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 272 с.
9. *Кеплер И.* Новая стереометрия винных бочек. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1935. – 180 с.
10. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – 454 с.
11. *Крейн М. Г.* Аналитические проблемы и результаты теории операторов в гильбертовом пространстве // Труды Междунар. конгр. математиков. – М.: Мир, 1968. – С. 189 – 216.
12. *Лагранж Ж.-Л.* Аналитическая механика: В 2 т. – М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
13. *Лурье С. Я.* Архимед. – М.: АН СССР, 1945. – 150 с.
14. *Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 330 с.
15. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
16. *Остроградский М. В.* Полное собрание трудов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1959. – Т. 1. – 304 с.; 1961. – Т. 3. – 388 с.
17. *Паплаускас А. Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: Наука, 1966. – 276 с.
18. *Риман Б.* Сочинения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 543 с.
19. *Рид К.* Гильберт. – М.: Наука, 1977. – 386 с.
20. *Рыбников К. А.* История математики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 454 с.
21. *Рыжий В. С., Николаенко И. Г.* История математики. – Харьков: Харьков. нац. ун-т им. Каразина, 2013. – Ч. 1. – 184 с.
22. *Сологуб В. А.* Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях. – Киев: Наук. думка, 1975. – 280 с.
23. *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов. – М.: Гостехиздат, 1957. – 535 с.
24. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.

Одержано 24.04.13