УДК 517.51

Г. Акишев (Караганд. гос. ун-т, Казахстан)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО – БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

We establish exact-order estimates for the trigonometric widths of the Nikol'ski – Besov classes of periodic functions of many variables in the Lebesgue space with mixed norm.

Встановлено точні за порядком оцінки тригонометричного поперечника класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних у просторі Лебега з мішаною нормою.

Введение. Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$. Через $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, определенных на $\mathbb{R}^m$, имеющих 2π-период по каждой переменной, для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int\limits_0^{2\pi} \left[\ldots \left[\int\limits_0^{2\pi} \left|f(\bar{x})\right|^{p_1} dx_1\right]^{p_2/p_1} \ldots\right]^{p_m/(p_{m-1})} dx_m\right]^{1/p_m} < \infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ (см. [1, с. 128]). В случае, когда $p_1 = p, \ldots, p_m = p$, условимся вместо $\| \cdot \|_{\bar{p}}$, $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$ и $B^r_{\bar{p},\theta}$ использовать соответственно обозначения $\| \cdot \|_p$, $L_p(\mathbb{T}^m)$ и $B^r_{p,\theta}$.

Функция $f \in L_1(\mathbb{T}^m) = L(\mathbb{T}^m)$ разлагается в ряд Фурье

$$\sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{n}, \bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^m n_j x_j$, $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\left\{e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle}\right\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$ и $\mathbb{Z}^m$ — пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами.

Для функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$ и числа $s \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\sigma_s(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in \rho(s)} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

$$\rho(s) = \left\{\overline{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon \left[2^{s-1}\right] \leq \max_{j=1,\ldots,m} |k_j| < 2^s\right\},$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Рассматриваемые классы Никольского – Бесова [1, 2] определим следующим образом. Пусть $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $r > 0$, тогда

$$B^r_{\bar p,\theta} = \left\{ f \in L_{\bar p}(\mathbb{T}^m) : \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \big\|\sigma_s(f)\big\|^{\theta}_{\bar p} \right)^{1/\theta} \le 1 \right\},$$

$$H^r_{\bar p} = \left\{ f \in L_{\bar p}(\mathbb{T}^m) : \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr} \big\|\sigma_s(f)\big\|_{\bar p} \le 1 \right\}.$$

Известно, что для $1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$ справедливы вложения

$$B^r_{\bar p,1} \subset B^r_{\bar p,\theta_1} \subset B^r_{\bar p,\theta_2} \subset B^r_{\bar p,\infty} = H^r_{\bar p}. \tag{1}$$

Пусть дан некоторый класс $F \subset L_{\bar p}(\mathbb{T}^m)$. Тригонометрическим n-поперечником $d^T_n(F, L_{\bar p})$ класса F в пространстве $L_{\bar p}(\mathbb{T}^m)$ называется величина

$$d^T_n(F, L_{\bar p}) = \inf_{\Omega_n} \sup_{f\in F} \inf_{t(\Omega_n)} \big\|f - t(\Omega_n)\big\|_{\bar p}, \tag{2}$$

где

$$t(\Omega_n, \bar x) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\langle \bar k^{(j)}, \bar x\rangle},$$

$\Omega_n = \left\{\bar k^{(1)}, \bar k^{(2)}, \ldots, \bar k^{(n)}\right\}$ — семейство векторов $\bar k^{(j)} = \left(k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, с целочисленными координатами, c_j — произвольные числа.

Понятие тригонометрического поперечника в одномерном случае впервые введено Р. С. Исмагиловым [3], и им установлены оценки для некоторых классов в пространстве непрерывных функций. Для функций многих переменных тригонометрические поперечники классов Соболева $W^{\bar r}_p$ и Никольского $H^{\bar r}_p$ исследовались Я. С. Бугровым [4], Э. С. Белинским [5, 6], В. Е. Майоровым [7], Г. Г. Магарил-Ильяевым [8], В. Н. Темляковым [9], а для класса Бесова $B^{\bar r}_{p,\theta}$ — А. С. Романюком [10], для обобщенных классов Никольского – Бесова — С. А. Стасюком [11, 12], Д. Б. Базархановым [13].

Для рассматриваемого класса $B^r_{p,\theta}$, где r, p, θ — числовые параметры, в работе [14] доказана следующая теорема.

Теорема [14]. *Пусть* $1 \le p < 2 \le q < \dfrac{p}{p-1}$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > m$, *тогда*

$$d^T_n(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp n^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Цель настоящей статьи — найти точный порядок тригонометрического поперечника определенного выше класса $B^r_{\bar p,\theta}$ в пространстве $L_{\bar q}(\mathbb{T}^m)$.

В случае выполнения неравенств $B \ge C_1 A$ или $B \le C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Запись $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$.

Вспомогательные утверждения. Пусть $f \in L_{\bar p}(\mathbb{T}^m)$ и $\left\{\bar k^{(j)}\right\}_{j=1}^{M}$ — система векторов $\bar k^{(j)} = \left(k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)}\right)$ с целочисленными координатами. Рассмотрим величину

$$e_M(f)_{\bar p} = \inf_{\bar k^{(j)}, b_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \bar k^{(j)}, \bar x\rangle} \right\|_{\bar p},$$

где b_j — произвольные числа. Величина $e_M\,(f)_{\bar p}$ называется наилучшим M-членным тригонометрическим приближением функции $f \in L_{\bar p}(\mathbb{T}^m)$. Для заданного класса $F \subset L_{\bar p}(\mathbb{T}^m)$ положим

$$e_M\,(F)_{\bar p} = \sup_{f\in F} e_M\,(f)_{\bar p}\,. \tag{3}$$

Заметим, что согласно определениям (2), (3) величины $d_M^T(F, L_{\bar p})$ и $e_M\,(F)_{\bar p}$ связаны неравенством

$$e_M\,(F)_{\bar p} \le d_M^T\,(F)_{\bar p}\,. \tag{4}$$

Для оценки снизу тригонометрического поперечника класса $B^r_{\bar p,\theta}$ понадобится следующее утверждение.

Теорема 1 [15]. *Пусть* $\bar p = (p_1,\ldots,p_m)$, $\bar q = (q_1,\ldots,q_m)$, $1 < p_j \le 2 < q_j < \infty$, $j = 1,\ldots,m$, $1 \le \theta \le \infty$.

Если $r > \sum_{j=1}^m \dfrac{1}{p_j}$, *то*

$$e_M\left(B^r_{\bar p,\theta}\right)_{\bar q} \asymp M^{-\frac{1}{m}\left(r-\sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Доказательство. Ограничимся установлением только оценки снизу, которую будем использовать в дальнейшем. При этом нам понадобится формула (см. [16, с. 25])

$$e_M(f)_{\bar q} = \inf_{\Omega_M} \sup_{P\in L^\perp, \|P\|_{\bar q'}\le 1} \left| \int\limits_{\mathbb{T}^m} f(\bar x)\bar P(\bar x)d\bar x \right|, \tag{5}$$

где $\bar q' = (q_1',\ldots,q_m')$, $\dfrac{1}{q_j}+\dfrac{1}{q_j'} = 1$, $j = 1,\ldots,m$, $L^\perp$ — множество функций, ортогональных подпространству тригонометрических полиномов, с номерами гармоник из множества Ω_M.

Поскольку оценка величины $e_M\left(B^r_{\bar p,\theta}\right)_{\bar q}$ не зависит от θ, вследствие (1) оценку снизу достаточно доказать для $B^r_{\bar p,1}$.

Для натурального числа M выберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^{nm}$ и $2M \le \sharp\rho(n)$, где $\sharp\rho(n)$ — количество элементов множества $\rho(n)$.

Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar x) = 2^{-n\left(r+\sum_{j=1}^m\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right)} \sum_{\bar k\in\rho(n)} e^{i\langle\bar k,\bar x\rangle}.$$

Тогда $\left\|\sigma_s(f_1)\right\|_{\bar p} = 0$, если $s \ne n$, и

$$\left\|\sigma_n(f_1)\right\|_{\bar p} = 2^{-n\left(r+\sum_{j=1}^m\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right)} \prod_{j=1}^m \left\| \sum_{k_j=2^{n-1}}^{2^n-1} e^{ik_jx_j} \right\|_{p_j}.$$

В силу оценки нормы ядра Дирихле (см. [17, с. 181]) получим

$$\left\| \sum_{k_j=2^{n-1}}^{2^n-1} e^{ik_jx_j} \right\|_{p_j} \ll 2^{n\left(1-\frac{1}{p_j}\right)}$$

для $p_j \in (1,\infty)$, $j = 1,\ldots,m$. Следовательно,

$$\left\|\sigma_n(f_1)\right\|_{\bar{p}} \ll 2^{-nr}.$$

Поэтому

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{sr}\left\|\sigma_s(f_1)\right\|_{\bar{p}} \le C_1,$$

т. е. функция $C_1^{-1}f_1 \in B_{\bar{p},1}^r$.

Далее, рассмотрим функции

$$v_1(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho(n)} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle},$$

$$u_1(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho(n)\cap\Omega_M} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Положим $w_1(\bar{x}) = v_1(\bar{x}) - u_1(\bar{x})$. В силу равенства Парсеваля

$$\|u_1\|_2 = (\pi)^m \left(\sum_{\bar{k}\in\rho(n)\cap\Omega_M} 1\right)^{1/2} \ll M^{1/2},$$

$$\|v_1\|_2 = (\pi)^m \left(\sum_{\bar{k}\in\rho(n)} 1\right)^{1/2} \ll 2^{nm/2}.$$

Из этих соотношений согласно свойству нормы получим

$$\|w_1\|_2 \le \|v_1\|_2 + \|u_1\|_2 \le C_2 2^{nm/2}.$$

Значит, функция $P_1(\bar{x}) = C_2^{-1}2^{-nm/2}w_1(\bar{x})$ удовлетворяет требованиям формулы (5) при $q_j = 2$, $j = 1,\ldots,m$. Поскольку $2 < q_j$, $j = 1,\ldots,m$, то $e_M\left(f_1\right)_2 \ll e_M\left(f_1\right)_{\bar{q}}$. Теперь по формуле (5) имеем

$$e_M(f_1)_{\bar{q}} \gg e_M(f_1)_2 \gg \inf_{\Omega_M} \int\limits_{\mathbb{T}^m} f_1(\bar{x})\bar{P}_1(\bar{x})d\bar{x} =$$

$$= C_2^{-1}2^{-nm/2}2^{-n\left(r+\sum_{j=1}^m\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right)} \inf_{\Omega_M}\left[\sharp\rho(n) - \sharp(\rho(n)\cap\Omega_M)\right] \gg$$

$$\gg 2^{-nm/2}2^{-n\left(r+\sum_{j=1}^m\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right)}\left[\sharp\rho(n) - M\right] \gg$$

$$\gg 2^{-nm/2} 2^{-n\left(r+\sum_{j=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right)}\left[\sharp\rho(n)-\frac{\sharp\rho(n)}{2}\right] \gg 2^{-nm/2} 2^{-n\left(r-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\right)}.$$

Учитывая (1), последние соотношения и $2^{nm} \asymp M$, получаем

$$e_M\left(B^r_{\bar{p},\theta}\right)_{\bar{q}} \geq e_M\left(B^r_{\bar{p},1}\right)_{\bar{q}} \gg e_M\left(f_1\right)_{\bar{q}} \gg M^{-\frac{1}{m}\left(r-\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** В случае $p_1 = \ldots = p_m = p$ и $q_1 = \ldots = q_m = q$ теорема 1 доказана в [18]. Оценки величины $e_M\left(B^r_{p,\theta}\right)_q$ в случае $\frac{m}{p} - \frac{m}{q} < r < \frac{m}{p}$ установлены в [19]. В одномерном случае теорема 1 доказана в [6]. Кроме того, теорема 1 приведена в [15] и для других соотношений между параметрами p_j, q_j, $j = 1, \ldots, m$.

Теорема Б [20]. *Пусть* $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m$, *и*

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{|k_j|\leq n_j, j=1,\ldots,m} c_{\bar{k}} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Тогда для $1 \leq p_j < q_j \leq \infty$, $j = 1, \ldots, m$, *выполняется неравенство*

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\bar{q}} \leq 2^m \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j - 1/q_j} \|T_{\bar{n}}\|_{\bar{p}}.$$

Пусть Ω_M — множество, содержащее не более чем M векторов $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами. Справедлива следующая лемма.

Лемма А [21]. *Пусть* $2 \leq q < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\langle\bar{k}^{(j)},\bar{x}\rangle}$$

и любого натурального числа $N \leq M$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_N, \bar{x})$, *содержащий не более* N *гармоник и такой, что*

$$\left\|P(\Omega_M) - P(\Omega_N)\right\|_q \ll MN^{-1/2},$$

причем $\Omega_N \subset \Omega_M$, *все коэффициенты* $P(\Omega_N, \bar{x})$ *одинаковы и не превышают по модулю* MN^{-1}.

Основные результаты. Предварительно докажем вспомогательное утверждение, которое будет существенно использоваться в процессе доказательства основных результатов. Рассмотрим тригонометрический полином

$$t_s(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Пусть $t(\Omega_{n_s}; \bar{x})$ — тригонометрический полином, приближающий полином $t_s(\bar{x})$ согласно лемме А, т. е.

$$\left\|t_s - t(\Omega_{n_s})\right\|_{\bar{q}} \leq \left\|t_s - t(\Omega_{n_s})\right\|_{\tilde{q}} \ll 2^{sm} n_s^{-1/2}, \tag{6}$$

где $\tilde{q} = \max\{q_j : j = 1, \ldots, m\}$, $\Omega_{n_s} \subset \rho(s)$ и все коэффициенты полинома $t(\Omega_{n_s}; \bar{x})$ равны и не превышают по модулю $2^{sm} n_s^{-1}$.

Рассмотрим оператор T_s вида

$$T_s f(\bar{x}) = f(\bar{x}) * \big(t_s(\bar{x}) - t(\Omega_{n_s}, \bar{x})\big),$$

где значком $*$ обозначена операция свертки двух функций, т. е.

$$(\varphi * g)(\bar{x}) := (2\pi)^{-m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \varphi(\bar{y}) g(\bar{x} - \bar{y}) d\bar{y}$$

для $\varphi, g \in L(\mathbb{T}^m)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p_j < 2 < q_j < \dfrac{p_j}{p_j - 1} = p'_j$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда норма оператора* T_s, *действующего из* $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$ *в* $L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^m)$, *удовлетворяет неравенству*

$$\|T_s\|_{\bar{p} \to \bar{q}} = \sup_{\|f\|_{\bar{p}} \le 1} \|T_s f\|_{\bar{q}} \ll 2^{sm} n_s^{-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p'_j}\right)}.$$

Доказательство. Согласно аналогу теоремы Рисса – Торина в пространстве Лебега со смешанной нормой (см. [22]) можем записать

$$\|T_s\|_{\bar{p} \to \bar{q}} \le \|T_s\|_{2 \to 2}^{1-\lambda} \|T_s\|_{1 \to \bar{q}^*}^{\lambda}, \tag{7}$$

где $0 < \lambda < 1$ и координаты $\bar{q}^* = (q_1^*, \ldots, q_m^*)$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q_j} = \frac{1 - \lambda}{2} + \frac{\lambda}{q_j^*}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Выберем $\lambda = \dfrac{2}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{2}\right)$.

Коэффициенты полинома $t_s(\bar{x}) - t(\Omega_{n_s}, \bar{x})$ равны и их модули не превышают $2^{(s+1)m} n_s^{-1} + 1$. Поэтому в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|T_s\|_{2 \to 2} \ll 2^{sm} n_s^{-1}. \tag{8}$$

Далее, используя обобщенное неравенство Минковского (см. [1, с. 27]) и (6), имеем

$$\|T_s f\|_{\bar{q}^*} \le \|f\|_1 \big\|t_s - t(\Omega_{n_s})\big\|_{\bar{q}^*} \ll \|f\|_1 2^{sm} n_s^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\|T_s\|_{1 \to \bar{q}^*} \ll 2^{sm} n_s^{-1/2}. \tag{9}$$

Теперь, подставляя (8) и (9) в (7), получаем

$$\|T_s\|_{\bar{p} \to \bar{q}} \ll \big(2^{sm} n_s^{-1}\big)^{1-\lambda} \left(2^{sm} n_s^{-1/2}\right)^{\lambda} = C 2^{sm} n_s^{\frac{\lambda}{2} - 1} = C 2^{sm} n_s^{-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p'_j}\right)}.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 2. В случае $p_1 = \ldots = p_m = p$ и $q_1 = \ldots = q_m = q$ лемма 1 доказана в [14].

Теперь сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_j < 2 \le q_j < \dfrac{p_j}{p_j - 1}$, $j = 1, \ldots, m$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > m$. *Тогда*

$$d_n^T(B^r_{\bar{p},\theta}, L_{\bar{q}}) \asymp n^{-\frac{r}{m} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Доказательство. Оценка снизу, вследствие (4), доказана выше при установлении соответствующей оценки снизу в теореме 1.

Докажем оценку сверху. Для числа $n \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число l такое, что $2^{(l-1)m-1} \le$ $\le n < 2^{lm-1}$. Положим

$$\alpha = \frac{\dfrac{r}{m} - \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{r}{m} - \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\dfrac{1}{p_j} - \dfrac{1}{q_j}\right)}.$$

Для $s = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим $n_s = 2^{sm}$, если $0 \le s < l$, $n_s = \left[2^{lr} 2^{sm\left(1 - \frac{r}{m}\right)}\right]$, если $l \le s \le$ $\le [\alpha l] + 1$, и $n_s = 0$, если $s > [\alpha l] + 1$, где $[y]$ — целая часть числа y.

Поскольку $r > m$, то

$$\sum_s n_s \le \sum_{s=0}^{l-1} 2^{sm} + \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{lr} 2^{sm\left(1 - \frac{r}{m}\right)} \ll C\left\{2^{lm} + 2^{lr} 2^{lm\left(1 - \frac{r}{m}\right)}\right\} \le 2C 2^{lm} \asymp n. \tag{10}$$

Рассмотрим множества

$$P = \bigcup_{0 \le s < l} \rho(s), \qquad Q = \bigcup_{l \le s \le [\alpha l]+1} \Omega_{n_s}.$$

Построим подпространство тригонометрических полиномов с гармониками из множества $P \cup Q$ такое, что приближение класса $H^r_{\bar{p}}$ в пространстве $L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^m)$ этим подпространством реализует порядок величины $d_n^T(H^r_{\bar{p}}, L_{\bar{q}})$.

Пусть $f \in H^r_{\bar{p}}$. Рассмотрим приближение функции f полиномами вида

$$t(\bar{x}) = \sum_{s=0}^{l-1} \sigma_s(f, \bar{x}) + \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \big(t(\Omega_{n_s}; \bar{x}) * \sigma_s(f, \bar{x})\big).$$

В силу соотношения (10) количество гармоник полинома $t(\bar{x})$ не превышает по порядку n, тогда по свойству нормы имеем

$$\|f - t\|_{\bar{q}} \le \left\| \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left(\sigma_s(f, \bar{x}) - \Big(t(\Omega_{n_s}; \bar{x}) * \sigma_s(f, \bar{x})\Big)\right) \right\|_{\bar{q}} + \left\| \sum_{s > [\alpha l]+1} \sigma_s(f) \right\|_{\bar{q}} = J_1 + J_2. \tag{11}$$

Оценим J_2. Поскольку $f \in H^r_{\bar{p}}$, то

$$\big\|\sigma_s(f)\big\|_{\bar{p}} \le 2^{-sr}, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Поэтому, используя свойство нормы, неравенство разных метрик (см. теорема Б) и неравенство $r > m$, получаем

$$J_2 = \left\| \sum_{s>[\alpha l]+1} \sigma_s(f) \right\|_{\bar{q}} \leq \sum_{s>[\alpha l]+1} \left\|\sigma_s(f)\right\|_{\bar{q}} \ll$$

$$\ll \sum_{s>[\alpha l]+1} 2^{s\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)} \left\|\sigma_s(f)\right\|_{\bar{p}} \ll \sum_{s>[\alpha l]+1} 2^{s\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)} 2^{-sr} \ll$$

$$\ll 2^{-\alpha l\left(r-\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)\right)}.$$

Отсюда, учитывая выбор числа α, находим

$$J_2 \ll 2^{-l\left(r-\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)} \asymp n^{-\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}. \qquad (12)$$

Оценим J_1. Для натурального числа s, удовлетворяющего соотношениям $l \leq s \leq [\alpha l] + 1$, рассмотрим оператор T_s вида

$$T_s f(\bar{x}) = f(\bar{x}) * \Big(t_s(\bar{x}) - t(\Omega_{n_s}, \bar{x})\Big).$$

Пусть $p_j \in (1,2)$, $j = 1, \ldots, m$. Применяя неравенство Минковского и лемму 1, получаем

$$J_1 = \left\| \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \sigma_s(f,\bar{x}) - \Big(t(\Omega_{n_s};\bar{x}) * \sigma_s(f,\bar{x})\Big) \right\|_{\bar{q}} \leq$$

$$\leq \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\|\sigma_s(f,\bar{x}) - \Big(t(\Omega_{n_s};\bar{x}) * \sigma_s(f,\bar{x})\Big)\right\|_{\bar{q}} \ll \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\|T_s\sigma_s(f)\right\|_{\bar{q}} \ll$$

$$\ll \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s\|_{\bar{p}\to\bar{q}} \left\|\sigma_s(f)\right\|_{\bar{p}} \ll \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sm} n_s^{-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_j'}\right)} \left\|\sigma_s(f)\right\|_{\bar{p}}. \qquad (13)$$

Подставляя в (13) значения чисел n_s, имеем

$$J_1 \ll \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sm} \left(2^{lr} 2^{sm\left(1-\frac{r}{m}\right)}\right)^{-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_j'}\right)} \left\|\sigma_s(f)\right\|_{\bar{p}} \ll$$

$$\ll 2^{-l\frac{r}{m}\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_j'}\right)} \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sm} 2^{-s\left(1-\frac{r}{m}\right)\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_j'}\right)} \left\|\sigma_s(f)\right\|_{\bar{p}} \ll$$

$$\ll 2^{-l\frac{r}{m}\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_j'}\right)} \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sm} 2^{-s\left(1-\frac{r}{m}\right)\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_j'}\right)} 2^{-sr}. \qquad (14)$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что

$$m - \left(1 - \frac{r}{m}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p'_j}\right) - r = \left(1 - \frac{r}{m}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{2}\right).$$

Поэтому из формулы (14) следует, что

$$J_1 \ll 2^{-l\frac{r}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'_j}\right)} \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{s\left(1-\frac{r}{m}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Поскольку $\dfrac{2}{p_j} - 1 > 0$ и $1 - \dfrac{r}{m} < 0$, отсюда получаем

$$J_1 \ll 2^{-l\frac{r}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'_j}\right)} 2^{l\left(1-\frac{r}{m}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= C 2^{-lm\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)} \asymp n^{-\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Таким образом,

$$J_1 \ll n^{-\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)} \tag{15}$$

в случае $p_j \in (1,2)$, $j = 1, \ldots, m$.

Из неравенств (11), (12) и (15) следует, что

$$\|f - t\|_{\bar{q}} \ll n^{-\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

в случае $p_j \in (1,2)$, $j = 1, \ldots, m$, для любой функции $f \in H^r_{\bar{p}}$. Следовательно,

$$d_n^T(H^r_{\bar{p}}, L_{\bar{q}}) \ll n^{-\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

в случае $p_j \in (1,2)$, $j = 1, \ldots, m$. Значит, из включения $B^r_{\bar{p},\theta} \subset H^r_{\bar{p}}$ (см. (1)) имеем

$$d_n^T(B^r_{\bar{p},\theta}, L_{\bar{q}}) \ll n^{-\left(\frac{r}{m}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

в случае $p_j \in (1,2)$, $j = 1, \ldots, m$.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Из теоремы 2 в случае $p_1 = \ldots = p_m = p$ и $q_1 = \ldots = q_m = q$ следуют результаты А. С. Романюка и В. С. Романюка [14].

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
2. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
3. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
4. *Бугров Я. С.* Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной // Мат. сб. – 1964. – **64(106)**, № 3. – С. 410 – 418.
5. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций „плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль, 1984. – С. 10 – 24.

6. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
7. *Майоров В. Е.* Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q // Мат. заметки. – 1986. – **40**, № 2. – С. 161 – 173.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Тригонометрические поперечники соболевских классов функций в R^n // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **181**. – С. 147 – 155.
9. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 3 – 112.
10. *Романюк А. С.* Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 1. – С. 71 – 96.
11. *Стасюк С. А.* Тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 700 – 705.
12. *Стасюк С. А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1557 – 1568.
13. *Базарханов Д. Б.* Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского – Бесова обобщенной смешанной гладкости // Докл. РАН. – 2009. – **426**, № 1. – С. 11 – 14.
14. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1348 – 1366.
15. *Акишев Г.* Об M – членных приближениях класса Бесова // Тез. докл. междунар. конф. „Теория приближения функции и ее применения”, посвящ. 70-летию А. И. Степанца (1942 – 2007) (Каменец-Подольский, 28 мая – 3 июня 2012 г.). – С. 12.
16. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
17. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М., 1976. – 304 с.
18. *De Vore R. A. , Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. and Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
19. *Стасюк С. А.* Наилучшее m-членное тригонометрическое приближение классов $B^r_{p,\theta}$ функций малой гладкости // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 104 – 111.
20. *Унинский А. П.* Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени // Теоремы вложения и их приложения: Тр. симп. по теоремам вложения (Баку, 1966 г.). – М.: Наука, 1970. – С. 112 – 118.
21. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1991. – № 2. – С. 3 – 7.
22. *Benedek A., Panzone R.* The space L_p with mixed norm // Duke Math. J. – 1961. – **28**, № 3. – P. 301 – 324.

Получено 27.10.12,
после доработки — 01.04.14