УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачів. держ. ун-т)

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО ЧЛЕНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ЛАНЦЮГОВОГО C–ДРОБУ

The estimation of the remainder of the interpolation continued C-fraction is obtained.

Получена оценка остаточного члена для интерполяционной цепной C-дроби.

Вступ. Функцію однієї дійсної змінної на деякому компакті можна інтерполювати узагальненим багаточленом [1, 2] $g(x; f; c_0, c_1, \ldots, c_n) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$, де $\big\{\varphi_i(x)\big\}$ — система функцій Чебишова, апроксимантою Ньютона – Паде [3] або ланцюговим дробом [4]. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами вперше була розглянута Ю. Вронським [5, 6] в 1811 – 1817 рр. та більш ґрунтовно Т. Н. Тіле [7] у 1909 р. В монографії [8] встановлено формулу залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Узагальнення формули залишкового члена для випадку, коли частинні чисельники і знаменники інтерполяційного ланцюгового дробу — багаточлени, отримано в роботі [9]. У [10] обґрунтовано нові оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Дану роботу присвячено встановленню оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового C-дробу.

Формула залишкового члена функціонального інтерполяційного ланцюгового дробу. Нехай функцію $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}$ — компакт, задано значеннями в інтерполяційних вузлах

$$\Lambda = \big\{x_i \colon x_i \in \mathfrak{R},\ i = 0, 1, \ldots, n,\ x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\big\}. \tag{1}$$

Нехай $Y = \big\{y_i \colon y_i = f(x_i), x_i \in \Lambda\big\}$ — множина значень функції $f(x)$ у вузлах (1).

Маємо функціональний ланцюговий дріб (ФЛД) вигляду

$$D(x) = b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x)} {+} \ \frac{a_2(x)}{b_2(x)} {+} \ \ldots \ {+} \ \frac{a_n(x)}{b_n(x)} {+} \ \ldots = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}\ ,$$

де $a_k(x), b_k(x) \in \mathbf{C}(\mathfrak{R})$, $a_k(x) \not\equiv 0$, та n-й підхідний дріб (n-е наближення) ФЛД

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x)} {+} \ \frac{a_2(x)}{b_2(x)} {+} \ \ldots \ {+} \ \frac{a_n(x)}{b_n(x)} = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}. \tag{2}$$

Розглянемо множину інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД), тобто функціональних ланцюгових дробів, що задовольняють інтерполяційну умову

$$D_n(x_i) = \frac{P_n(x_i)}{Q_n(x_i)} = b_0(x_i) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)} = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Якщо функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathfrak{R})$, канонічні чисельник $P_n(x)$ та знаменник $Q_n(x)$ ФЛД (2) — багаточлени, $\deg P_n(x) \leqslant n$, то залишковий член ІЛД визначається за формулою [9]

$$R_n(x) = f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(n+1)!\, Q_n(x)}\ \frac{d^{n+1}}{d\, x^{n+1}}\big[f(x)\, Q_n(x)\big]\Big|_{x=\xi}, \quad \xi \in \mathfrak{R}. \tag{4}$$

Канонічний знаменник $Q_n(x)$ ФЛД (2) визначається через елементи дробу $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, за допомогою формули Ойлера–Міндінґа [11]. Канонічний знаменник $Q_n(x)$ також можна подати у вигляді [12]

$$Q_n(x) = B_1^{[n]}(x) \sum_{k=0}^{l} R_{k,1}^{[n]}(x), \tag{5}$$

де

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} X_{i_2}(x) \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} X_{i_k}(x), \qquad R_{0,s}^{[n]}(x) = 1, \tag{6}$$

$l = [n/2]$, [ ] — ціла частина числа, $X_i(x) = a_{i+1}(x)/\big(b_i(x)b_{i+1}(x)\big)$, $B_1^{[n]}(x) = \prod_{i=1}^{n} b_i(x)$.

У свою чергу $R_{k,s}^{[n]}(x)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(x) R_{k-1,i+2}^{[n]}(x). \tag{7}$$

Легко бачити, що $R_{1,1}^{[n]}(x)$ містить $n-1$ доданок, $R_{2,1}^{[n]}(x)$ — $(n-3)(n-2)/2!$ доданків, $R_{3,1}^{[n]}(x)$ — $(n-5)(n-4)(n-3)/3!$ доданків, $\ldots$, $R_{k,1}^{[n]}(x)$ — $\prod_{i=1}^{k}(n-2k+i)/k!$ доданків.

Використовуючи формулу Лейбніца для похідної i-го порядку добутку двох функцій, з (5) маємо

$$\big(Q_n(x)\big)^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{C}_i^j \left(B_1^{[n]}(x)\right)^{(i-j)} \sum_{k=0}^{l} \left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(j)},$$

тоді

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big[f(x)\,Q_n(x)\big] = f^{(n+1)}(x)Q_n(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^i\, f^{(n+1-i)}(x) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{i} \mathbf{C}_i^m \left(B_1^{[n]}(x)\right)^{(i-m)} \sum_{k=0}^{l} \left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)}. \tag{8}$$

Крім того, з (7) випливає рекурентна формула

$$\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \sum_{i=0}^{m} \mathbf{C}_m^i X_j^{(i)}(x) \left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\right)^{(m-i)}. \tag{9}$$

Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле та інтерполяційний ланцюговий C-дріб. Якщо наближення функції $y = f(x)$ на компакті $\mathfrak{R}$ шукати у вигляді інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (Т-ІЛД) [7, 9, 13]

$$D_n^{(t)}(x) = \frac{P_n^{(t)}(x)}{Q_n^{(t)}(x)} = b_0 + \operatorname*{K}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}, \tag{10}$$

то коефіцієнти b_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, ланцюгового дробу визначаються з умови (3) через значення функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1): або через обернені поділені різниці [4, 14] $b_k = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k]$, де обернені поділені різниці $\Phi_k[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ обчислюються за рекурентною формулою

$$\Phi_k[x_0, \ldots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \qquad \Phi_0[x] = f(x),$$

або за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу [12]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} \, + \, \ldots + \, \frac{x_k - x_1}{-b_1} \, + \, \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}.$$

Якщо наближення функції шукають у вигляді інтерполяційного ланцюгового C-дробу (C-ІЛД) [15, 16]

$$D_n^{(c)}(x) = \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x - x_{k-1})}{1}, \tag{11}$$

то коефіцієнти $a_k, k = 0, 1, \ldots, n$, ланцюгового дробу визначаються з умови (3) за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1) за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу

$$a_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left(-1 + \frac{a_{k-1}\,(x_k - x_{k-2})}{-1} \, + \, \frac{a_{k-2}\,(x_k - x_{k-3})}{-1} \, + \, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \, \frac{a_2\,(x_k - x_1)}{-1} \, + \, \frac{a_1\,(x_k - x_0)}{y_k - a_0} \right), \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \quad a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{12}$$

Легко бачити, що C-ІЛД (11) еквівалентний Т-ІЛД (10), оскільки між коефіцієнтами b_k та a_k інтерполяційних ланцюгових дробів мають місце співвідношення $a_0 = b_0$, $a_1 = 1/b_1$, $a_k = 1/(b_k\, b_{k-1})$, $k = 2, \ldots, n$. Однак зауважимо, що формула (12) дозволяє знаходити коефіцієнти C-ІЛД (11) безпосередньо через значення функції в інтерполяційних вузлах.

Використовуючи прямий рекурентний алгоритм [4], можна довести наступне твердження.

Теорема 1. *Степені багаточленів канонічних чисельника* $P_n^{(c)}(x)$ *та знаменника* $Q_n^{(c)}(x)$ *C–ІЛД* (11) *задовольняють нерівності* $\deg P_n^{(c)}(x) \leqslant \big[(n+1)/2\big]$, $\deg Q_n^{(c)}(x) \leqslant \big[n/2\big]$.

Оцінка залишкового члена *C*-ІЛД. Доведемо для C-ІЛД (11) твердження, аналогічне теоремі 2 [10] для Т-ІЛД.

Теорема 2. *Нехай функція* $f(x)$ *належить* $\mathbf{C}^{(n+1)}(\Re)$ *і за значеннями функції* $f(x)$ *в інтерполяційних вузлах* (1) *побудовано C-ІЛД* (11). *Тоді для довільного* $x \in \Re$ *залишковий член C-ІЛД* $R_n(x) = f(x) - P_n^{(c)}(x)/Q_n^{(c)}(x)$ *задовольняє нерівність*

$$\big|R_n(x)\big| \leqslant \frac{f^* \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)!\,\big|Q_n^{(c)}(x)\big|} \left(\kappa_{n+1}(\rho) + \sum_{m=1}^{l} \mathbf{C}_{n+1}^{m} (a^*)^m \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} \big(n - 2(m+i) + j\big) \right), \tag{13}$$

де

$$\kappa_n(\rho) = \big((1+\sqrt{1+4\rho})^n - (1-\sqrt{1+4\rho}\,)^n\big)/2^n\sqrt{1+4\rho},$$

$$f^* = \max\nolimits_{0\leqslant i\leqslant l}\max\nolimits_{x\in\mathfrak{R}}\left|f^{(n+1-i)}(x)\right|,$$

$$\rho = da^*, \qquad d = \operatorname{diam}\mathfrak{R}, \qquad a^* = \max\nolimits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\,, \qquad l = [n/2].$$

Доведення. У випадку C-ІЛД $B_1^{[n]} \equiv 1$, $X_j(x) = a_{j+1}(x - x_j)$, $X_j'(x) = a_{j+1}$ і $X_j^{(k)}(x) \equiv 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n-1, k = 2, 3, \ldots, n-1$. Формула (9) набирає вигляду

$$\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k}\left(X_j(x)\left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\right)^{(m)} + m\,a_{j+1}\left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\right)^{(m-1)}\right). \tag{14}$$

Оскільки $R_{k,1}^{[n]}(x)$ — багаточлен k-го степеня, то

$$\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = 0 \quad \text{при} \quad k < m. \tag{15}$$

Згідно з теоремою 1 степінь багаточлена знаменника $\deg\, Q_n(x) \leqslant l$, тоді формулу (8) можна записати у вигляді

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\left[f(x)\,Q_n^{(c)}(x)\right] = f^{(n+1)}(x)Q_n^{(c)}(x) + \sum_{m=1}^{l}\mathbf{C}_{n+1}^m\,f^{(n+1-m)}(x)\sum_{k=m}^{l}\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)}. \tag{16}$$

Знайдемо значення похідної $\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)}$ при $k = m, m+1, \ldots, l$. При $k = m$ з (14) з урахуванням (15) отримуємо $\left(R_{m,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = m!\,N_{m,1}^{[n,0]}$, де

$$N_{s,t}^{[n,0]} = \sum_{j_1=t}^{n+1-2s} a_{j_1+1}\sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2s} a_{j_2+1}\ldots\sum_{j_s=j_{s-1}+2}^{n-1} a_{j_m+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, l. \tag{17}$$

При $k = m+1$ із (14) маємо $\left(R_{m+1,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = m!\,N_{m+1,1}^{[n,1]}(x)$, де

$$N_{s+1,t}^{[n,1]}(x) = \sum_{j=t}^{n-1-2s}\left(X_j(x)\,N_{s,j+2}^{[n,0]} + a_{j+1}\,N_{s,j+2}^{[n,1]}(x)\right), \quad N_{1,t}^{[n,1]}(x) = R_{1,t}^{[n]}(x). \tag{18}$$

За індукцією з формули (14) отримуємо $\left(R_{m+s,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = m!N_{m+s,1}^{[n,s]}(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l-m$, де

$$N_{m+s,t}^{[n,s]}(x) = \sum_{j=t}^{n+1-2(m+s)}\left(X_j(x)\;N_{m+s-1,j+2}^{[n,s-1]}(x) + a_{j+1}\,N_{m+s-1,j+2}^{[n,s]}(x)\right), \quad N_{s,t}^{[n,s]}(x) = R_{s,t}^{[n]}(x). \tag{19}$$

Формула (16) набирає вигляду

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[f(x)Q_n^{(c)}(x)\right] = f^{(n+1)}(x)Q_n^{(c)}(x) + \sum_{m=1}^{l}\mathbf{C}_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x)m!\sum_{k=m}^{l}N_{k,1}^{[n,k-m]}(x). \tag{20}$$

Тоді

$$\left|\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\left[f(x)\,Q_n^{(c)}(x)\right]\right| \leqslant f^*\left(\left|Q_n^{(c)}(x)\right| + \sum_{m=1}^{l} C_{n+1}^m\, m!\, \sum_{k=m}^{l}\left|N_{k,1}^{[n,k-m]}(x)\right|\right). \tag{21}$$

Згідно з теоремою 1 [13]

$$\left|Q_n^{(c)}(x)\right| \leqslant \kappa_{n+1}(\rho). \tag{22}$$

Знайдемо оцінки $\left|N_{k,1}^{[n,k-m]}(x)\right|$ при $k = m, m+1, \ldots, l$. При $k = m$ з (17) маємо

$$\left|N_{m,i+2}^{[n,0]}(x)\right| \leqslant \frac{(a^*)^m}{m!}\prod_{j=1}^{m}(n-1-i-2m+j).$$

При $k = m+1$ із формули (18) отримуємо

$$\left|N_{m+1,i+2}^{[n,1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2m}\left(\left|X_j(x)\right|\left|N_{m,j+2}^{[n,0]}(x)\right| + |a_{j+1}|\left|N_{m,j+2}^{[n,1]}(x)\right|\right). \tag{23}$$

При $m = 0$ з (23) маємо $\left|N_{1,i+2}^{[n,1]}(x)\right| = \left|R_{1,i+2}^{[n]}(x)\right| \leqslant da^*(n-i-2)$. При $m = 1$ з (23) випливає, що

$$\left|N_{2,i+2}^{[n,1]}(x)\right| \leqslant 2d(a^*)^2\sum_{j=i+2}^{n-3}(n-j-2) = d\,(a^*)^2(n-i-4)(n-i-3).$$

За індукцією доведемо, що

$$\left|N_{k,i+2}^{[n,1]}(x)\right| \leqslant \frac{d(a^*)^k}{(k-1)!}\prod_{j=1}^{k}(n-i-2k+j-1), \quad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{24}$$

При $k = 1, 2$ формула (24) виконується. Припустимо, що вона має місце при $k = t$. Тоді при $k = t+1$ з (23) отримуємо

$$\left|N_{t+1,i+2}^{[n,1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2t}\left(\left|X_j(x)\right|\left|N_{t,j+2}^{[n,0]}(x)\right| + |a_{j+1}|\left|N_{t,j+2}^{[n,1]}(x)\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2k}\left(d\,a^*\frac{(a^*)^t}{t!}\prod_{l=1}^{t}(n-j-2t+l-1) + a^*\frac{d\,(a^*)^t}{(t-1)!}\prod_{l=1}^{t}(n-j-2t+l-1)\right) =$$

$$= \frac{d\,(a^*)^{t+1}}{t!}\prod_{j=1}^{t+1}(n-i-2(t+1)+j-1),$$

тобто формула (24) має місце і в цьому випадку.

Покажемо, що

$$\left|N_{m+s,i+2}^{[n,s]}(x)\right| \leqslant \frac{d^s(a^*)^{m+s}}{m!\,s!}\prod_{l=1}^{m+s}(n-i-2(m+s)+l-1), \quad s = 0, 1, \ldots, l-m. \tag{25}$$

При $s = 0, 1$ формула (25) виконується. Припустимо, що дана формула виконується при $s = k$. Тоді при $s = k + 1$ з (19) отримуємо

$$\left|N_{m+k+1,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-1-2(m+k)} \Big(\left|X_j(x)\right|\left|N_{m+k,j+2}^{[n,k]}(x)\right| + |a_{j+1}|\left|N_{m+k,j+2}^{[n,k+1]}(x)\right|\Big). \tag{26}$$

При $m = 0$ з (19) одержуємо

$$\left|N_{k+1,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| = \left|R_{k+1,i+2}^{[n]}(x)\right| \leqslant \frac{d^{k+1}\,(a^*)^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=1}^{k+1} \big(n - i - 2(k+1) + j - 1\big).$$

При $m = 1$ з (26) знаходимо

$$\left|N_{k+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| \leqslant \frac{d^{k+1}\,(a^*)^{k+2}}{(k+1)!\;1!} \prod_{j=1}^{k+2} \big(n - i - 2(k+2) + j - 1\big).$$

Припустимо, що (25) виконується при $m = t$. Тоді при $m = t + 1$ з (26) маємо

$$\left|N_{k+t+2,i+2}^{[n,k+1]}(x)\right| \leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \Big(|X_j|\left|N_{k+t+1,j+2}^{[n,k]}(x)\right| + |a_{j+1}|\left|N_{k+t+1,j+2}^{[n,k+1]}(x)\right|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left(d\,a^* \frac{d^k\,(a^*)^{k+t+1}}{k!\,(t+1)!} \prod_{l=1}^{k+t+1} \big(n - j - 2(k+t+1) + l - 1\big) + a^* \frac{d^{k+1}\,(a^*)^{k+t+1}}{(k+1)!\;t!} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{l=1}^{k+t+1} \big(n - i - 2(k+t+1) + l - 1\big) \right) = \frac{d^{k+1}\,(a^*)^{k+t+2}}{(k+1)!\,(t+1)!} \prod_{j=1}^{k+t+2} \big(n - i - 2(k+t+2) + j - 1\big).$$

Формула (25) є правильною і в цьому випадку, отже, вона є правильною при довільних s та m. Із (25) випливає, що

$$\left|N_{m+s,1}^{[n,s]}(x)\right| \leqslant \frac{d^s\,(a^*)^{m+s}}{m!\;s!} \prod_{l=1}^{m+s} \big(n - 2(m+s) + l\big). \tag{27}$$

З (4), (21), (22) та (27) отримуємо (13).

Теорему 2 доведено.

Доведемо наступне допоміжне твердження.

Теорема 3. *Якщо частинні чисельники $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$, скінченного ФЛД*

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = a_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i(x)}{1} \tag{28}$$

при всіх значеннях $x \in \mathcal{R}$ задовольняють умову типу Пейдона – Уолла $\left|a_i(x)\right| \leqslant t(1-t)$, де $t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, то знаменник $Q_n(x)$ ФЛД (28) задовольняє нерівність

$$\left|Q_n(x)\right| \geqslant \begin{cases} \dfrac{(1-t)^{n+2}-t^{n+2}}{(1-t)^{n+1}-t^{n+1}}, & \textit{якщо} \quad 0<t<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{n+2}{2(n+1)}, & \textit{якщо} \quad t=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{29}$$

Доведення. Поряд із ФЛД (28) розглянемо скінченний ланцюговий дріб

$$f_n = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{-t(1-t)}{1}. \tag{30}$$

Нехай $f_k^{(n)}$, $A_k^{(n)}$, $B_k^{(n)}$ — відповідно k-й залишок, чисельник та знаменник k-го залишку ланцюгового дробу (30)

$$f_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{B_k^{(n)}} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n} \frac{-t(1-t)}{1}, \quad k=n-1,n-2,\ldots,1,0, \tag{31$'$}$$

$$f_{n+1}^{(n)} = 1, \qquad A_{n+1}^{(n)} = 0, \qquad B_{n+1}^{(n)} = 1. \tag{31$''$}$$

Легко бачити, що мають місце рекурентні співвідношення

$$f_k^{(n)} = 1 + \frac{-\,t(1-t)}{f_{k+1}^{(n)}}, \tag{32$'$}$$

$$B_k^{(n)} = B_{k+1}^{(n)} - t(1-t)B_{k+2}^{(n)}, \quad k=n-1,n-2,\ldots,1,0, \tag{32$''$}$$

$$A_k^{(n)} = B_{k-1}^{(n)}. \tag{32$'''$}$$

Доведемо, що

$$B_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-k+1} t^i(1-t)^{n-k+1-i}. \tag{33}$$

При $k=n,n-1$ маємо $B_n^{(n)} = 1 = (1-t)+t$, $B_{n-1}^{(n)} = 1-t(1-t) = (1-t)^2+(1-t)t+t^2$. Припустимо, що (33) має місце при $k=n,n-1,\ldots,s+1$. Тоді при $k=s$ з формули (32$''$) випливає, що $B_s^{(n)} = B_{s+1}^{(n)} - t(1-t)B_{s+2}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-s+1} t^i(1-t)^{n-s+1-i}$. Таким чином, формула (33) виконується при довільному k.

Якщо $t=\dfrac{1}{2}$, то з (33) маємо

$$B_k^{(n)} = \frac{n-k+2}{2^{n-k+1}}. \tag{34}$$

Нехай $0<t<\dfrac{1}{2}$. В (33) виконаємо заміну $t=1/\theta$, $\theta>2$. Тоді

$$B_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-k+1} t^i(1-t)^{n-k+1-i} = \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{1}{\theta^i}\,\frac{(\theta-1)^{n-k+1-i}}{\theta^{n-k+1-i}} =$$

$$= \frac{1}{\theta^{n-k+1}} \sum_{i=0}^{n-k+1} (\theta-1)^{n-k+1-i} = \frac{1}{\theta^{n-k+1}} \frac{(\theta-1)^{n-k+2}-1}{\theta-2}.$$

Повертаючись до t, маємо

$$B_k^{(n)} = \frac{(1-t)^{n-k+2} - t^{n-k+2}}{1-2t}. \tag{35}$$

Через $\mathcal{D}_k^{(n)}(x)$ позначимо k-й залишок ланцюгового дробу (28):

$$\mathcal{D}_k^{(n)}(x) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n} \frac{a_i(x)}{1}, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0, \quad \mathcal{D}_n^{(n)}(x) = 1.$$

Очевидно, що має місце рекурентне співвідношення

$$\mathcal{D}_k^{(n)}(x) = 1 + \frac{a_{k+1}(x)}{\mathcal{D}_{k+1}^{(n)}(x)}, \quad k = n-1, \ldots, 0. \tag{36}$$

Доведемо нерівність

$$\left|\mathcal{D}_k^{(n)}(x)\right| \geqslant f_k^{(n)}. \tag{37}$$

При $k = n, n-1$ з (36) маємо

$$\left|\mathcal{D}_n^{(n)}(x)\right| = 1 = f_n^{(n)}, |\mathcal{D}_{n-1}^{(n)}(x)| = \left|1 + \frac{a_n(x)}{1}\right| \geqslant \left|1 - \frac{\left|a_n(x)\right|}{1}\right| \geqslant 1 - \frac{t(1-t)}{1} = f_{n-1}^{(n)}.$$

Припустимо, що нерівність (37) виконується при $k = n-1, n-2, \ldots, s+1$. Тоді при $k = s$ з рекурентного співвідношення (36) випливає

$$\left|\mathcal{D}_s^{(n)}(x)\right| = \left|1 + \frac{a_s(x)}{\mathcal{D}_{s+1}^{(n)}(x)}\right| \geqslant \left|1 - \frac{\left|a_n(x)\right|}{\left|\mathcal{D}_{s+1}^{(n)}(x)\right|}\right| \geqslant 1 - \frac{t(1-t)}{f_{s+1}^{(n)}} = f_s^{(n)}.$$

Отже, нерівність (37) виконується при довільному k.

Оскільки

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1 + \frac{a_1(x)}{\mathcal{D}_1^{(n)}(x)},$$

то $\left|Q_n(x)\right| \geqslant f_1^{(n)}$, $\left|P_n(x)\right| \geqslant f_0^{(n)}$. Враховуючи (31), (32), (34), (35), отримуємо (29).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай функція $f(x)$ належить $\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathfrak{R})$, за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах* (1) *побудовано С-ІЛД* (11) *і частинні чисельники С-ІЛД задовольняють умову типу Пейдона – Уолла, тобто $0 < \rho \leqslant t(1-t)$, де $\rho = a^* d$, $a^* = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|$, $d = \operatorname{diam}\mathfrak{R}$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{R}$ мають місце такі оцінки залишкового члена $R_n(x) = f(x) - P_n^{(c)}(x)/Q_n^{(c)}(x)$ інтерполяційного ланцюгового дробу* (11):

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{f^* d^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}} \Bigg(\kappa_{n+1}\big(t(1-t)\big) +$$

$$+\sum_{m=1}^{l}\mathbf{C}_{n+1}^{m}\frac{t^m(1-t)^m}{d^m}\sum_{i=0}^{l-m}\frac{t^i(1-t)^i}{i!}\prod_{j=1}^{m+i}\big(n-2(m+i)+j\big)\Bigg)\quad \textit{при}\quad 0<t<\frac{1}{2} \tag{38}$$

і

$$\big|R_n(x)\big|\leqslant\frac{f^*d^{n+1}}{n!}\,\frac{2}{n+2}\left(\kappa_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{l}\mathbf{C}_{n+1}^{m}\frac{1}{(4d)^m}\sum_{i=0}^{l-m}\frac{1}{4^i\,i!}\prod_{j=1}^{m+i}\big(n-2(m+i)+j\big)\right)\quad \textit{при}\quad t=\frac{1}{2}, \tag{39}$$

де $\kappa_n(\rho)$, f^*, l *визначено в умові теореми* 2.

Доведення. Згідно з умовою даної теореми $a^*\leqslant t(1-t)/d$. Тоді з теорем 2, 3 отримуємо нерівності (38), (39).

1. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень: У 2 ч. – Київ: Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.
2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций: В 2 кн. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – 423 с.
3. *Бейкер (мл.) Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Hoene-Wroński J. M.* Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmique. – Paris: Courcier, 1811. – 269 p.
6. *Hoene-Wroński J. M.* Philosophie de la Technie Algorithmique: Loi Suprême et universelle des Mathématiques. – Paris: de L'imprimerie de P. Didot L'Aine, 1815–1817. – 286 p.
7. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – xii + 175 S.
8. *Milne-Thomson L. M.* The calculus of finite differences. – London: MacMillan and Co., 1933. – xxiii+558 p.
9. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 57 – 64.
10. *Пагіря М. М.* Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 11. – С. 1548 – 1554.
11. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1954. – Bd I. – 194 S.
12. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. 1. – С. 72 – 79.
13. *Пагіря М. М.* Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 2005. – Вип. 10-11. – С. 77 – 87.
14. *Hildebrand F. B.* Introduction to numerical analysis. – 2 nd ed. – New York: Dover Publ., Inc., 1987. – 669 p.
15. *Пагіря М. М.* Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т кібернетики НАН України, 2001. – Т. 1. – С. 328 – 333.
16. *Pahirya M. M.* Interpolation function of non-Thiele continued fractions // Commun. Anal. Theory Contin. Fractions – 2002. – **10**. – P. 59 – 62.

Одержано 27.05.13