УДК 512.643.4

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

We propose new necessary and sufficient conditions for the solvability of a system of linear equations over the domain of principal ideals and an algorithm for the solution of this system.

Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости системы линейных уравнений над областью главных идеалов. Предложен метод нахождения ее решений.

Вступ. Нехай R — комутативна область головних ідеалів з одиницею $e \neq 0$, $M_{m,n}(\mathrm{R})$ — множина $(m \times n)$-матриць над R, I_n — одинична матриця вимірності n; $0_{m,k}$ — нульова $(m\times k)$-матриця.

Розглянемо систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$Ax = b, \tag{1}$$

де $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$, $b \in M_{m,1}(\mathrm{R})$, $b \neq 0_{m,1}$, і x — невідомий елемент із $M_{n,1}(\mathrm{R})$. Методам розв'язності систем лінійних рівнянь (1) присвячено значну кількість робіт. Це обумовлено не лише академічним інтересом до цієї задачі [1–6], але і багатьма задачами прикладного характеру, для розв'язування яких використовуються системи лінійних рівнянь [7, 8].

Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$, $b \in M_{m,1}(\mathrm{R})$ і $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \in M_{m,n+1}(\mathrm{R})$ — розширена матриця системи лінійних рівнянь (1). Нехай, далі, $d_k(A)$ і $d_k(\bar{A})$ — ідеали кільця R, які породжені мінорами k-го порядку матриць A і $\bar{A}$ відповідно, $k = 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}$. Відомо (див. [1, 2, 4–6]), що система лінійних неоднорідних рівнянь $Ax = b$ над областю головних ідеалів R розв'язна тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r$ і $d_k(A) = d_k(\bar{A})$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, r$, тобто коли форми Сміта матриць $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ збігаються між собою. В цій статті в термінах форм Ерміта матриць $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ встановлено простіший критерій розв'язності системи лінійних неоднорідних рівнянь (1) над областю головних ідеалів та запропоновано метод знаходження її розв'язків. Наведені результати справедливі для матриць над областями елементарних дільників та областями Безу. Крім того, вони можуть бути узагальнені для систем лінійних неоднорідних рівнянь над комутативними кільцями більш загальної алгебраїчної природи.

Основні результати. Нижче встановимо необхідні та достатні умови розв'язності системи лінійних неоднорідних рівнянь над областю головних ідеалів. В області головних ідеалів R зафіксуємо множину неасоційованих елементів $\widetilde{\mathrm{R}}$. Кожному неасоційованому елементу $a \in \widetilde{\mathrm{R}}$ поставимо у відповідність повну систему лишків за модулем ідеалу (a).

Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ — матриця рангу $\operatorname{rank} A = r$ над областю головних ідеалів R. Якщо перший рядок матриці A не нульовий, то для A існує матриця $W \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$AW = H_A = \begin{bmatrix} H_1 & 0_{m_1,n-1} \\ H_2 & 0_{m_2,n-2} \\ \ldots & \ldots \\ H_r & 0_{m_r,n-r} \end{bmatrix}, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m.$$

Якщо ж $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ — матриця рангу $\operatorname{rank} A = r$, в якій перші k рядки є нульовими, тобто $A = \begin{bmatrix} 0_{k,n} \\ A_1 \end{bmatrix}$, $k \geq 1$, а перший рядок матриці A_1 відмінний від нульового, то для A існує матриця $W_1 \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$AW_1 = H_A = \begin{bmatrix} & 0_{k,n} \\ H_1 & 0_{m_1,n-1} \\ H_2 & 0_{m_2,n-2} \\ \ldots & \ldots \\ H_r & 0_{m_r,n-r} \end{bmatrix}, \quad k + m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m.$$

Матриці H_i в нижній блочно-трикутній матриці H_A визначено таким чином:

$$H_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ * \end{bmatrix} \in M_{m_1,1}(\mathrm{R}), \qquad H_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{h}_{21} & a_2 \\ * & * \end{bmatrix} \in M_{m_2,2}(\mathrm{R}), \ldots,$$

$$H_r = \begin{bmatrix} \widetilde{h}_{r1} & \ldots & \widetilde{h}_{r,r-1} & a_r \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \in M_{m_r,r}(\mathrm{R}),$$

де елементи a_i належать множині неасоційованих елементів $\widetilde{\mathrm{R}}$ при всіх $i = 1, 2, \ldots, r$. Крім цього, в перших рядках $\begin{bmatrix} \widetilde{h}_{i1} & \ldots & \widetilde{h}_{i,i-1} & a_i \end{bmatrix}$ матриць H_i, $i \geq 2$, елементи $\widetilde{h}_{ij}$ належать повній системі лишків за модулем ідеалу (a_i) при всіх $j = 1, 2, \ldots, i-1$. Нижня блочно-трикутна матриця H_A називається (правою) формою Ерміта матриці A, і вона для матриці A визначена однозначно (див. [6]). Далі під терміном „*форма Ерміта матриці* A" будемо розуміти, що матриця $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ домноженням справа на зворотну матрицю із $GL(n, \mathrm{R})$ зводиться до матриці H_A, яка визначена вище.

Теорема 1. *Система лінійних неоднорідних рівнянь*

$$Ax = b, \tag{2}$$

де $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ *і* $b \in M_{m,1}(\mathrm{R})$, *розв'язна тоді і тільки тоді, коли форми Ерміта матриць* $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ *і* $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ *збігаються між собою.*

Доведення. Нехай $x_0 \in M_{n,1}(\mathrm{R})$ — розв'язок системи рівнянь (2). Розглянемо матрицю $V = \begin{bmatrix} I_n & x_0 \\ 0_{1,n} & -e \end{bmatrix}$. Очевидно, що

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}.$$

Оскільки $V \in GL(n+1, \mathrm{R})$, то матриці $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ є правоеквівалентними. Отже, форми Ерміта матриць $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ збігаються між собою.

Навпаки, нехай форми Ерміта матриць $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ збігаються між собою, тобто

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} U = H_{[A\,b]} = \begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix} V = H_{[A\,0]},$$

де $U, V \in GL(n+1, \mathrm{R})$. З останньої рівності отримуємо, що матриці $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix}$ є правоеквівалентними, тобто

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{m,1} \end{bmatrix} W. \tag{3}$$

Матрицю W запишемо у вигляді $W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$, де $W_{11} \in M_{n,n}(\mathrm{R})$, $W_{12} \in M_{n,1}(\mathrm{R})$ і $W_{22} \in \mathrm{R}$. Тепер з рівності (3) отримуємо

$$AW_{11} = A \quad \text{і} \quad AW_{12} = b.$$

З останньої рівності випливає розв'язність системи лінійних неоднорідних рівнянь (2), що і доводить теорему.

Із теореми 1 випливають наступні твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ і $B \in M_{m,k}(\mathrm{R})$ — ненульові матриці. Матричне рівняння*

$$AX = B$$

розв'язне тоді і тільки тоді, коли форми Ерміта матриць $\begin{bmatrix} A & 0_{m,k} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ збігаються між собою.

***Наслідок* 2.** *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ і $B \in M_{m,k}(\mathrm{R})$ — ненульові матриці. Матриця B є лівим дільником матриці A, тобто $A = BC$, тоді і тільки тоді, коли форми Ерміта матриць $\begin{bmatrix} B & 0_{m,n} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}$ збігаються між собою.*

Наступний наслідок встановлює умови розв'язності матричних діофантових рівнянь (див. [8], розділ 6, теорема 6.1.1).

***Наслідок* 3.** *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$, $B \in M_{m,k}(\mathrm{R})$, $C \in M_{m,l}(\mathrm{R})$ і $C \neq 0_{m,l}$. Матричне діофантове рівняння*

$$AX + BY = C$$

розв'язне тоді і тільки тоді, коли форми Ерміта матриць $\begin{bmatrix} A & B & 0_{m,l} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}$ збігаються між собою.

Алгоритм знаходження розв'язків. Наведемо алгоритм розв'язування системи лінійних неоднорідних рівнянь над областю головних ідеалів.

Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ — матриця рангу $\operatorname{rank} A = r \geq 1$ і $b \in M_{m,1}(\mathrm{R})$ – ненульовий стовпчик. Розглянемо систему лінійних неоднорідних рівнянь $Ax = b$. Оскільки $\operatorname{rank} A \geq 1$, то, не обмежуючи загальності, будемо припускати, що в системі лінійних неоднорідних рівнянь $Ax = b$ перший рядок матриці A є ненульовим. Нехай, далі, $W \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$AW = H_A = \begin{bmatrix} H_1 & 0_{m_1,n-1} \\ H_2 & 0_{m_2,n-2} \\ \dots & \dots \\ H_r & 0_{m_r,n-r} \end{bmatrix}, \qquad H_i \in M_{m_i,i}(\mathrm{R}), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

— форма Ерміта матриці A. Очевидно, що системи лінійних рівнянь $Ax = b$ і $H_A y = b$, де $y = W^{-1}x$, розв’язні або нерозв’язні одночасно. Матриці H_2, H_3 , …, H_r та стовпчик b запишемо у вигляді

$$H_2 = \begin{bmatrix} & a_2 \\ H_{21} & h_{m_2,2} \\ & \vdots \\ & h_{m_2,m_2} \end{bmatrix}, \qquad H_3 = \begin{bmatrix} & a_3 \\ H_{31} & h_{m_3,2} \\ & \vdots \\ & h_{m_3,m_3} \end{bmatrix}, \ldots, H_r = \begin{bmatrix} & a_r \\ H_{r1} & h_{m_r,2} \\ & \vdots \\ & h_{m_r,m_r} \end{bmatrix},$$

$b = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, де $H_{k1} \in M_{m_k,k-1}(\mathrm{R})$ для всіх $k = 2, 3, \ldots, r$ і $\bar{b}_i \in M_{m_i,1}(\mathrm{R})$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, r$.

Тепер систему лінійних рівнянь $H_A y = b$ запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} a_1 \\ h_{m_1,2} \\ \vdots \\ h_{m_1,m_1} \end{bmatrix} y_1 = \bar{b}_1, \\ \begin{bmatrix} a_2 \\ h_{m_2,2} \\ \vdots \\ h_{m_2,m_2} \end{bmatrix} y_2 = \bar{b}_2 - H_{21} y_1, \\ \begin{bmatrix} a_3 \\ h_{m_3,2} \\ \vdots \\ h_{m_3,m_3} \end{bmatrix} y_3 = \bar{b}_3 - H_{31} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \\ \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \begin{bmatrix} a_r \\ h_{m_r,2} \\ \vdots \\ h_{m_r,m_r} \end{bmatrix} y_r = \bar{b}_r - H_{r1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{r-1} \end{bmatrix}, \quad r \leq n. \end{gathered} \tag{4}$$

Система рівнянь (4) розв’язується безпосередньою підстановкою, яка виконується зверху донизу. З першого рівняння знаходимо y_1. Підставляючи y_1 у друге рівняння, знаходимо y_2.

Аналогічні міркування проводимо з рештою рівнянь. В результаті отримуємо розв'язок y системи рівнянь $H_A y = b$. Тоді $x = Wy$ — розв'язок системи рівнянь $Ax = b$. Очевидно, якщо хоча б одне з рівнянь системи (4) не є розв'язним, то і система (4) також не має розв'язків.

Нехай система лінійних рівнянь $Ax = b$ розв'язна, де $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ і $b \in M_{m,1}(\mathrm{R})$. Якщо $\operatorname{rank} A = n$, то система рівнянь $H_A y = b$ має єдиний розв'язок. Тоді $x = Wy$ — єдиний розв'язок системи рівнянь $Ax = b$. Якщо ж $\operatorname{rank} A = r < n$, то із системи рівнянь $H_A y = b$ невідомі $y_1,\ y_2, \ldots, y_r$ визначаються однозначно, а невідомі $y_{r+1},\ y_{r+2}, \ldots, y_n$ можуть бути вибрані довільно, тобто вони є вільними змінними. Тоді загальний розв'язок $x = Wy$ системи рівнянь $Ax = b$ залежить від вільних змінних $y_{r+1},\ y_{r+2}, \ldots, y_n$.

1. *Казимирский П. С.* Условия совместности неоднородной системы линейных уравнений в некоммутативном кольце главных идеалов // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1955. – **30**, вып. 1. — С. 45 – 51.
2. *Клейнер Г. Б.* О системах линейных уравнений над коммутативными кольцами // Успехи мат. наук. – 1973. – **286**, № 6. – С. 211 – 212.
3. *Елизаров В. П.* Условия, необходимые для разрешимости системы линейных уравнений над кольцом // Дискрет. математика. – 2004. – **16**, № 2. – С. 44 – 53.
4. *Newman M.* The Smith normal form // Linear Algebra and Appl. – 1997. – **254**. – P. 367 – 381.
5. *Hermida-Alonso J. A.* On linear algebra over commutative rings // Handbook Algebra. – 2003. – **3**. – P. 3 – 61.
6. *Friedland S.* Matrices. – Chicago: Univ. Illinois at Chicago, 2010. – 437 p.
7. *Mulders T., Storjohann A.* Certified dense linear system solving // J. Symbol. Comput. – 2004. – **37**, № 4. – P. 485 – 510.
8. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. applications in dynamical systems theory, communications and control engineering. – Dordrecht: Springer, 2007. – 503 p.

Одержано 15.02.13