УДК 517.925.7

**А. А. Мохонько, А. З. Мохонько** (Нац. ун-т „Львов. политехника”)

# ДЕФЕКТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКОЙ ВЕТВЛЕНИЯ

We study the distribution of values of the solutions of an algebraic differential equation $P(z,f,f',\ldots,f^{(s)})=0$ with the property that its coefficients and solutions have a branching point at infinity (e.g. a logarithmic singularity). It is proved that if $a\in\mathbb{C}$ is a deficiency value of $f$ and $f$ grows faster than the coefficients then the following identity takes place: $P(z,a,0,\ldots,0)\equiv 0$, $z\in\{z\colon\, r_0\leqslant |z|<\infty\}$. If $P(z,a,0,\ldots,0)$ is not identically equal to zero in the collection of variables $z$ and $a$ then only finitely many values of $a$ can be deficiency values for the solutions $f\in M_b$ with finite order of growth.

Вивчається розподіл значень розв'язків алгебраїчного диференціального рівняння $P(z,f,f',\ldots,f^{(s)})=0$, коефіцієнти і розв'язки якого мають точку розгалуження в нескінченності (наприклад, логарифмічну особливу точку). Показано, що якщо $a\in\mathbb{C}$ ($a$ — дефектне значення розв'язку $f$ цього рівняння) і $f$ зростає швидше за коефіцієнти, то справджується тотожність $P(z,a,0,\ldots,0)\equiv 0,\ z\in\{z\colon\, r_0\leqslant |z|<\infty\}$. Якщо $P(z,a,0,\ldots,0)$ не перетворюється тотожно в нуль за сукупністю змінних $z$ і $a$, то лише скінченне число значень $a$ може бути дефектним значенням для розв'язків $f\in M_b$ скінченного порядку.

Обозначим через $A_b$ кольцо всех аналитических в $G=\{z\colon r_0\leqslant |z|<+\infty\}$ функций, единственной особой точкой которых является $\infty$. Для функций $f\in A_b$ точка $\infty$ может быть либо логарифмической особой точкой, либо алгебраической точкой ветвления порядка $n-1$, если в $\infty$ соединяются $n$ ветвей функции $f$ (в частности, точкой ветвления нулевого порядка, если $f$ — однозначная голоморфная в $G$ функция). Кольцо $A_b$ целостное (без делителей нуля), поэтому его можно погрузить в поле [1, с. 53, 59]. Через $M_b$ обозначим наименьшее поле, такое, что $A_b\subset M_b$. Для функции $f\in M_b$ будет удобно также использовать обозначение $f(z)$, $z\in G$.

Если $f\in M_b$, то кроме точки ветвления в бесконечности особыми точками функции $f$ могут быть только полюсы, изолированные на римановой поверхности аналитической функции $f(z)$, $z\in G$.

Пусть $f\in M_b$. Далее для определенности считаем, что функция $f$ имеет в бесконечности логарифмическую особую точку, так как для конечнозначных (однозначных) и бесконечнозначных функций определения и обозначения неванлинновских характеристик $T(r,f), S_{\alpha,\beta}(r,f)$ существенно отличаются [2, с. 23, 37].

Выберем произвольные $\alpha,\ \beta,\ -\infty<\alpha<\beta<+\infty$. Через $f(z),\ z\in g_{\alpha\beta}=\{z=re^{i\theta}\colon \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\ r_0\leqslant r<+\infty\}$, обозначим однозначную ветвь функции $f\in M_b$ в угловой области $g_{\alpha,\beta}$ на римановой поверхности аналитической функции $f(z)$, $z\in G$. (Более подробное определение однозначной ветви, а также определения арифметических операций над многозначными функциями см., например, в [3, с. 478].) Неванлинновские характеристики ветви $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, определяются следующим образом [2, с. 40] $(k=\pi/(\beta-\alpha),\ \ln^+x=\max(\ln x,0),\ x\geqslant 0)$ :

$$A_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\left[\ln^+|f(te^{i\alpha})|+\ln^+|f(te^{i\beta})|\right]dt\geqslant 0,$$

$$B_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+|f(re^{i\theta})|\sin(k(\theta-\alpha))d\theta\geqslant 0, \tag{1}$$

© А. А. МОХОНЬКО, А. З. МОХОНЬКО, 2014

$$C_{\alpha\beta}(r,f)=2k\int\limits_{r_0}^{r}c_{\alpha\beta}(t,f)\left(\frac{1}{t^{k+1}}+\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)dt\geqslant 0,$$

где

$$c_{\alpha\beta}(t,f)=c_{\alpha\beta}(t,\infty,f)=\sum_{\substack{r_0<|\rho_n|\leqslant t\\ \alpha\leqslant\psi_n\leqslant\beta}}\sin(k(\psi_n-\alpha)),$$

а $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, рассматриваемые с учетом кратности,

$$S_{\alpha\beta}(r,f)=A_{\alpha\beta}(r,f)+B_{\alpha\beta}(r,f)+C_{\alpha\beta}(r,f). \tag{2}$$

Функция $c_{\alpha\beta}(t,f)$ — *считающая функция* полюсов ветви $f(z), z\in g_{\alpha\beta}$.

Для величин $A_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $B_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $C_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $c_{\alpha\beta}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ условимся использовать более простую запись $A_{\alpha\beta}(r,a)$, $B_{\alpha\beta}(r,a)$, $C_{\alpha\beta}(r,a)$, $c_{\alpha\beta}(r,a)$.

Неванлинновские характеристики имеют такие свойства [2, с. 41, 45]: пусть $f,g\in M_b$ и $f(z)$, $g(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, — однозначные ветви этих функций в угловой области $g_{\alpha\beta}$. Через $D_{\alpha\beta}(r,f)$ обозначим любую из характеристик $A_{\alpha\beta}(r,f)$, $B_{\alpha\beta}(r,f)$, $C_{\alpha\beta}(r,f)$. Тогда

$$D_{\alpha\beta}(r,f+g)\leqslant D_{\alpha\beta}(r,f)+D_{\alpha\beta}(r,g)+\ln 2,$$

$$D_{\alpha\beta}(r,f\cdot g)\leqslant D_{\alpha\beta}(r,f)+D_{\alpha\beta}(r,g), \tag{3}$$

$$D_{\alpha\beta}(r,f^2)=2D_{\alpha\beta}(r,f).$$

Каково бы ни было комплексное число $a\neq\infty$, справедливо соотношение

$$A_{\alpha\beta}(r,a)+B_{\alpha\beta}(r,a)+C_{\alpha\beta}(r,a)=S_{\alpha\beta}(r,f)+\varepsilon(r,a),\quad \varepsilon(r,a)=O(1). \tag{4}$$

Символы Ландау $O(\ldots)$, $o(\ldots)$ в статье используются при $r\to+\infty$.

Обозначим ($a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$)

$$\delta_{\alpha\beta}(a)=\delta_{\alpha\beta}(a,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{A_{\alpha\beta}(r,a)+B_{\alpha\beta}(r,a)}{S_{\alpha\beta}(r,f)}, \tag{5}$$

$\delta_{\alpha\beta}(a,f)$ — *дефект* в точке $a$ однозначной ветви $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$. Если $\delta_{\alpha\beta}(a)>0$, то $a$ называется *дефектным значением* функции $f\in M_b$.

Напомним, что функция $f\in M_b$ имеет конечный порядок роста $\rho$, если

$$\rho=\sup_{\forall\alpha,\beta}\varlimsup_{r\to+\infty}\ln^+ S_{\alpha\beta}(r,f)/\ln r<+\infty,\qquad -\infty<\alpha<\beta<+\infty. \tag{6}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(z,f,f_1,\ldots,f_s)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{j=k_0+\ldots+k_s}a_{k_0\ldots k_s}(z)f^{k_0}f_1^{k_1}\ldots f_s^{k_s}=0, \tag{7}$$

$a_{k_0\ldots k_s} \in M_b$, $f^{(j)} = f_j$, $j = 1, \ldots, s$. Пусть $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, и $a_{k_0\ldots k_s}(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, — однозначные ветви функции $f \in M_b$ и коэффициентов $a_{k_0\ldots k_s} \in M_b$ уравнения (7), такие, что при подстановке $f(z)$, $a_{k_0\ldots k_s}(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, в (7) вместо, соответственно, $f$, $a_{k_0\ldots k_s}(z)$ образуется тождество в $g_{\alpha\beta}$. Обозначим

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{j=k_0+\ldots+k_s} S_{\alpha\beta}(r, a_{k_0\ldots k_s}) = \sum S_{\alpha\beta}(r, a_{k_0\ldots k_s}).$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть функция* $f \in M_b$ *конечного порядка — решение уравнения* (7), *такое, что* $S_{\alpha\beta}(r,f) \neq O\big(\sum S_{\alpha\beta}(r, a_{k_0\ldots k_s})\big)$. *Если* $a \neq \infty$ *и* $\delta_{\alpha\beta}(a) > 0$, *то справедливо тождество*

$$P(z, a, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad z \in G. \tag{8}$$

*Если* $P(z, a, 0, \ldots, 0)$ *не обращается тождественно в нуль по совокупности переменных* $z$ *и* $a$, *то только конечное число значений* $a$ *может быть дефектным значением для решений* $f \in M_b$ *конечного порядка.*

***Замечание* 1.** Для случая, когда коэффициенты уравнения (7) — многочлены и $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — однозначное мероморфное решение конечного порядка роста, эта теорема доказана другим способом Ш. И. Стрелицем [4, с. 213].

Условие $S_{\alpha\beta}(r,f) \neq O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r, a_{k_0\ldots k_s})\right)$ означает, что рассматриваются решения $f \in M_b$ уравнения (7), скорость роста которых превышает скорость роста коэффициентов уравнения.

Считающая функция $c_{\alpha\beta}(t,a)$ описывает расположение корней уравнения $f(z) = a$ ($a$-точек) в $\{z = re^{i\theta}\colon \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ r_0 < r \leqslant t\}$. Поскольку для любого $a$ выполняется (4), сумма $A_{\alpha\beta}(r,a) + B_{\alpha\beta}(r,a) + C_{\alpha\beta}(r,a)$ не зависит существенно от $a$. Соотношение (4) дает верхнюю границу числа корней уравнения $f(z) = a$, справедливую для всех $r$ и $a$. Из теоремы 1 и определения дефекта $\delta_{\alpha\beta}(a)$ (5) получаем, что для решений $f \in M_b$ уравнения (7) в указанной сумме слагаемое $C_{\alpha\beta}(r,a)$ доминирует для любого $a \in \mathbb{C}$, кроме, возможно, конечного числа значений $a$, для которых выполняется тождество (8). Следовательно, $C_{\alpha\beta}(r,a)$ приближается к $S_{\alpha\beta}(r,f)$ — своей верхней границе, устанавливаемой соотношением (4), почти для всех $a$. Для решений $f \in M_b$ уравнения (7) существует разве что несколько значений $a$, для которых число корней уравнения $f(z) = a$ меньше максимально допустимого числа.

***Пример* 1.** Функция $f(z) = e^z \ln z \neq 0,\ \infty$, $z \in G = \{z\colon 2 \leqslant |z| < \infty\}$, $f \in A_b \subset M_b$, является решением уравнения

$$P(z, f, f') = f' - f\left(1 + \frac{1}{z \ln z}\right) = 0.$$

Это уравнение вида $a_{0,1}(z)f' + a_{1,0}(z)f = 0$, $a_{0,1}(z) = 1$, $a_{1,0}(z) = -1 - \dfrac{1}{z\ln z}$. Покажем, что для $f$ выполняются условия теоремы 1 и $\delta_{-\pi,\pi}(0) > 0$, $a = 0$ — дефектное значение функции $f$, для которого выполняется очевидное тождество $P(z, 0, 0) \equiv 0$. Действительно, возьмем $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$, $k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} = \dfrac{1}{2}$. Функция $f$ не имеет полюсов, поэтому (см. (1))

$$c_{-\pi,\pi}(t, \infty, f) \equiv 0, \quad t \geqslant 2; \qquad C_{-\pi,\pi}(r, f) \equiv 0, \quad r \geqslant 2;$$

$$S_{-\pi,\pi}(r,f) = A_{-\pi,\pi}(r,f) + B_{-\pi,\pi}(r,f) \;\Rightarrow\; \delta_{-\pi,\pi}(\infty) = 1.$$

Поскольку функция $f$ не имеет нулей, аналогично доказывается, что $S_{-\pi,\pi}(r,0) = A_{-\pi,\pi}(r,0) + B_{-\pi,\pi}(r,0)$. Отсюда и из (4) следует

$$A_{-\pi,\pi}(r,0) + B_{-\pi,\pi}(r,0) = S_{-\pi,\pi}(r,f) + \varepsilon(r,0), \quad \varepsilon(r,0) = O(1). \tag{9}$$

Оценим характеристику $S_{-\pi,\pi}(r,f)$. Имеем

$$|f(re^{i\theta})| = |e^{re^{i\theta}} \ln(re^{i\theta})| = e^{r\cos\theta}|\ln r + i\theta| = e^{r\cos\theta}(\ln r + O(1)), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Поэтому с учетом того, что $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$, $x \geqslant 0$, характеристика

$$B_{-\pi,\pi}(r,f) = \frac{1}{\pi r^{1/2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+|f(re^{i\theta})| \sin\left(\frac{1}{2}(\theta+\pi)\right) d\theta \sim \frac{1}{\pi r^{1/2}} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{r^{1/2}}{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right] d\theta = \frac{4\sqrt{2r}}{3\pi}, \quad r \to +\infty.$$

Поскольку

$$|f(te^{i\theta})|_{\theta=-\pi,\pi} = e^{t\cos\theta}(\ln t + O(1))|_{\theta=-\pi,\pi} = \frac{\ln t + O(1)}{e^t} < 1, \quad t > t_1,$$

то

$$\ln^+|f(te^{i\theta})|_{\theta=-\pi,\pi} = 0, \qquad t > t_1,$$

поэтому

$$A_{-\pi,\pi}(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{t^{3/2}} - \frac{t^{-1/2}}{r}\right) \left[\ln^+|f(te^{-i\pi})| + \ln^+|f(te^{i\pi})|\right] dt = O(1).$$

Из предыдущего следует $S_{-\pi,\pi}(r,f) = (1+o(1))\dfrac{4\sqrt{2r}}{3\pi}$. Тогда с учетом (5), (9) дефект $\delta_{-\pi,\pi}(0) = 1 > 0$.

Аналогично показывается, что для произвольных $\alpha$, $\beta$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, выполняется оценка $S_{\alpha\beta}(r,f) < r^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $r > r_1$. Поэтому (см. (6)) $f$ имеет конечный порядок роста.

Из (1) следует, что для коэффициентов $a_{0,1}(z) = 1$, $a_{1,0}(z) = -1 - \dfrac{1}{z\ln z}$, уравнения выполняется

$$S_{-\pi,\pi}(r,a_{0,1}), S_{-\pi,\pi}(r,a_{1,0}) = O(1) \;\Rightarrow\; S_{-\pi,\pi}(r,f) \neq O\left(S_{-\pi,\pi}(r,a_{0,1}) + S_{-\pi,\pi}(r,a_{1,0})\right).$$

Итак, мы показали, что для указанного решения уравнения выполняются условия и выводы теоремы.

Справедлива следующая теорема [5, с. 215]: пусть

$$F = p_t f^t + \ldots + p_1 f + p_0, \tag{10}$$

где $f, p_j \in M_b$, тогда

$$\begin{gathered} A_{\alpha\beta}(r, F) \leqslant t\, A_{\alpha\beta}(r, f) + \sum_{j=0}^{t} A_{\alpha\beta}(r, p_j) + O(1), \\ B_{\alpha\beta}(r, F) \leqslant t\, B_{\alpha\beta}(r, f) + \sum_{j=0}^{t} B_{\alpha\beta}(r, p_j) + O(1). \end{gathered} \tag{11}$$

Нам понадобятся следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Если $f \in M_b$ и имеет конечный порядок роста, то для любой однозначной ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, выполняется*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1). \tag{12}$$

**Лемма 2.** *Если $f \in M_b$ и имеет конечный порядок роста, то и производная $f'$ имеет конечный порядок роста. Для любой однозначной ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, выполняется*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(1), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть сначала $a = 0$. Поскольку $f$ — решение уравнения (7), то

$$a_{0\ldots0}(z) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=k_0+\ldots+k_s} a_{k_0\ldots k_s}(z) f^{k_0}(z) f_1^{k_1}(z) \ldots f_s^{k_s}(z) \equiv 0, \quad z \in g_{\alpha\beta},$$

или (аргумент $z$ не пишем)

$$\frac{a_{0\ldots0}}{f^n} \equiv -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{f^{n-j}} \sum_{j=k_0+\ldots+k_s} a_{k_0\ldots k_s} \left(\frac{f_1}{f}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{f_s}{f}\right)^{k_s}, \quad z \in g_{\alpha\beta}. \tag{14}$$

Предположим, что $a_{0\ldots0}(z) \not\equiv 0$. В правой части (14) имеем многочлен степени $n-1$ от функции $\dfrac{1}{f}$. Учитывая, что

$$nA_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f}\right) = A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f^n}\right) = A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{a_{0\ldots0}}{f^n}\frac{1}{a_{0\ldots0}}\right) \leqslant A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{a_{0\ldots0}}{f^n}\right) + A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{a_{0\ldots0}}\right),$$

и применяя к (14) неравенства (11) и лемму 2, имеем

$$nA_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f}\right) - A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{a_{0\ldots0}}\right) \leqslant A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{a_{0\ldots0}}{f^n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (n-1)A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{1\leqslant k_0+\ldots+k_s\leqslant n}A_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})+O(1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\sum_{1\leqslant k_0+\ldots+k_s\leqslant n}A_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})+A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{a_{0\ldots 0}}\right)+O(1). \qquad (15)$$

Аналогично получаем оценку

$$B_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\sum_{1\leqslant k_0+\ldots+k_s\leqslant n}B_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})+B_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{a_{0\ldots 0}}\right)+O(1).$$

Из этого неравенства и из (15), учитывая (2), (4), находим

$$A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{f}\right)+B_{\alpha\beta}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\sum_{0\leqslant k_0+\ldots+k_s\leqslant n}S_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})+O(1). \qquad (16)$$

По условию $S_{\alpha\beta}(r,f)\neq O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})\right)$. Поэтому существует последовательность $r_m\to\to\infty$, для которой выполняется $\sum S_{\alpha\beta}(r_m,a_{k_0\ldots k_s})=o(S_{\alpha\beta}(r_m,f))$. Отсюда и из (16) следует

$$A_{\alpha\beta}\left(r_m,\frac{1}{f}\right)+B_{\alpha\beta}\left(r_m,\frac{1}{f}\right)=o(S_{\alpha\beta}(r_m,f)),\quad r_m\to\infty,\qquad \text{т. е.}\quad \delta_{\alpha\beta}(0)=0.$$

Значит, если $\delta_{\alpha\beta}(0)>0$, то $a_{0\ldots 0}(z)\equiv P(z,0,\ldots,0)\equiv 0$.

Пусть теперь $a\neq 0,\ \delta_{\alpha\beta}(a,f)>0$. Рассмотрим функцию $u(z)=f(z)-a$. Тогда

$$S_{\alpha\beta}(r,u)\overset{(3)}{=}S_{\alpha\beta}(r,f)+O(1)\neq O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})\right)\qquad \text{и}\qquad \delta_{\alpha\beta}(0,u)>0.$$

Но $u$ является решением дифференциального уравнения $P(z,u+a,u_1,\ldots,u_s)=0$. Поскольку $\delta_{\alpha\beta}(0,u)>0$, согласно доказанному выше выполняется (8).

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 2.** Все решения уравнения Пенлеве $f''=2f^3+zf+c,\ c=\mathrm{const}$, являются однозначными мероморфными в $\mathbb{C}$ функциями конечного порядка. Решениями уравнения $(f')^2=4f^3-g_2f-g_3,\ g_j=\mathrm{const}$, являются эллиптические функции Вейерштрасса — однозначные мероморфные в $\mathbb{C}$ функции конечного порядка. Свойства однозначных мероморфных функций $f$ удобнее изучать, используя характеристики $m(r,f),\ T(r,f),\ m(r,a)=m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $T(r,a)=T\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ [2, с. 26]. Для таких функций справедлива лемма о логарифмической производной [2, с. 122] $m\left(r,\dfrac{f'}{f}\right)=o(T(r,f),\ r\notin E\subset[0,+\infty)$, mes $E<+\infty$. Если же $f$ имеет конечный порядок, то $m\left(r,\dfrac{f'}{f}\right)=O(\ln r)\ \forall\, r\in[0,+\infty)$. По определению неванлинновский дефект $\delta(a,f)=\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{m(r,a)}{T(r,f)}$. Характеристики $m(r,f),\ T(r,f),\ T(r,a)$ имеют свойства, аналогичные (3), (4), (11). Повторяя доказательство теоремы 1, получаем такое утверждение.

Пусть $f$ — однозначное мероморфное в $\mathbb{C}$ решение уравнения (7) с однозначными мероморфными в $\mathbb{C}$ коэффициентами $a_{k_0\ldots k_s}(z)$, такое, что $\sum T(r, a_{k_0\ldots k_s}) = o(T(r,f))$. Если $a \neq \infty$ и $\delta(a,f) > 0$, то справедливо тождество (8).

***Пример* 2.** Все решения уравнения Пенлеве $f'' = 6f^2 + z$ являются однозначными трансцендентными мероморфными в $\mathbb{C}$ функциями конечного порядка роста [6]. Уравнение Пенлеве не имеет решений с дефектными значениями. Действительно, пусть $f$ — решение уравнения Пенлеве. Справедливо тождество $f(z)\dfrac{f''(z)}{f(z)} - z \equiv 6f^2(z),\ z \in \mathbb{C}.$ Из свойств неванлинновской характеристики $m(r,f)$ и леммы о логарифмической производной [2, с. 44, 122] следует

$$2m(r,f) \leqslant m(r,f) + m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + \ln r + O(1) = m(r,f) + O(\ln r) \ \Rightarrow\ m(r,f) = O(\ln r).$$

Поскольку для трансцендентной мероморфной функции $f$ выполняется $\lim_{r\to\infty} \dfrac{T(r,f)}{\ln r} = +\infty$, из предыдущего следует $\delta(\infty, f) = \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{m(r,f)}{T(r,f)} = 0$. Поэтому уравнение Пенлеве не имеет решений, для которых $\infty$ была бы дефектным значением (в частности, не имеет целых решений).

Предположим, что $a \neq 0$ является дефектным значением для решения $f$ уравнения Пенлеве. По замечанию 2 должно выполняться тождество $6a^2 + z \equiv 0$, что невозможно.

***Пример* 3.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f' = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1}(z) f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2}(z) f^j}, \qquad p_{jq}(z) = (c_{jq} + o(1)) z^{a_{jq}} (\ln z)^{b_{jq}},$$

$$c_{jq} \in \mathbb{C}, \quad c_{t1}, c_{s2} \neq 0, \quad a_{jq}, b_{jq} \in \mathbb{R}; \qquad p_{jq} \in M_b, \tag{17}$$

например, $p_{jq}(z) = \sin \dfrac{1}{\sqrt{z}} \ln z \sim z^{-1/2} \ln z,\ z \to \infty$. Известно (см. [12]), что в этом случае любое решение $f \in M_b$ уравнения (17) имеет конечный порядок роста. Известно также (см. [3]), что если $f \in M_b$ — решение уравнения (17) и (17) не является уравнением Риккати $f' = p_{21} f^2 + p_{11} f + p_{01}$, то

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq})\right) + O(1) = O(1) \quad \text{для любых} \quad \alpha, \beta.$$

Это означает, что из уравнений (17) только уравнение Риккати может иметь решения $f \in M_b$, растущие быстрее коэффициентов, т. е. такие, что

$$S_{\alpha\beta}(r,f) \neq O(1). \tag{18}$$

Поэтому далее изучаем дефектные значения решений $f \in M_b$ уравнения

$$f' = p_2 f^2 + p_1 f + p_0, \qquad p_j(z) = (c_j + o(1)) z^{a_j} (\ln z)^{b_j}, \tag{19}$$

$c_j \in \mathbb{C}$, $c_2 \neq 0$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$; $p_j \in M_b$, $j = 0, 1, 2$. Покажем, что уравнение Риккати не имеет решений, для которых $\infty$ была бы дефектным значением. Из (1) и (19) следует оценка характеристик коэффициентов $\left(k = \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} > 0\right)$:

$$S_{\alpha\beta}(r, p_j) = A_{\alpha\beta}(r, p_j) + B_{\alpha\beta}(r, p_j) + C_{\alpha\beta}(r, p_j) = O(1), \quad j = 0, 1, 2. \tag{20}$$

Пусть $f$ — решение уравнения Риккати. Тогда $p_2^{-1}\left(f\left(\dfrac{f'}{f} - p_1\right) - p_0\right) = f^2$. Поэтому, учитывая свойства характеристик (3), (4) и лемму 1, имеем

$$2A_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant A_{\alpha\beta}(r, f) + A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{p_2}\right) + A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + A_{\alpha\beta}(r, p_0) + A_{\alpha\beta}(r, p_1) +$$

$$+ O(1) \overset{(12),(20)}{=} A_{\alpha\beta}(r, f) + A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{p_2}\right) + O(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{p_2}\right) + O(1). \tag{21}$$

Аналогично получаем оценку

$$B_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{p_2}\right) + O(1).$$

Отсюда и из (21), учитывая (2), (4), имеем

$$A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{p_2}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{p_2}\right) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant S_{\alpha\beta}(r, p_2) + O(1) \overset{(20)}{=} O(1) \ \Rightarrow \ A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f) = O(1).$$

Из предыдущего и из (18) следует $\delta_{\alpha\beta}(\infty, f) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f)}{S_{\alpha\beta}(r, f)} = 0$, т. е. уравнение Риккати не имеет решений, для которых $\infty$ была бы дефектным значением (в частности, не имеет целых решений).

По теореме 1 для того, чтобы $a \neq \infty$ было дефектным значением решения $f$, необходимо, чтобы

$$p_2(z)a^2 + p_1(z)a + p_0(z) \equiv 0, \quad z \in G. \tag{22}$$

Подставляя $p_0(z)$ из (22) в (19), получаем $f' = (f - a)(p_2(f + a) + p_1)$ или

$$f' = (f - a)(p_2(z)f + q(z)), \quad q(z) = p_2(z)a + p_1(z). \tag{23}$$

Одним из решений (23) является $f(z) \equiv a$, $z \in G$. В силу теоремы единственности все другие решения уравнения (23) не принимают значение $a$, следовательно, для них $a$ является дефектным значением, $\delta_{\alpha\beta}(a) = 1 > 0$.

Запишем общее решение уравнения (23). Выполним в уравнении (23) замену $f = \dfrac{1}{u} + a$. Сократив его затем на $\dfrac{1}{u}$, получим

$$\frac{u'}{u} = -\frac{p_2(z)}{u} - p_2(z)a - q(z). \tag{24}$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид [10, с. 39] ($C = \text{const}$)

$$u = Ce^{P(z)} - e^{P(z)} \int\limits_{z_0}^{z} p_2(t)e^{-P(t)}dt, \qquad P(t) = -\int\limits_{z_0}^{t} (p_2(\tau)a + q(\tau))d\tau. \tag{25}$$

Это решение не имеет полюсов и принадлежит кольцу $A_b$. Видим, что уравнение Риккати (23) имеет решение $f = \dfrac{1}{u} + a$ с дефектным значением $a$.

Уравнение Риккати

$$f' = p_2(z)(f-a)(f-h), \qquad a \neq h, \quad a, h \in \mathbb{C}, \tag{26}$$

имеет решения $f(z) \equiv a$, $f(z) \equiv h$, $z \in G$; любое другое решение этого уравнения находится по формуле $\dfrac{f-a}{f-h} = C \cdot e^{(a-h)\int_{z_0}^{z} p_2(\tau)d\tau}$, $C = \text{const} \neq 0$. Эти решения принадлежат полю $M_b$ и, как видно из упомянутой формулы, не принимают значений $a$ и $h$. Следовательно, каждое решение (26) (отличное от $f(z) \equiv a$, $f(z) \equiv h$, $z \in G$) имеет два дефектных значения: $a$ и $h$. Более двух дефектных значений ни одно решение уравнения Риккати (19) иметь не может.

Доказана также следующая теорема.

**Теорема 2.** *Все решения $f$ линейного неоднородного уравнения*

$$f^{(n)} + p_1(z)f^{(n-1)} + \ldots + p_n(z)f = g(z), \tag{27}$$

*в котором коэффициенты $g$, $p_j \in A_b$, $j = 1, \ldots, n$, также принадлежат кольцу $A_b$, $f \in A_b$. Если, кроме того, коэффициенты $g$, $p_j$, $j = 1, \ldots, n$, — голоморфные в $G$ функции, причем*

$$p_j(z) = (c_j + o(1))z^{q_j}, \qquad c_j \in \mathbb{C}, \quad q_j, \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{28}$$

*а коэффициент $g(z), z \in G$, — функция конечного порядка роста, то все решения $f$ имеют конечный порядок роста. Если $a \neq \infty$, $\delta_{\alpha\beta}(a) > 0$ и $S_{\alpha\beta}(r, f) \neq O\big(S_{\alpha\beta}(r, g) + 1\big)$, то $p_n(z)a \equiv$ $\equiv g(z)$, $z \in G$.*

***Доказательство.*** По теореме Коши существует единственное голоморфное в круге $d =$ $= \{z\colon |z - z_0| < \varepsilon\} \subset G$ решение $f(z)$, $z \in d$, уравнения (27), удовлетворяющее начальным условиям $f^{(j)}(z_0) = y_0^j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Правильный элемент $f(z)$, $z \in d$, можно аналитически продолжить по любой непрерывной кривой $L\colon z = \varphi(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\varphi(0) = z_0$, носитель которой $[L] \subset G$ [8, с. 36]. Правильный элемент $f(z)$, $z \in d$, порождает аналитическую в области $G$ функцию $f(z)$, $z \in G$, с единственной особой точкой в $\infty$, поэтому $f \in A_b$ [9, с. 524]; $f(z)$, $z \in G$, — решение уравнения (27).

Рассмотрим теперь частный случай, когда коэффициенты $g$, $p_j$, $j = 1, \ldots, n$, уравнения (27) — голоморфные в $G$ функции. Уравнение

$$f^{(n)} + p_1(z) f^{(n-1)} + \ldots + p_n(z) f = 0, \quad z \in G = \{z \colon r_0 \leqslant |z| < +\infty\}, \tag{29}$$

с коэффициентами $p_j$, $j = 1, \ldots, n$, — голоморфными в $G$ функциями, имеет $n$ линейно независимых решений вида (см. [4, с. 184])

$$f_s(z) = z^{\lambda} \sum_{t=0}^{k_s} b_{st}(z) \ln^t z, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{30}$$

где $b_{st}(z)$, $z \in G$, — голоморфные функции, для которых, вообще говоря, $\infty$ является существенно особой точкой. Таким образом, $f_s \in A_b$, $s = 1, \ldots, n$, следовательно, любое решение $f$ уравнения (29) принадлежит кольцу $A_b$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (27) имеет вид

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n} C_s f_s(z) + F(z), z \in G, \qquad C_s = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{31}$$

где $F$ — частное решение (27), которое можно найти методом вариации постоянной [10, с. 102] ($z_0 \in G,\ z_0$ — фиксированное):

$$F(z) = C_1(z) f_1(z) + \ldots + C_n(z) f_n(z), \quad C_j(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{W_j(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta,$$

$$W(\zeta) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad z \in G, \tag{32}$$

$W_j(\zeta)$ — определитель, полученный из определителя Вронского $W(\zeta)$ заменой $j$-го столбца столбцом $\operatorname{colon}(0, 0, \ldots, g(z))$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь интеграл берется вдоль произвольной кривой $L$, соединяющей точки $z_0$ и $z$, точки носителя которой $[L]$ принадлежат $G$, $[L] \subset G$. Единственной особой точкой аналитической функции $\dfrac{W_j(z)}{W(z)}$, $z \in G$, является $\infty$. Поэтому $\dfrac{W_j}{W} \in A_b$. Интеграл $\displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{W_j(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta$, рассматриваемый вдоль всех возможных кривых $L$, соединяющих точки $z_0$ и $z$, $[L] \subset G$, порождает аналитическую функцию $C_j(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{W_j(\zeta)}{W(\zeta)} d\zeta,\ z \in G$ [11, с. 96], с единственной особой точкой в $\infty$. Поэтому функция $C_j \in A_b$, $j = 1, \ldots, n$. Отсюда и из (31) вновь следует, что все решения $f$ уравнения (27) принадлежат кольцу $A_b$.

Пусть, в частности, в (29) коэффициенты имеют вид (28), например $p_j(z) = \sin \dfrac{1}{z}$. Тогда все решения $f_k$ уравнения (29) имеют конечный порядок роста [4, с. 184].

Предположим теперь, что в (27) коэффициенты $p_j,\ j=1,\ldots,n,$ — голоморфные в $G$ функции вида (28), а $g(z), z\in G,$ — голоморфная функция конечного порядка роста [2, с. 61, 65] (такая функция может быть трансцендентной). В этом случае все решения $f_k$ уравнения (29) имеют конечный порядок роста. Согласно лемме 2 производные $f_k^{(j)}$, $j=1,\ldots,n-1$, $k=1,\ldots,n$, также имеют конечный порядок. Из (32) и свойств (3), (4) последовательно получаем, что функции $W(\zeta)$, $W_j(\zeta)$, $\dfrac{W_j(z)}{W(z)}$, $z\in G$, конечного порядка роста, $\dfrac{W_j}{W}\in A_b$. Тогда и $C_j(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z}\frac{W_j(\zeta)}{W(\zeta)}d\zeta$, $z\in G$, $j=1,\ldots,n$, имеют конечный порядок. Из предыдущего и из (31), (32) следует, что в рассматриваемом случае все решения неоднородного уравнения (27) имеют конечный порядок.

Применим к уравнению (29) теорему 1. Для этого оценим неванлинновские характеристики коэффициентов $p_j,\ j=1,\ldots,n$, вида (28). Имеем $|p_j(re^{i\theta})|=|c_j+o(1)|r^{q_j},\ c_j\in\mathbb{C},\ q_j\in\mathbb{Z}$, $j=1,\ldots,n$, поэтому

$$A_{\alpha\beta}(r,p_j)+B_{\alpha\beta}(r,p_j)\overset{(1)}{=}\frac{k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)[\ln^+|p_j(te^{i\alpha})|+\ln^+|p_j(te^{i\beta})|]dt+$$

$$+\frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+|p_j(re^{i\theta})|\sin(k(\theta-\alpha))d\theta\overset{(28)}{=}O(1),\quad k=\frac{\pi}{\beta-\alpha}>0.$$

Следовательно, условие $S_{\alpha\beta}(r,f)\neq O\left(\sum S_{\alpha\beta}(r,a_{k_0\ldots k_s})\right)$, налагаемое на скорость роста решений в теореме 1, для теоремы 2 принимает вид $S_{\alpha\beta}(r,f)\neq O\big(S_{\alpha\beta}(r,g)+1\big)$. Если $a\neq\infty$, $\delta_{\alpha\beta}(a)>0$, то тождество (8) принимает форму $p_n(z)a\equiv g(z)$, $z\in G$.

***Доказательство леммы* 1.** Рассмотрим однозначные ветви $f(z)$,

$$z\in g_{A,A+\pi}=\left\{z=te^{i\varphi}\colon A\leqslant\varphi\leqslant A+\pi, r_0\leqslant t<+\infty\right\}$$

и

$$z\in g_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}=\left\{z=te^{i\varphi}\colon A-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant A+\frac{3\pi}{2}, r_0\leqslant t<+\infty\right\}.$$

Множество нулей и полюсов ветви $f(z)$, $z\in g_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}$ обозначим через $\{c_q\}$, $c_q=|c_q|e^{i\varphi_q}\in$ $\in\ \{c_q\}$. Считающая функция нулей и полюсов ветви $f(z)$, $z\in g_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}$ $\Big($см. (1), $k=\pi/\left(A+3\pi/2-(A-\pi/2)\right)=1/2\Big)$, имеет вид

$$c_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(s,0,\infty)\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant s\\ A-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_q\leqslant A+\frac{3\pi}{2}}}\sin\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_q-A+\frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{33}$$

Число нулей и полюсов ветви $f(z)$, $z\in g_{A,A+\pi}$, таково:

$$n_{A,A+\pi}(s,0,\infty) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant s\\ A\leqslant\varphi_q\leqslant A+\pi}} 1. \tag{34}$$

Если $A \leqslant \varphi \leqslant A+\pi$, то $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\varphi - A + \dfrac{\pi}{2}\right) \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$. Поэтому

$$\sin\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_q - A + \frac{\pi}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad A \leqslant \varphi_q \leqslant A+\pi. \tag{35}$$

Из (34), (35) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, n_{A,A+\pi}(s,0,\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant s\\ A<\varphi_q<A+\pi}} 1 \leqslant \sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant s\\ A\leqslant\varphi_q\leqslant A+\pi}} \sin\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_q - A + \frac{\pi}{2}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant s\\ A-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_q\leqslant A+\frac{3\pi}{2}}} \sin\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_q - A + \frac{\pi}{2}\right)\right) = c_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(s,0,\infty),$$

т. е.

$$n_{A,A+\pi}(s,0,\infty) \leqslant \sqrt{2}\, c_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(s,0,\infty). \tag{36}$$

Считающая функция нулей и полюсов $c_{\alpha\beta}(t,0,\infty)$ является неубывающей, поэтому (см. (1)) ($r_0 \leqslant s < R$)

$$C_{\alpha\beta}(R,0,\infty) = 2k\int\limits_{r_0}^{R} c_{\alpha\beta}(t,0,\infty)\left(\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{t^{k-1}}{R^{2k}}\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant 2k c_{\alpha\beta}(s,0,\infty)\int\limits_{s}^{R}\left(\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{t^{k-1}}{R^{2k}}\right)dt = 2c_{\alpha\beta}(s,0,\infty)\left.\left(\frac{t^k}{R^{2k}} - \frac{1}{t^k}\right)\right|_s^R =$$

$$= 2c_{\alpha\beta}(s,0,\infty)\frac{R^{2k}-s^{2k}}{s^k R^{2k}}.$$

Следовательно,

$$c_{\alpha\beta}(s,0,\infty) \leqslant C_{\alpha\beta}(R,0,\infty)\frac{s^k R^{2k}}{2(R^{2k}-s^{2k})}, \quad r_0 \leqslant s < R. \tag{37}$$

Если в (37)

$$\alpha = A - \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = A + \frac{3\pi}{2}, \qquad \text{то} \quad k = \frac{\pi}{A + 3\pi/2 - (A - \pi/2)} = \frac{1}{2},$$

поэтому

$$c_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(s,0,\infty) \leqslant \frac{\sqrt{s}R}{2(R-s)} C_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,0,\infty), \quad r_0 \leqslant s < R. \tag{38}$$

Поскольку

$$C_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,0,\infty) = C_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}\left(R,\frac{1}{f}\right) + C_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,f) \leqslant$$

$$\leqslant S_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}\left(R,\frac{1}{f}\right) + S_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,f) \overset{(4)}{=} 2S_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,f) + O(1),$$

из (38) следует

$$c_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(s,0,\infty) \leqslant \frac{\sqrt{s}R}{R-s}\left(S_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,f) + O(1)\right), \quad r_0 \leqslant s < R.$$

Отсюда и из (36) получаем

$$n_{A,A+\pi}(s,0,\infty) \leqslant \frac{\sqrt{2s}R}{R-s}\left(S_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(R,f) + O(1)\right), \quad r_0 \leqslant s < R. \tag{39}$$

Функция $z = \zeta e^{iA}$ осуществляет взаимно однозначное отображение области $\overline{D} = \{\zeta = re^{i\theta}\colon 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ r_0 \leqslant r < +\infty\}$ на $g_{A,A+\pi}$. При этом отображении однозначной ветви $f(z), z \in g_{A,A+\pi}$, соответствует функция

$$w(\zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} f(\zeta e^{iA}), \quad \zeta \in \overline{D}; \tag{40}$$

любому полюсу (нулю) $c_q = |c_q|e^{i\varphi_q} \in \{c_q\}$ ветви $f(z),\ z \in g_{A,A+\pi}$, соответствует полюс (нуль) $\zeta_q = c_q e^{-iA}$, $\zeta_q = |\zeta_q|e^{i\theta_q} = |c_q|e^{i(\varphi_q - A)}$ функции $w(\zeta),\ \zeta \in \overline{D}$. Функция $w(\zeta),\ \zeta \in \overline{D}$, мероморфна в области $\overline{D}$.

Из (40) следует [2, с. 41], что неванлинновские характеристики таковы:

$$S_{0,\pi}(r,w) = S_{A,A+\pi}(r,f), \qquad B_{0,\pi}(r,w) = B_{A,A+\pi}(r,f), \tag{41}$$

а число нулей и полюсов функции $w(\zeta),\ \zeta \in \overline{D}$, в области $\{\zeta = re^{i\theta}\colon 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ r_0 \leqslant r \leqslant s\}$ равно числу нулей и полюсов ветви $f(z),\ z \in g_{A,A+\pi}$, в области $\{z = re^{i\varphi}\colon A \leqslant \theta \leqslant A+\pi,\ r_0 \leqslant r \leqslant s\}$:

$$n_{0,\pi}(r,0,\infty) = n_{A,A+\pi}(r,0,\infty). \tag{42}$$

Учитывая (40), имеем $w'(\zeta) = f'(\zeta e^{iA})e^{iA}$. Поэтому

$$\left|\frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)}\right| = \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|, \qquad z = re^{i\varphi} = z = \zeta e^{iA} = re^{i(\theta+A)}, \quad \theta = \varphi - A, \quad \theta_q = \varphi_q - A. \tag{43}$$

Таким образом ($\varkappa \in (0,1)$),

$$\int_0^{\pi}\left(\left|\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right|\right)^{\varkappa} d\theta = \int_0^{\pi}\left|\frac{f'(re^{i(\theta+A)})}{f(re^{i(\theta+A)})}\right|^{\varkappa} d\theta = \int_A^{A+\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^{\varkappa} d\varphi. \tag{44}$$

Далее через $K$ будем обозначать различные константы $K = \mathrm{const} > 0$. В [7] доказана оценка: если $w(\zeta), \zeta \in \overline{D} = \{\zeta = re^{i\theta}\colon 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ r_0 \leqslant r < +\infty\}$, — мероморфная функция, $\{\zeta_q\}$ — множество ее нулей и полюсов, $\zeta_q = |\zeta_q|e^{i\theta_q} \in \{\zeta_q\}$, то

$$K\left|\frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)}\right| < \frac{S_{0,\pi}(2r,w)+1}{\sin^2\theta} + \sum_{r_0<|\zeta_q|<2r} \frac{\sin\theta_q}{\sin\theta|\zeta-\zeta_q|}, \tag{45}$$

$S_{0,\pi}(s,w)$ — неванлинновская характеристика функции $w(\zeta)$, $\zeta \in \overline{D}$; сумма берется по всем $\zeta_q \in \{\zeta_q\}$, $r_0 < |\zeta_q| < 2r$.

Из (40), (41) и (43) следует, что для функции $f(z)$, $z \in g_{A,A+\pi}$, формула (45) преобразуется к виду $(r=t)$

$$K\left|\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}\right| < \frac{S_{A,A+\pi}(2t,f)+1}{\sin^2(\varphi-A)} + \sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2t\\ A\leqslant\varphi_q\leqslant A+\pi}} \frac{\sin(\varphi_q-A)}{\sin(\varphi-A)|te^{i(\varphi-A)}-c_qe^{-iA}|}. \tag{46}$$

Пусть $\varepsilon$ — наперед заданное число, $0<\varepsilon<1$. Использовав известное неравенство [2, с. 118] $\left(\sum_q d_q\right)^{\varkappa} \leqslant \sum_q (d_q)^{\varkappa}$, $d_q > 0$, где $\dfrac{1-\varepsilon}{2} < \varkappa < \dfrac{1}{2}$, проинтегрируем (45) на $[0,\pi]$. Получим $(0 \leqslant \sin\theta_q \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta_q \leqslant \pi)$

$$K\int_0^{\pi}\left|\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right|^{\varkappa}d\theta < (S_{0,\pi}(2r,w)+1)^{\varkappa}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^{2\varkappa}\theta} + \sum_{r_0<|\zeta_q|<2r}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^{\varkappa}\theta|re^{i\theta}-\zeta_q|^{\varkappa}}. \tag{47}$$

Поскольку $\varkappa < \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x$, если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^{2\varkappa}\theta} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin^{2\varkappa}\theta} < 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\varkappa}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\theta^{2\varkappa}} = \frac{\pi}{1-2\varkappa}. \tag{48}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2},$$

получаем

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^{\varkappa}\theta|re^{i\theta}-\zeta_q|^{\varkappa}} \leqslant \left(\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^{2\varkappa}\theta}\right)^{1/2}\left(\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{|re^{i\theta}-\zeta_q|^{2\varkappa}}\right)^{1/2} \overset{(48)}{<}$$

$$\overset{(48)}{<} \left(\frac{\pi}{1-2\varkappa}\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|re^{i\theta}-|\zeta_q||^{2\varkappa}}\right)^{1/2} < \left(\frac{\pi}{1-2\varkappa}\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(r\sin\theta)^{2\varkappa}}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{1-2\varkappa}\right)^{1/2} \left(2\int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta}{(r\sin\theta)^{2\varkappa}}\right)^{1/2} \overset{(48)}{<} \frac{\sqrt{2}}{r^{\varkappa}}\frac{\pi}{1-2\varkappa}. \tag{49}$$

Из (47), (48), (49) следует $\left(n_{0,\pi}(2r,0,\infty) = \sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2r\\ 0\leqslant\theta_q\leqslant\pi}} 1\right)$

$$K\int\limits_0^{\pi} \left|\frac{w'(re^{i\theta})}{w(re^{i\theta})}\right|^{\varkappa} d\theta < (S_{0,\pi}(2r,w)+1)^{\varkappa} + \frac{n_{0,\pi}(2r,0,\infty)}{r^{\varkappa}}.$$

Отсюда и из (41), (42), (44) получаем

$$K\int\limits_A^{A+\pi} \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|^{\varkappa} d\theta < (S_{A,A+\pi}(2r,f)+1)^{\varkappa} + \frac{n_{A,A+\pi}(2r,0,\infty)}{r^{\varkappa}}. \tag{50}$$

Известно неравенство [2, с. 116] (формула (1.2′)): если $g(x)\geqslant 0,\ a\leqslant x\leqslant b,$ — измеримая функция, то

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln^+ g(x)dx \leqslant \ln^+\left\{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(x)dx\right\} + \ln 2. \tag{51}$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_A^{A+\pi} \ln^+\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi = \frac{1}{\varkappa\pi}\int\limits_A^{A+\pi} \ln^+\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^{\varkappa} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa}\ln^+\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_A^{A+\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^{\varkappa} d\varphi\right\} + \frac{\ln 2}{\varkappa}. \tag{52}$$

Из (50) и (52), с учетом неравенства $\ln^+|a+b| \leqslant \ln^+|a| + \ln^+|b| + \ln 2$, следует

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_A^{A+\pi} \ln^+\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi \leqslant \ln(S_{A,A+\pi}(2r,f)+1)+$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\ln^+\frac{n_{A,A+\pi}(2r,0,\infty)}{r^{\varkappa}} + \frac{2\ln 2}{\varkappa} + \ln K. \tag{53}$$

Если функция $f\in M_b$ имеет конечный порядок $\rho$, то, учитывая (6), для любых $\alpha,\ \beta,$ $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$, выполняется

$$S_{\alpha\beta}(r,f) < r^{\rho+\frac{\varepsilon}{4}}, \qquad \varepsilon>0, \quad r\geqslant r(\alpha,\beta,\varepsilon). \tag{54}$$

В этом случае (39) преобразуется к виду $(R=3r,\ s=2r,\ r>r(A))$

$$n_{A,A+\pi}(2r,0,\infty) \leqslant 6\sqrt{r}\left(S_{A-\frac{\pi}{2},A+\frac{3\pi}{2}}(3r,f)+O(1)\right) \overset{(54)}{<} r^{\rho+\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{3}}.$$

Отсюда и из (53), (54), получаем $\left(\dfrac{1}{2}-\varkappa<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{A+\pi}\ln^+\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|d\varphi \leqslant \ln r^{\rho+\frac{\varepsilon}{3}}+\frac{1}{\varkappa}\ln r^{\rho+\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{3}-\varkappa} < \frac{\rho+\varepsilon}{\varkappa}\ln r. \tag{55}$$

Пусть $[\alpha,\beta]\subset[\alpha,\alpha+m\pi]$, $m\in\mathbb{N}$. Тогда $(0\leqslant k(\varphi-\alpha)\leqslant\pi,\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$

$$B_{\alpha\beta}\left(r,\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right)=\frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|\sin(k(\varphi-\alpha))d\varphi<$$

$$<\frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+\left|\frac{f'}{f}\right|d\varphi \leqslant \frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+m\pi}\ln^+\left|\frac{f'}{f}\right|d\varphi=\frac{2k}{\pi r^k}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\alpha+(j-1)\pi}^{\alpha+j\pi}\ln^+\left|\frac{f'}{f}\right|d\varphi. \tag{56}$$

Обозначим $A=\alpha+(j-1)\pi$. Тогда $A+\pi=\alpha+j\pi$,

$$\int\limits_{\alpha+(j-1)\pi}^{\alpha+j\pi}\ln^+\left|\frac{f'}{f}\right|d\varphi=\int\limits_{A}^{A+\pi}\ln^+\left|\frac{f'}{f}\right|d\varphi \overset{(55)}{<} \pi\frac{\rho+\varepsilon}{\varkappa}\ln r, \qquad r>r(\alpha+j\pi).$$

Из этого неравенства и из (56) следует $\left(k=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}>0\right)$

$$B_{\alpha\beta}\left(r,\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right)<\frac{2k}{r^k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho+\varepsilon}{\varkappa}\ln r=\frac{2k(\rho+\varepsilon)m}{\varkappa}\frac{\ln r}{r^k}=o(1), \quad r\to\infty. \tag{57}$$

Докажем оценку (12). Из (1) следует

$$\frac{\pi}{k}A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{f'}{f}\right)=\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\ln^+\left|\frac{f'(te^{i\alpha})}{f(te^{i\alpha})}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\ln^+\left|\frac{f'(te^{i\beta})}{f(te^{i\beta})}\right|dt=I_\alpha+I_\beta. \tag{58}$$

Оценим интеграл $I_\alpha$ ($I_\beta$ оценивается аналогично). Пусть теперь $A=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $A+\pi=$ $=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$, $A-\dfrac{\pi}{2}=\alpha-\pi$, $A+\dfrac{3\pi}{2}=\alpha+\pi$. Учитывая (39), получаем, что для числа нулей и полюсов ветви $f(z)$, $z\in g_{\alpha-\frac{\pi}{2},\alpha+\frac{\pi}{2}}$, в области $\left\{z=te^{i\varphi}\colon \alpha-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\alpha+\dfrac{\pi}{2}, r_0\leqslant t<s\right\}$ выполняется оценка

$$n_{\alpha-\pi/2,\alpha+\pi/2}(s,0,\infty)\leqslant\frac{\sqrt{2s}R}{R-s}\left(S_{\alpha-\pi,\alpha+\pi}(R,f)+O(1)\right),\quad r_0\leqslant s<R. \tag{59}$$

Если в формуле (46) положить $A=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi=\alpha$, то получим

$$K\left|\frac{f'(te^{i\alpha})}{f(te^{i\alpha})}\right|<S_{\alpha-\pi/2,\alpha+\pi/2}(2t,f)+1+\sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2t\\ \alpha-\pi/2\leqslant\varphi_q\leqslant\alpha+\pi/2}}\frac{\sin(\varphi_q-\alpha+\pi/2)}{|t-|c_q||}.$$

Отсюда и из (58) следует

$$I_\alpha=\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\ln^+\left|\frac{f'(te^{i\alpha})}{f(te^{i\alpha})}\right|dt<\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{t^{k+1}}\ln^+S_{\alpha-\pi/2,\alpha+\pi/2}(2t,f)dt+$$

$$+\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\ln^+\sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2t\\ \alpha-\pi/2\leqslant\varphi_q\leqslant\alpha+\pi/2}}\frac{dt}{|t-|c_q||}+O(1)=J_1+J_2+O(1). \tag{60}$$

Оценим интеграл $J_2$, применив формулу интегрирования по частям. Обозначим

$$u(t)=\frac{1}{t^{k+1}}-\frac{t^{k-1}}{r^{2k}},\qquad v(t)=\int\limits_{r_0}^{t}\ln^+\sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2\tau\\ \alpha-\pi/2\leqslant\varphi_q\leqslant\alpha+\pi/2}}\frac{d\tau}{|\tau-|c_q||}.$$

Поскольку $u(t)v(t)|_{r_0}^{r}=0$, то

$$J_2=\int\limits_{r_0}^{r}\left(\int\limits_{r_0}^{t}\ln^+\sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2\tau\\ \alpha-\pi/2\leqslant\varphi_q\leqslant\alpha+\pi/2}}\frac{1}{|\tau-|c_q||}d\tau\right)\left(\frac{k+1}{t^{k+2}}+(k-1)\frac{t^{k-2}}{r^{2k}}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{r_0}^{r_0+1}+\int\limits_{r_0+1}^{r}=\int\limits_{r_0+1}^{r}\left(\int\limits_{r_0}^{t}\ln^+\sum\frac{1}{|\tau-|c_q||}d\tau\right)\left(\frac{k+1}{t^{k+2}}+(k-1)\frac{t^{k-2}}{r^{2k}}\right)dt+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant 4k\int\limits_{r_0+1}^{r}\left(\int\limits_{r_0}^{t}\ln^+\sum\frac{1}{|\tau-|c_q||^{1/2}}d\tau\right)\frac{dt}{t^{k+2}}+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant 4k\int\limits_{r_0+1}^{r}\frac{1}{t-r_0}\left(\int\limits_{r_0}^{t}\ln^+\sum|\tau-|c_q||^{-1/2}d\tau\right)\frac{dt}{t^{k+1}}+O(1)\overset{(51)}{\leqslant}$$

$$\overset{(51)}{\leqslant} 4k\int\limits_{r_0+1}^{r}\left(\ln^+\left\{\frac{1}{t-r_0}\int\limits_{r_0}^{t}\sum_{\substack{r_0<|c_q|\leqslant 2\tau\\ \alpha-\pi/2\leqslant\varphi_q\leqslant\alpha+\pi/2}}|\tau-|c_q||^{-1/2}d\tau\right\}+\ln 2\right)\frac{dt}{t^{k+1}}+O(1)\overset{(34)}{\leqslant}$$

$$\overset{(34)}{\leqslant} 4k\int\limits_{r_0+1}^{r}\ln^+\left\{\frac{4\sqrt{t}}{t-r_0}n_{\alpha-\pi/2,\alpha+\pi/2}(2t,0,\infty)\right\}\frac{dt}{t^{k+1}}+O(1).$$

Поэтому с учетом (59) выполняется неравенство ($R=3t,\ s=2t$)

$$J_2\leqslant 4k\int\limits_{r_0}^{r}\ln^+ S_{\alpha-\pi,\alpha+\pi}(3t,f)\frac{dt}{t^{k+1}}+O(1). \tag{61}$$

Поскольку функция $S_{\alpha\beta}(t,f)$ не убывает и $S_{\alpha_1\beta_1}(t,f)>S_{\alpha\beta}(t,f)+O(1)$, если $\alpha_1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\beta_1$ (см. [3, с. 479], формула (14)), то (см. (60))

$$J_1=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{t^{k+1}}\ln^+ S_{\alpha-\pi/2,\alpha+\pi/2}(2t,f)dt<\int\limits_{r_0}^{r}\ln^+ S_{\alpha-\pi,\alpha+\pi}(3t,f)\frac{dt}{t^{k+1}}+O(1).$$

Отсюда с учетом (61), (60) следует, что

$$I_\alpha<K\int\limits_{r_0}^{r}\ln^+ S_{\alpha-\pi,\alpha+\pi}(3t,f)\frac{dt}{t^{k+1}}+K,\quad K=\text{const}>0.$$

Аналогичная оценка имеет место для интеграла $I_\beta$ (см. (58)). Таким образом, доказано, что

$$K\,A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{f'}{f}\right)<\int\limits_{r_0}^{r}\left(\ln^+ S_{\alpha-\pi,\alpha+\pi}(3t,f)+\ln^+ S_{\beta-\pi,\beta+\pi}(3t,f)\right)\frac{dt}{t^{k+1}}+1. \tag{62}$$

При доказательстве неравенства (62) не использовалось предположение о конечности порядка роста функции $f\in M_b$.

Если $f\in M_b$ имеет конечный порядок роста, то выполняется (54). Как следует из (62), (54), для таких функций выполняется неравенство

$$A_{\alpha\beta}\left(r,\frac{f'}{f}\right)<K=\text{const}>0,\quad r>r(\alpha,\beta). \tag{63}$$

Оценка (12) является следствием (57), (63).

Лемма 1 доказана.

***Доказательство леммы* 2.** Каждому полюсу порядка $m$ функции $f(z),z\in g_{\alpha\beta}$, соответствует полюс порядка $m+1$ производной $f'(z),z\in g_{\alpha\beta}$, поэтому $C_{\alpha\beta}(r,f')\leqslant 2C_{\alpha\beta}(r,f)$. Следовательно,

$$S_{\alpha\beta}(r,f')=A_{\alpha\beta}(r,f')+B_{\alpha\beta}(r,f')+C_{\alpha\beta}(r,f')\leqslant A_{\alpha\beta}(r,f')+B_{\alpha\beta}(r,f')+$$

$$+2C_{\alpha\beta}(r,f) = A_{\alpha\beta}\left(r, f\frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, f\frac{f'}{f}\right) + 2C_{\alpha\beta}(r,f) \overset{(3)}{\leqslant}$$

$$\overset{(3)}{\leqslant} A_{\alpha\beta}(r,f) + A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}(r,f) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2C_{\alpha\beta}(r,f) \overset{(12)}{=}$$

$$\overset{(12)}{=} A_{\alpha\beta}(r,f) + B_{\alpha\beta}(r,f) + 2C_{\alpha\beta}(r,f) + O(1) \leqslant 2S_{\alpha\beta}(r,f) + O(1).$$

Значит, производная $f'$ имеет конечный порядк роста. Поскольку $\dfrac{f^{(j)}}{f} = \dfrac{f^{(j)}}{f^{(j-1)}}\dfrac{f^{(j-1)}}{f^{(j-2)}}\ldots\dfrac{f'}{f}$, применяя к этому равенству (3) и (12), получаем (13).

Лемма 2 доказана.

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Мохонько А. А.* Теорема Мальмквиста для решений дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 476 – 483.
4. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтас, 1972. – 468 с.
5. *Мохонько А. З.* Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 3. – С. 213 – 218.
6. *Boutroux P.* Sur quelques proprietés des fonctions entieres// Acta math. – 1904. – **29**. – P. 97 – 204.
7. *Мохонько А. З.* Оценка модуля логарифмической производной функции, мероморфной в угловой области, и ее применение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 839 – 843.
8. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
10. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа.– М.: Наука, 1981. – 384 с.
11. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
12. *Mokhon'ko A. Z., Mokhon'ko V. D.* On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity // Math. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 203 – 218.

Получено 20.03.12,
после доработки — 19.11.13