УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ n-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ЛИНЕЙНОЙ ИНФОРМАЦИИ

We find the optimal linear information and the optimal method of its application for the recovery of n-linear functionals on the sets of special form from a Hilbert space.

Знайдено оптимальну лінійну інформацію та оптимальний метод її використання для відновлення n-лінійних функціоналів на множинах спеціального вигляду з гільбертового простору.

Будем изучать задачу оптимизации приближенного вычисления n-линейных функционалов по линейной информации в следующей постановке. Пусть X — линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $M_1, \ldots, M_n \subset X$ — центрально-симметричные множества. Предположим, что на прямом произведении линейных оболочек $\operatorname{span}(M_j)$ множеств M_j задан n-линейный функционал

$$\Omega : \prod_{j=1}^{n} \operatorname{span}(M_j) \to \mathbb{C}$$

и для каждого $j = 1, \ldots, n$ на множестве $\operatorname{span}(M_j)$ задан набор $T_j = (T_{j,1}, \ldots, T_{j,m_j})$ линейных непрерывных функционалов

$$T_{j,l} \colon \operatorname{span}(M_j) \to \mathbb{C}, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad l = 1, \ldots, m_j.$$

Векторы

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), \ldots, T_{j,m_j}(x_j)), \qquad x_j \in M_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

будем называть линейной информацией об $x_1, x_2, \ldots, x_n$ типа $(m_1, \ldots, m_n)$ (или $(m_1, \ldots, m_n)$-информацией). Произвольную комплекснозначную функцию

$$F = F(x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,m_2}, \ldots, x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n})$$

от $m_1 + \ldots + m_n$ переменных будем называть методом восстановления функционала $\Omega(\,\cdot, \ldots, \cdot\,)$ по $(m_1, \ldots, m_n)$-информации. Положим

$$R(x_1, \ldots, x_n; T_1, \ldots, T_n; F) = \Omega(x_1, \ldots, x_n) - F(T_1(x_1), \ldots, T_n(x_n)),$$

$$R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in M_j,\\ j=1,\ldots,n}} \left| R(x_1, \ldots, x_n; T_1, \ldots, T_n; F) \right|, \tag{1}$$

$$R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n) = \inf_F R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n; F), \tag{2}$$

$$R_{m_1,\ldots,m_n}(M_1, \ldots, M_n) = \inf_{T_1,\ldots,T_n} R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n) \tag{3}$$

($\inf\limits_F$ берется по всевозможным функциям от $m_1 + \ldots + m_n$ переменных, а $\inf\limits_{T_1,\ldots,T_n}$ — по всевозможным наборам функционалов, дающим $(m_1, \ldots, m_n)$-информацию об $(x_1, \ldots, x_n)$),

$$R_N(M_1, \ldots, M_n) = \inf_{m_1+\ldots+m_n=N} R_{m_1,\ldots,m_n}(M_1, \ldots, M_n). \tag{4}$$

Величину (1) назовем погрешностью метода F восстановления функционала Ω на множествах $M_1, \ldots, M_n$ по информации $T_1, \ldots, T_n$, величину (2) — оптимальной погрешностью восстановления Ω на $M_1, \ldots, M_n$ по заданной информации типа $(m_1, \ldots, m_n)$, величину (3) — оптимальной погрешностью восстановления Ω на $M_1, \ldots, M_n$ по $(m_1, \ldots, m_n)$-информации и, наконец, величину (4) — оптимальной погрешностью восстановления Ω на $M_1, \ldots, M_n$ по информации суммарного объема N. Если при заданных $T_1, \ldots, T_n$ существует F, реализующий $\inf\limits_F$ в правой части (2), то будем называть F оптимальным методом использования данной информации. Если существуют $T_1, \ldots, T_n$ и F, реализующие нижние грани в правой части (3), то будем называть их оптимальной $(m_1, \ldots, m_n)$-информацией и оптимальным методом ее использования для восстановления Ω на $M_1, \ldots, M_n$. Числа $m_1^0, \ldots, m_n^0$, реализующие инфимум в (4), будем называть оптимальными объемами информации об $x_1, \ldots, x_n$, а оптимальную $(m_1^0, \ldots, m_n^0)$-информацию — оптимальной информацией объема N об $x_1, \ldots, x_n$. Требуется для заданных Ω, $M_1, \ldots, M_n$ и N или $m_1, \ldots, m_n$ найти величины (4) (или (3)), а также оптимальную информацию объема N (или $(m_1, \ldots, m_n)$-информацию) и оптимальный метод ее использования.

Задача об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации была поставлена в [1]. Там же приведены первые результаты по ее решению. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. [2 – 8].

Определим множества $M_j(T_j)$ так:

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j \colon T_j(x_j) = 0\}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

и пусть

$$M(T_j) := M_1 \times \ldots \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times \ldots \times M_n, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

где $\times$ обозначает декартово произведение.

Оценку снизу для погрешности метода F восстановления функционала Ω по информации $T_1, \ldots, T_n$ дает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых $T_1, \ldots, T_n$ и метода восстановления F*

$$R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n; F) \geq$$

$$\geq \max\left\{\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_1)} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)|, \ldots, \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)|\right\}.$$

Для билинейных функционалов эта лемма доказана в [1].

Доказательство. Покажем, что

$$R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n; F) \geq \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)|.$$

Действительно,

$$R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n; F) \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1, \ldots, x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), \ldots, T_{n-1}(x_{n-1}), 0)| =$$

$$= \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_n)} \max\{|\Omega(x_1, \ldots, x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), \ldots, T_{n-1}(x_{n-1}), 0)|,$$

$$|-\Omega(x_1, \ldots, x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), \ldots, T_{n-1}(x_{n-1}), 0)|\} \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_n)} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)|.$$

Аналогично доказывается, что для произвольного $j = 1, \ldots, n-1$

$$R(M_1, \ldots, M_n; T_1, \ldots, T_n; F) \geq \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in M(T_j)} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)|.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве H, $\hat{x}_k = (x, e_k)$. С помощью последовательностей $g^j, j = 1, \ldots, n$, комплексных чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что последовательности $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ не убывают, определим классы элементов пространства H:

$$W_{p_j}^{g^j} = \left\{ x \in H\colon \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \, |\hat{x}_k|^{p_j} \leq 1 \right\}, \qquad p_j \geq 1.$$

Будем рассматривать n-линейные функционалы, имеющие следующее свойство:

$$\Omega(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}) = \begin{cases} f_k \in \mathbb{C}, & \text{если} \quad k_1 = \ldots = k_n = k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Ясно, что для подходящих классов $W_{p_j}^{g^j}$ элементов $j = 1, \ldots, n$ функционал Ω, имеющий свойство (5), будет иметь вид

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1,k} \ldots \hat{x}_{n,k}.$$

Примером функционала Ω, имеющего свойство (5), является заданный в $L_2[0,1]$ функционал

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 x_1(t) \ldots x_n(t) dt,$$

если в качестве функций e_k, составляющих ортонормированный базис, выбрать базисные функции Хаара (см., например, [9, с. 14]). Напомним, что первая функция системы Хаара постоянна: $\chi_{0,0}(t) = 1, t \in [0,1]$, а вторая имеет вид

$$\chi_{0,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{при } t = 1/2, \\ -1 & \text{при } t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Последующие функции $\chi_{m,k}$ системы Хаара с номерами $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, 2^{m-1}$ определяются равенством

$$\chi_{m,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } t \in \left[\dfrac{k-1}{2^{m-1}}, \dfrac{k-1/2}{2^{m-1}}\right), \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } t \in \left(\dfrac{k-1/2}{2^{m-1}}, \dfrac{k}{2^{m-1}}\right], \\ 0 & \text{— в остальных точках } [0,1]\ . \end{cases}$$

Вместо двойной нумерации можно пользоваться простой нумерацией, полагая $\chi_{m,k} = \chi_j$, где $j = 2^{m-1} + k$.

Теорема 1. *Пусть заданы n-линейный функционал Ω, имеющий свойство* (5), *для которого последовательность $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает, и числа $m_1, \ldots, m_n$. Пусть также $p_j \geq 1$ и $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{p_j} = 1$. Тогда*

$$R_{m_1,\ldots,m_n}\left(W_{p_1}^{g^1}, \ldots, W_{p_n}^{g^n}\right) = \frac{|f_{M+1}|}{|g_{M+1}^1|^{\frac{1}{p_1}} \ldots |g_{M+1}^n|^{\frac{1}{p_1}}},$$

где $M = \min\{m_1, \ldots, m_n\}$. При этом информация об элементах $x_j \in W_{p_j}^{g^j}$, $j = 1, \ldots, n$, вида

$$T_j(x_j) = ((x_j, e_1), \ldots, (x_j, e_{m_j})) = (\hat{x}_{j,1}, \ldots, \hat{x}_{j,m_j})$$

и метод

$$\widetilde{F}(x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}, \ldots, x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{M} f_k\, x_{1,k} \ldots x_{n,k}$$

ее использования будут оптимальными.

Доказательство. Для произвольной информации $T_1, \ldots, T_n$ типа $(m_1, \ldots, m_n)$ получим оценку снизу величины $R(W_{p_1}^{g^1}, \ldots, W_{p_n}^{g^n}; T_1, \ldots, T_n)$. Пусть $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_{M+1} e_{M+1}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{M+1} \in \mathbb{C}$. Из условия $T_n(y) = 0$ получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} y_1 T_{n,1}(e_1) + \ldots + y_{M+1} T_{n,1}(e_{M+1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1 T_{n,M}(e_1) + \ldots + y_{M+1} T_{n,M}(e_{M+1}) = 0. \end{gathered}$$

Поскольку в системе из M уравнений $M+1$ переменная, то она имеет ненулевое решение $y' = (y_1', \ldots, y'_{M+1})$. Определим $z_1, \ldots, z_n$ следующим образом:

$$z_s = A_s^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |y_k'|^{\frac{p_n}{p_s}} e_k, \qquad s = 1, \ldots, n-2,$$

$$z_{n-1} = A_{n-1}^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |y'_k|^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} e^{-i(\arg(y'_k)+\arg(f_k))} e_k,$$

$$z_n = A_n^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} y'_k e_k = A_n^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |y'_k| e^{i\arg(y'_k)} e_k,$$

где для $s = 1, \ldots, n$ положено

$$A_s := \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y'_j|^{p_n} |g_j^s| \right)^{\frac{1}{p_s}}.$$

Покажем, что элементы z_k, $k = 1, \ldots, n$, принадлежат соответственно классам $W_{p_k}^{g^k}$. Имеем

$$\sum_{s=1}^{\infty} |g_s^k| \, |\hat{z}_{k,s}|^{p_k} = \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| \, |\hat{z}_{k,s}|^{p_k} = \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| \left(A_k^{-1} |y'_s|^{\frac{p_n}{p_k}} \right)^{p_k} =$$

$$= \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| A_k^{-p_k} |y'_s|^{p_n} = A_k^{-p_k} \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| |y'_s|^{p_n} = A_k^{-p_k} A_k^{p_k} = 1.$$

Ясно, что $T_n(z_n) = 0$ и, следовательно, с учетом свойства (5) получаем неравенство

$$R(W_{p_1}^{g^1}, \ldots, W_{p_n}^{g^n}; T_1, \ldots, T_n; F) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j},\, j=\overline{1,n} \\ x_n \in W_{p_n}^{g^n}(T_n)}} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)| \geq |\Omega(z_1, \ldots, z_n)| =$$

$$= \left(\prod_{s=1}^{n} A_s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |f_k| |y'_k|^{p_n(1/p_1 + \ldots + 1/p_n)} =$$

$$= \left(\prod_{s=1}^{n} A_s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |f_k| |y'_k|^{p_n}. \tag{6}$$

Каждый из сомножителей $A_s, s = 1, \ldots, n$, в (6) с учетом неубывания последовательностей $\{|g_j^s|\}_{j=1}^{\infty}$ можно оценить так:

$$A_s = \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y'_j|^{p_n} |g_j^s| \right)^{\frac{1}{p_s}} \leq |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}} \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y'_j|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_s}}.$$

С учетом последних неравенств и невозрастания $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ неравенство (6) можно продолжить:

$$R(W_{p_1}^{g^1}, \ldots, W_{p_n}^{g^n}; T_1, \ldots, T_n; F) \geq \left(\prod_{s=1}^{n} A_s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} |f_k| |y'_k|^{p_n} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{M+1} |f_k| \frac{|y'_k|^{p_n}}{\prod_{s=1}^{n}\left(|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}\left(\sum_{j=1}^{M+1}|y'_j|^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_s}}\right)} \geq$$

$$\geq |f_{M+1}| \frac{\sum_{k=1}^{M+1}|y'_k|^{p_n}}{\left(\prod_{s=1}^{n}|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{M+1}|y'_j|^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_k}}} = \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n}|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

Для произвольного $k = 1, \ldots, n-1$ неравенство

$$R(W^{g^1}_{p_1}, \ldots, W^{g^n}_{p_n}; T_1, \ldots, T_n; F) \geq \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j}, j=\overline{1,n} \\ x_n \in W^{g^n}_{p_n}(T_n)}} |\Omega(x_1, \ldots, x_n)| \geq \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n}|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}}$$

доказывается аналогично. Таким образом, с учетом леммы 1 получена оценка снизу:

$$R(W^{g^1}_{p_1}, \ldots, W^{g^n}_{p_n}; T_1, \ldots, T_n; F) \geq \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n}|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

Установим оценку сверху:

$$R(W^{g^1}_{p_1}, \ldots, W^{g^n}_{p_n}; T_1, \ldots, T_n; F) \leq R(W^{g^1}_{p_1}, \ldots, W^{g^n}_{p_1}; T_1, \ldots, T_n; \tilde{F}) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,\ldots,n}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1,k} \, \ldots \, \hat{x}_{n,k} - \sum_{k=1}^{M} f_k \, \hat{x}_{1,k} \, \ldots \, \hat{x}_{n,k} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,\ldots,n}} \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} f_k \, \hat{x}_{1,k} \, \ldots \, \hat{x}_{n,k} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,\ldots,n}} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|f_k|}{\prod_{s=1}^{n}|g^s_k|^{\frac{1}{p_s}}} \prod_{s=1}^{n} |g^s_k|^{\frac{1}{p_s}} |\hat{x}_{s,k}| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}_{p_j} \\ j=1,\ldots,n}} \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n}|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{p_s}}} \sum_{k=M+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g^s_k|^{\frac{1}{p_s}} |\hat{x}_{s,k}|.$$

В силу известного неравенства для суммы произведений степеней (см. [10, с. 29])

$$\sum A^{\alpha} B^{\beta} \ldots L^{\lambda} \leq \left(\sum A\right)^{\alpha} \left(\sum B\right)^{\beta} \ldots \left(\sum L\right)^{\lambda},$$

где $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$, имеем

$$\sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,\ldots,n}} \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}} \sum_{k=M+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g_k^s|^{\frac{1}{p_s}} |\hat{x}_{s,k}| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j \in W_{p_j}^{g^j} \\ j=1,\ldots,n}} \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}} \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} |g_k^s| |\hat{x}_{s,k}|^{p_s} \right)^{\frac{1}{p_s}} \leq \frac{|f_{M+1}|}{\prod_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{p_s}}}.$$

1. *Бабенко В. Ф.* О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск, 1979. – С. 3 – 5.
2. *Бабенко В. Ф.* О приближенном вычислении скалярных произведений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 15 – 21.
3. *Бабенко В. Ф., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1305 – 1310.
4. *Бабенко В. Ф., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций из различных классов // Теория функций и приближений. – Саратов, 1991. – С. 17 – 22.
5. *Бабенко В. Ф., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций на классах функций, задаваемых дифференциальными операторами // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск, 1992. – С. 8 – 13.
6. *Бабенко В. Ф., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов в линейных нормированных пространствах // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 828 – 831.
7. *Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации // Вiсн. Днiпропетр. ун-ту. Сер. Математика. – 2012. – Вип. 17. – С. 11 – 17.
8. *Бабенко В. Ф., Гунько М. С., Руденко А. А.* Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации // Вiсн. Днiпропетр. ун-ту. Сер. Математика. – 2013. – Вип. 18. – С. 16 – 25.
9. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М., 1969.
10. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. – Cambridge, 1934.

Получено 28.09.13