УДК 517.537.72

Ю. В. Стець, М. М. Шеремета (Львів. нац. ун-т)

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

For the Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the abscissa of absolute convergence $\sigma_a = 0$, conditions on (λ_n) and (a_n) are established under which $\ln M(\sigma, F) = T_R(1 + o(1)) \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ as $\sigma \uparrow 0$, where $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and T_R and ϱ_R are positive constants.

Для ряда Дирихле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ с абсциссой абсолютной сходимости $\sigma_a = 0$ установлены условия на (λ_n) и (a_n), при выполнении которых $\ln M(\sigma, F) = T_R(1 + o(1)) \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ при $\sigma \uparrow 0$, где $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, а T_R и ϱ_R — положительные константы.

1. Вступ. Нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має нульову абсцису абсолютної збіжності. Відомо [1, с. 115], що якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = 0$. Для $\sigma < 0$ покладемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}: n \geq 0\}$ — максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ — його центральний індекс. R-порядком ряду Діріхле (1) називається [2] величина $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$, і якщо $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)$ при $n \to \infty$, то [2] $\varrho_R = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|$. За умови $0 < \varrho_R < \infty$ в [3] введено R-тип $T_R = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$ і доведено, що якщо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} < 1, \tag{2}$$

то

$$T_R = \varrho_R e^{\delta - 1}, \quad \delta = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\varrho_R \lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{\ln^2 \lambda_n} - 1\right) \ln \lambda_n. \tag{3}$$

Основною метою цієї статті є знаходження умов на (λ_n) і (a_n), за яких

$$\ln M(\sigma, F) = T_R(1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho_R}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{4}$$

Для цього через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді функція Ψ неперервно диференційовна і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що і обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до 0 на $(-\infty, 0)$. Будемо використовувати такі твердження.

Лема 1 [3, 4]. *Нехай* Φ *належить* $\Omega(0)$. *Для того щоб* $\ln\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, *необхідно і достатньо, щоб* $\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$.

Лема 2 [4, 5]. *Для додатних чисел* $a < b$ *справджується нерівність* $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$, *де*

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt, \qquad G_2(a, b, \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

Лема 3 [4]. *Нехай* Φ *належить* $\Omega(0)$ *і* $\ln|a_{n_k}| \ge -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ *для зростаючої послідовності* (n_k) *натуральних чисел. Тоді для всіх* $\sigma \in [\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}]$ *і всіх* $k \ge k_0$

$$\ln\mu(\sigma, F) \ge \Phi(\sigma)\frac{G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)}{G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)},$$

$$\Phi^{-1}(\ln\mu(\sigma, F)) \ge \sigma\frac{\Phi^{-1}(G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi))}.$$

Лема 4 [4]. *Нехай* Φ_j *належить* $\Omega(0)$, $j = 1, 2$, *і* $\Phi_1(\sigma) \le \ln\mu(\sigma, F) \le \Phi_2(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. *Тоді*

$$\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n))$$

для всіх $n \ge n_0$ *та існує зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що* $\ln|a_{n_k}| \ge -\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k}))$ *і*

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \ge \Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t)dt\right).$$

2. Регулярність зростання відносно R-типу. Оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, то, як видно з лем 1–4, важливою є наступна лема.

Лема 5. *Нехай* $\Phi(\sigma) = T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$, *де* $T > 0, \varrho > 0$. *Тоді*

$$\varphi(x) = -\varrho\left(\frac{1}{\ln x} + \frac{2\ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{1}{\ln^2 x}\ln\frac{(1+o(1))T}{\varrho}\right), \quad x \to \infty.$$

Доведення. Оскільки $\Phi'(\sigma) = \frac{T\varrho}{|\sigma|^2}\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$, то для знаходження асимптотики функції φ потрібно розв'язати рівняння

$$\frac{\varrho}{|\sigma|} + 2\ln\frac{1}{|\sigma|} = \ln\frac{x}{T\varrho}. \tag{5}$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$\frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha(x), \tag{6}$$

де $\alpha(x) = o(\ln x)$, $x \to \infty$. Підставляючи (6) в (5), при $x \to \infty$ маємо

$$\varrho\alpha(x) = 2\ln\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha(x)\right) = 2\ln\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{\varrho\alpha(x)}{\ln\dfrac{x}{T\varrho}}\right) =$$

$$= 2\ln\ln x - 2\ln\varrho + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\alpha(x)}{\ln x}\right) = 2\ln\ln x - 2\ln\varrho + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Тому з (6) випливає, що

$$\frac{1}{|\varphi(x)|} = \frac{1}{\varrho}\left(\ln x - 2\ln\ln x - \ln\frac{T}{\varrho} + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)\right), \quad x \to \infty, \tag{7}$$

і, отже,

$$|\varphi(x)| = \frac{\varrho}{\ln x}\frac{1}{1 - \dfrac{2\ln\ln x}{\ln x} - \dfrac{\ln T/\varrho}{\ln x} + O\left(\dfrac{\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)} =$$

$$= \frac{\varrho}{\ln x}\left(1 + \frac{2\ln\ln x}{\ln x} + \frac{\ln T/\varrho}{\ln x} + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{\ln^2\ln x}{\ln^2 x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\varrho}{\ln x} + \frac{2\varrho\ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\varrho\ln T/\varrho}{\ln^2 x}(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Оскільки для додатної сталої q правильною є асимптотична рівність

$$(1 + o(1))\ln q = \ln(1 + o(1))q, \quad x \to \infty,$$

то лему 5 доведено.

Неважко перевірити, що $\Psi(\sigma) = -\left(|\sigma| + \dfrac{|\sigma|^2}{\varrho}\right)$. Тому за лемою 5

$$x\Psi(\varphi(x)) = -x\left(|\varphi(x)| + \frac{|\varphi(x)|^2}{\varrho}\right) =$$

$$= -x\left(\frac{\varrho}{\ln x} + \frac{2\varrho\ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\varrho\ln(T(1 + o(1))/\varrho)}{\ln^2 x} + \frac{\varrho^2}{\ln^2 x} + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln^3 x}\right)\right) =$$

$$= -\frac{x\varrho}{\ln^2 x}\left(\ln x + 2\ln\ln x + \ln\left(\frac{T(1 + o(1))}{\varrho}\right)\right), \quad x \to \infty. \tag{8}$$

За лемою 1

$$\ln\mu(\sigma, F) \le (1 + o(1))T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\ln|a_n| \le \frac{\lambda_n\varrho}{\ln^2\lambda_n}\ln\left(\frac{(1 + o(1))Te}{\varrho}\lambda_n\ln^2\lambda_n\right), \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\exp\left\{-\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}\ln\mu(\sigma, F) = \frac{\varrho}{e}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n\ln^2\lambda_n}|a_n|^{\ln^2\lambda_n/\varrho\lambda_n}. \tag{10}$$

***Зауваження* 1.** З (7) випливає також, що

$$|\varphi(x)| = \frac{\varrho}{\ln(x\ln^{-2}x)}\left(1+\frac{(1+o(1))(\ln T/\varrho)}{\ln x}\right),$$

$$|\varphi(x)|^2/\varrho = (1+o(1))\varrho\ln^{-2}x$$

і, отже,

$$x\Psi(\varphi(x)) = -\frac{x\varrho}{\ln(x\ln^{-2}x)}\left(1+(1+o(1))\frac{\ln Te/\varrho}{\ln x}\right)$$

при $x\to\infty$, звідки, вважаючи $T=T_R$ і $\varrho=\varrho_R$, за лемою 1 отримуємо (3) з $\ln\mu(\sigma,F)$ замість $\ln M(\sigma,F)$, тобто формула (3) з $\ln\mu(\sigma,F)$ замість $\ln M(\sigma,F)$ збігається з формулою (10).

Перейдемо до дослідження асимптотики величин $G_j(t_k,t_{k+1},\Phi), j=1,2$, де (t_k) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $t_{k+1}=(1+\theta_k)t_k$. З огляду на означення $G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)$ і асимптотичну рівність (7) при $k\to\infty$ маємо

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi) = \frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{T}{t^2}\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(t)|}\right\}dt =$$

$$= \frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(1+o(1))T\varrho t}{Tt^2\ln^2 t} =$$

$$= \frac{(1+o(1))\varrho t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left(\frac{1}{\ln t_k}-\frac{1}{\ln t_{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{(1+o(1))\varrho t_k(1+\theta_k)}{\theta_k}\frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k(\ln t_k-\ln(1+\theta_k))}.$$

Якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\theta_k=+\infty$, то звідси для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел випливає, що

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi) = \frac{(1+o(1))\varrho t_{k_j}\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}(\ln t_{k_j}-\ln(1+\theta_{k_j}))},\quad j\to\infty. \tag{11}$$

Якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta\in(0,+\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi) = \frac{(1+o(1))\varrho t_{k_j}(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta\ln^2 t_{k_j}},\quad j\to\infty. \tag{12}$$

Нарешті, якщо $\theta_k\to0$ при $k\to\infty$, то

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi) = \frac{(1+o(1))\varrho t_k}{\ln^2 t_k},\quad k\to\infty. \tag{13}$$

Покладемо тепер $\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi) = \dfrac{1}{t_{k+1}-t_k}\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt$. Тоді за лемою 5 при $k\to\infty$ маємо

$$\frac{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)|}{\varrho}(t_{k+1} - t_k) =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{\ln t} + 2\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\ln\ln t}{\ln^2 t} dt + (1 + o(1)) \ln\frac{T}{\varrho} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{\ln^2 t}. \qquad (14)$$

Якщо через $I_k^{(1)}$, $I_k^{(2)}$, $I_k^{(3)}$ позначимо інтеграли у правій частині рівності (14), то $I_k^{(2)} = o(I_k^{(1)})$, $I_k^{(3)} = o(I_k^{(2)})$ при $k \to \infty$, $I_k^{(1)} = \dfrac{t_{k+1}}{\ln t_{k+1}} - \dfrac{t_k}{\ln t_k} + I_k^{(3)}$, $I_k^{(2)} = \\ = \dfrac{t_{k+1}\ln\ln t_{k+1}}{\ln^2 t_{k+1}} - \dfrac{t_k \ln\ln t_k}{\ln^2 t_k} + o(I_k^{(3)})$, $I_k^{(3)} = \dfrac{t_{k+1}}{\ln^2 t_{k+1}} - \dfrac{t_k}{\ln^2 t_k} + o(I_k^{(3)})$ при $k \to \infty$. Звідси випливає, що

$$\frac{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)|}{\varrho} = A_k + 2B_k + (1 + o(1))C_k \ln\frac{eT}{\varrho}, \quad k \to \infty,$$

де

$$A_k = \frac{t_{k+1}\ln t_k - t_k \ln t_{k+1}}{(t_{k+1} - t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}},$$

$$B_k = \frac{t_{k+1}\ln^2 t_k \ln\ln t_{k+1} - t_k \ln^2 t_{k+1} \ln\ln t_k}{(t_{k+1} - t_k)\ln^2 t_k \ln^2 t_{k+1}} = o(A_k)$$

і

$$C_k = \frac{t_{k+1}\ln^2 t_k - t_k \ln^2 t_{k+1}}{(t_{k+1} - t_k)\ln^2 t_k \ln^2 t_{k+1}} = o(A_k), \quad k \to \infty.$$

Тому

$$\ln G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \ln\Phi(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)) = \ln T + \frac{\varrho}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)|} =$$

$$= \ln T + \frac{1}{A_k\left(1 + 2\dfrac{B_k}{A_k} + (1 + o(1))\dfrac{C_k}{A_k}\ln\dfrac{eT}{\varrho}\right)} =$$

$$= \ln T + \frac{1}{A_k}\left(1 - 2\frac{2B_k}{A_k} - (1 + o(1))\frac{C_k}{A_k}\ln\frac{eT}{\varrho} + \right.$$

$$\left. + (1 + o(1))\left(2\frac{B_k}{A_k} - (1 + o(1))\frac{C_k}{A_k}\ln\frac{eT}{\varrho}\right)^2\right) =$$

$$= \ln T + \frac{1}{A_k} - \frac{2B_k}{A_k^2} - (1 + o(1))\frac{C_k}{A_k^2}\ln\frac{eT}{\varrho} + 4(1 + o(1))\frac{B_k^2}{A_k^3}, \quad k \to \infty. \qquad (15)$$

Але

$$\frac{1}{A_k} = \frac{(t_{k+1} - t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}}{t_{k+1}\ln t_{k+1} - t_k \ln t_k} = \frac{\theta_k \ln t_k(\ln t_k + \ln(1 + \theta_k))}{\theta_k \ln t_k - \ln(1 + \theta_k)} =$$

$$= \frac{\ln t_k + \ln(1+\theta_k)}{1 - \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k}} = (\ln t_k + \ln(1+\theta_k))\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k} + O\left(\frac{\ln^2(1+\theta_k)}{\theta_k^2 \ln^2 t_k}\right)\right) =$$

$$= \ln t_k + \ln(1+\theta_k) + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k} + o(1), \quad k \to \infty,$$

$$\frac{B_k}{A_k^2} = \frac{(t_{k+1} - t_k)(t_{k+1} \ln^2 t_k \ln\ln t_{k+1} - t_k \ln^2 t_{k+1} \ln\ln t_k)}{(t_{k+1} \ln t_k - t_k \ln t_{k+1})^2} =$$

$$= \theta_k \left(\frac{(1+\theta_k)\ln^2 t_k \left(\ln\ln t_k + \ln\left(1 + \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\right)}{(\theta_k \ln t_k - \ln(1+\theta_k))^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\ln t_k + \ln(1+\theta_k))^2 \ln\ln t_k}{(\theta_k \ln t_k - \ln(1+\theta_k))^2} \right) =$$

$$= \frac{\ln\ln t_k + \dfrac{1+\theta_k}{\theta_k} \ln\left(1 + \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)}{\left(1 - \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k}\right)^2} -$$

$$- \frac{\dfrac{2\ln(1+\theta_k)\ln\ln t_k}{\theta_k \ln t_k} + \dfrac{\ln^2(1+\theta_k)\ln\ln t_k}{\theta_k \ln^2 t_k}}{\left(1 - \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k}\right)^2} =$$

$$= \left(\ln\ln t_k + \frac{1+\theta_k}{\theta_k} \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right) + o(1)\right)\left(1 + (1+o(1))\frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k}\right) =$$

$$= \ln\ln t_k + \frac{1+\theta_k}{\theta_k} \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right) + o(1), \quad k \to \infty,$$

і аналогічно

$$\frac{C_k}{A_k^2} = \frac{(t_{k+1} - t_k)(t_{k+1}\ln^2 t_k - t_k \ln t_{k+1}^2)}{(t_{k+1}\ln t_k - t_k \ln t_{k+1})^2} = \frac{1 - \dfrac{2\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k} - \dfrac{\ln^2(1+\theta_k)}{\theta_k \ln^2 t_k}}{\left(1 - \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k}\right)^2} =$$

$$= 1 + o(1), \quad k \to \infty,$$

а якщо $\theta_k \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\frac{B_k}{A_k} = \frac{(1+\theta_k)\left(\ln\ln t_k + \ln\left(1 + \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\right) - \left(1 + \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)^2 \ln\ln t_k}{\left(1 + \dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)(\theta_k \ln t_k - \ln(1+\theta_k))} =$$

$$= \frac{\ln\ln t_k + \dfrac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)}{\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)\ln t_k} -$$

$$- \frac{2\dfrac{\ln\ln t_k}{\ln t_k}\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k} + \dfrac{\ln\ln t_k}{\ln^2 t_k}\dfrac{\ln^2(1+\theta_k)}{\theta_k}}{\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)\ln t_k} =$$

$$= (1+o(1))\frac{\ln\ln t_k}{\ln t_k}, \quad k\to\infty,$$

і, отже,

$$\frac{B_k^2}{A_k^3} = (1+o(1))\frac{\ln^2\ln t_k}{\ln t_k} = o(1), \quad k\to\infty.$$

Тому якщо $\theta_k \to 0$ при $k\to\infty$, то з огляду на (15)

$$\ln G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = \ln\varrho + \ln t_k - 2\ln\ln t_k + o(1), \quad k\to\infty. \tag{16}$$

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k = +\infty$, то для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел випливає, що

$$\ln G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) \ge \ln T + \frac{1}{A_k} - \frac{2B_k}{A_k^2} - (1+o(1))\frac{C_k}{A_k^2}\ln\frac{eT}{\varrho} =$$

$$= \ln T + \ln t_k + \ln(1+\theta_k) + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k} -$$

$$-2\ln\ln t_k - 2\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right) - \ln\frac{Te}{\varrho} + o(1) =$$

$$= \ln\varrho + \ln t_{k_j} + \ln(1+\theta_{k_j}) -$$

$$-2\ln\ln t_{k_j} - 2\frac{1+\theta_{k_j}}{\theta_{k_j}}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right) - 1 + o(1), \quad j\to\infty. \tag{17}$$

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k = \theta \in (0,+\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел

$$\ln G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) \ge$$

$$\ge \ln\varrho + \ln t_{k_j} + \ln(1+\theta) - 2\ln\ln t_{k_j} + \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} - 1 + o(1), \quad j\to\infty. \tag{18}$$

Використавши отримані вище результати, доведемо теорему про регулярне зростання логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле скінченного R-порядку.

Теорема 1. *Нехай $T>0$ і $\varrho>0$. Для того щоб для ряду Діріхле* (1)

$$\ln\mu(\sigma, F) = T(1+o(1))\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{19}$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon\in(0,T)$:

1) *існувало таке число* $n_0(\varepsilon)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_n} \ln\left(\frac{(T+\varepsilon)e}{\varrho}\lambda_n \ln^2 \lambda_n\right); \tag{20}$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln\left(\frac{(T-\varepsilon)e}{\varrho}\lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k}\right) \tag{21}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1. \tag{22}$$

Доведення. *Необхідність*. З (19) випливає, що для кожного $\delta \in (0, T)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\delta), 0)$

$$(T-\delta)\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\} = \Phi_1(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma, F) \leq \Phi_2(\sigma) = (T+\delta)\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}.$$

Тому за лемою 4 з огляду на (8)

$$\ln|a_n| \leq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_n} \ln\left(\frac{(T+\delta)(1+o(1))e}{\varrho}\lambda_n \ln^2 \lambda_n\right), \quad n\to\infty,$$

$$\ln|a_{n_k}| \geq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln\left(\frac{(T-\delta)(1+o(1))e}{\varrho}\lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k}\right), \quad k\to\infty,$$

для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел такої, що

$$\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geq \ln\Phi_1(\varkappa(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2)).$$

Звідси з огляду на довільність δ випливають нерівності (20) і (21). Оскільки $\ln\Phi_1(\sigma) = \ln\Phi_2(\sigma) - \ln\dfrac{T+\delta}{T-\delta}$, то послідовність (n_k) задовольняє умову

$$\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}(1+\theta_k), \Phi_2) \geq \ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}(1+\theta_k), \Phi_2) - \ln\frac{T+\delta}{T-\delta}, \tag{23}$$

де $\theta_k = \dfrac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} - 1$. Якби $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \theta_k = +\infty$, то з (23), (11), (17) для відповідної зростаючої до $+\infty$ послідовності (θ_{k_j}) випливало б, що

$$\ln\ln(1+\theta_{k_j}) - \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right) \geq$$

$$\geq \ln(1+\theta_{k_j}) - 2\frac{1+\theta_{k_j}}{\theta_{k_j}} \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right) - 1 - \ln\frac{T+\delta}{T-\delta} + o(1), \quad j\to\infty,$$

тобто

$$\ln\ln(1+\theta_{k_j}) \geq$$

$$\geq \ln(1+\theta_{k_j}) - 2\frac{1+\theta_{k_j}}{\theta_{k_j}} \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right) + 1 + \ln\frac{T+\delta}{T-\delta} + o(1) =$$

$$= (1 + o(1)) \ln(1 + \theta_{k_j}), \quad j \to \infty,$$

що неможливо. Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то з (28), (12), (18) для відповідної послідовності (θ_{k_j}), яка прямує до θ, випливає, що

$$\ln \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} \geq \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} - 1 - \ln \frac{T+\delta}{T-\delta} + o(1), \quad j \to \infty,$$

тобто завдяки довільності δ отримуємо нерівність $\ln \dfrac{\ln(1+\theta)}{\theta} \geq \dfrac{\ln(1+\theta)}{\theta} - 1$, яка є можливою тільки для $\theta = 0$. Отже, $\dfrac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} - 1 = \theta_k \to 0$, $k \to \infty$, тобто рівність (22) є правильною. Необхідність умов 1 і 2 доведено.

Достатність. З умови (20) завдяки рівності (8) і довільності ε за лемою 1 легко отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq T(1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

З іншого боку, з умови (22) з огляду на рівності (13), (16) випливає, що $G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) = (1 + o(1))G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)$ при $k \to \infty$, і, отже, за лемою 3 з умови (21) з огляду на (8) і довільність ε одержуємо асимптотичну нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \geq$ $\geq T(1 + o(1)) \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \sigma \uparrow 0.$

Теорему 1 доведено.

Встановимо тепер зв'язок між зростанням $\mu(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$. Для цього використовуємо наступний результат з [6].

Лема 6. *Нехай $S(\Lambda, 0)$ — клас рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності і заданою послідовністю $\Lambda = (\lambda_n)$ показників, а функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що $\dfrac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \nearrow +\infty$ і $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow 0$. Тоді для того щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, 0)$ асимптотичні нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ були рівносильними при $\sigma \uparrow 0$, необхідно і достатньо, щоб $\ln n = o(\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_n))))$ при $n \to \infty$, причому остання умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ при $\sigma \uparrow 0$.*

Легко перевірити, що функція $\Phi(\sigma) = T \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ задовольняє умови леми 6 і з огляду на (7)

$$\Phi(\Psi(\varphi(x))) = T \exp\left\{\frac{\varrho}{|\Psi(\varphi(x))|}\right\} = T \exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)|(1 + \frac{|\varphi(x)|}{\varrho})}\right\} =$$

$$= T \exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)|}\left(1 - \frac{(1 + o(1))|\varphi(x)|}{\varrho}\right)\right\} = T \exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)| - 1 + o(1)}\right\} =$$

$$= T \exp\{\ln x - 2 \ln \ln x - \ln T + \ln \varrho - 1 + o(1)\} = \frac{(1 + o(1))\varrho x}{e \ln^2 x}, \quad x \to \infty.$$

Тому за лемою 6 для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, 0)$ асимптотичні нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ і $\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$

були рівносильними при $\sigma \uparrow 0$, необхідно і достатньо, щоб $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2} \lambda_n)$ при $n \to \infty$, причому остання умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ і $\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ при $\sigma \uparrow 0$. Звідси з огляду на (10) і теорему 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2} \lambda_n)$ *при* $n \to \infty$. *Тоді*

$$T_R = \frac{\varrho}{e} \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{1}{\lambda_n \ln^2 \lambda_n} |a_n|^{\ln^2 \lambda_n / \varrho \lambda_n} \tag{24}$$

і для того щоб асимптотична рівність (4) *була правильною, необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon \in (0, T)$ *виконувались умови* 1 *і* 2 *теореми* 1 *з* $T = T_R$ *і* $\varrho = \varrho_R$.

Зауваження 2. Як було зазначено вище, формула (24) збігається з формулою (3), але за теоремою 2 вона є правильною за слабшої, ніж (2), умови $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2} \lambda_n)$, $n \to \infty$.

3. Регулярність зростання відносного R-порядку. Знайдемо умови на коефіцієнти і показники ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, за яких

$$\ln \ln M(\sigma, F) = \frac{(1 + o(1))\varrho_R}{|\sigma|}, \quad \sigma \uparrow 0, \tag{25}$$

і, як вище, почнемо з доведення наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай* $\varrho > 0$. *Для того щоб*

$$\ln \ln \mu(\sigma, F) = \frac{(1 + o(1))\varrho}{|\sigma|}, \quad \sigma \uparrow 0, \tag{26}$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, \varrho)$:

1) *існувало число* $n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq \frac{(\varrho + \varepsilon)\lambda_n}{\ln \lambda_n}; \tag{27}$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq \frac{(\varrho - \varepsilon)\lambda_{n_k}}{\ln \lambda_{n_k}} \tag{28}$$

і

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1. \tag{29}$$

Доведення. *Необхідність.* Зрозуміло, що тепер досить вибрати $\Phi(\sigma) = \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ і обмежитись асимптотикою відповідних функцій з точністю $\varrho(1 + o(1))$. Тоді за лемою 5 $\varphi(x) = \frac{-\varrho(1 + o(1))}{\ln x}$, а з огляду на (8) $x\Psi(\varphi(x)) = \frac{-x\varrho(1 + o(1))}{\ln x}$ при $x \to \infty$. Оскільки $\Phi(\varphi(x)) = \exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)|}\right\} < x^{1+\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих x, то для всіх досить великих k

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi) \leq \frac{t_k t_{k+1}(t_{k+1}^{\varepsilon} - t_k^{\varepsilon})}{\varepsilon(t_{k+1} - t_k)}.$$

З іншого боку,

$$|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi))| = \varrho(1+o(1))A_k = \varrho(1+o(1))\frac{t_{k+1}\ln t_{k+1} - t_k \ln t_k}{(t_{k+1}-t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}}$$

і, отже,

$$\ln G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \frac{\varrho}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi))|} =$$

$$= (1+o(1))\frac{(t_{k+1}-t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}}{t_{k+1}\ln t_k - t_k \ln t_{k+1}}, \quad k \to \infty.$$

Припустимо тепер, що виконується асимптотична рівність (26). Тоді для кожного $\delta \in (0, \varrho/2)$ і всіх $\sigma \in (\sigma_0(\delta), 0)$

$$\exp\left\{\frac{\varrho-\delta}{|\sigma|}\right\} = \Phi_1(\sigma) \le \ln \mu(\sigma, F) \le \Phi_2(\sigma) = \exp\left\{\frac{\varrho+\delta}{|\sigma|}\right\}.$$

Звідси за лемою 4, як при доведенні теореми 1, отримуємо нерівність (27) для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ і нерівність (28) для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел такої, що

$$\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \ge$$

$$\ge \ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) - (\ln \Phi_2(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) - \ln \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2))) =$$

$$= \ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) - \frac{2\delta}{\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)},$$

тобто

$$\ln \frac{\lambda_{n_k}\lambda_{n_{k+1}}(\lambda^{\varepsilon}_{n_{k+1}} - \lambda^{\varepsilon}_{n_k})}{\varepsilon(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})} \ge \frac{\varrho-\delta}{|\varkappa(\lambda_{n_{k+1}}, \lambda_{n_k}, \Phi_2)}| =$$

$$= \frac{\varrho-\delta}{\varrho+\delta}\frac{(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\ln \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}}\ln \lambda_{n_k} - \lambda_{n_k}\ln \lambda_{n_{k+1}}}, \quad k \to \infty. \tag{30}$$

Припустимо, що $\lambda_{n_{k+1}} = \lambda_{n_k}^{1+\eta}$ і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \eta_k = \eta > 0$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\eta_{k_j} \to \eta, \lambda_{n_{k_j}} = o(\lambda_{n_{k_j+1}})$ і, отже, $\lambda_{n_{k_j}} \ln \lambda_{n_{k_j+1}} = o(\lambda_{n_{k_j+1}} \ln \lambda_{n_{k_j}})$ при $j \to \infty$. Тому

$$(1+\varepsilon(1+\eta_{k_j}))\ln \lambda_{n_{k_j}} - \ln \varepsilon + o(1) + \ln T \ge$$

$$\ge \frac{\varrho-\delta}{\varrho+\delta}(1+o(1))(1+\eta_{k_j}))\ln \lambda_{n_{k_j}}, \quad j \to \infty,$$

звідки

$$1+\varepsilon(1+\eta_{k_j}) \ge (1+o(1))\frac{\varrho-\delta}{\varrho+\delta}(1+\eta_{k_j}),$$

що неможливо з огляду на довільність ε і δ. Отже, $\eta_k \to 0$, $k \to \infty$, і виконується рівність (29). Необхідність умов 1 і 2 доведено.

Достатність. З огляду на довільність ε з умови 1 за лемою 1 випливає асимптотична нерівність $\ln\ln \mu(\sigma, F) \le \dfrac{(1+o(1))\varrho}{|\sigma|}$, $\sigma \uparrow 0$. Для доведення оберненої асимптотичної нерівності, крім леми 3, нам потрібна наступна лема.

Лема 7 [7]. *Нехай* $\Phi \in \Omega(0)$, *а функція* g *додатна, неперервна, зростаюча до* $+\infty$ *на* $(0, +\infty)$ *і* $g(x) > x$. *Припустимо, що* (t_k) — *зростаюча до* $+\infty$ *послідовність додатних чисел і* $t_{k+1} \le g(t_k)$. *Тоді*

$$\frac{\Phi^{-1}(G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi))} \ge \frac{\Phi^{-1}(G_1(t_k, g(t_k), \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(t_k, g(t_k), \Phi))}.$$

З (29) випливає, що $\lambda_{n_{k+1}} \le \lambda_{n_k}^{1+\eta}$ для кожного $\eta > 0$ і всіх $k \ge k_0(\eta)$. Тому за лемою 3 і лемою 7 з $g(x) = x^{1+\eta}$ маємо

$$\Phi^{-1}(\ln \mu(\sigma, F)) \ge \sigma \frac{\Phi^{-1}(G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi))} \tag{31}$$

для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх досить великих k. Оскільки $\Phi(\varphi(x)) = \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\varphi(x)|}\right\} > x^{1-\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ і всіх досить великих x і $\Phi^{-1}(x) = \dfrac{-\varrho}{\ln x}$, то при $k \to \infty$

$$\Phi^{-1}(G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi)) \ge$$

$$\ge \frac{-\varrho}{\ln\left(\dfrac{\lambda_{n_k}^{1+\eta}\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}^{1+\eta} - \lambda_{n_k}} \dfrac{\lambda_{n_k}^{-\varepsilon} - \lambda_{n_k}^{-\varepsilon(1+\eta)}}{\varepsilon}\right)} = \frac{-\varrho}{(1-\varepsilon)\ln \lambda_{n_k} - \ln \varepsilon + o(1)}.$$

З іншого боку,

$$\Phi^{-1}(G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi)) = \varkappa(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi) = -\varrho(1 + o(1))A_k =$$

$$= -\varrho(1 + o(1)) \frac{\lambda_{n_k}^{1+\eta} \ln \lambda_{n_k} - \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}^{1+\eta}}{(\lambda_{n_k}^{1+\eta} - \lambda_{n_k}) \ln \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}^{1+\eta}} = \frac{-\varrho(1 + o(1))}{(1+\eta)\ln \lambda_{n_k}}, \quad k \to \infty.$$

Тому з (31) отримуємо $\Phi^{-1}(\ln \mu(\sigma, F)) \ge \sigma \dfrac{1+\eta}{1-\varepsilon}(1 + o(1))$ при $\sigma \uparrow 0$, звідки з огляду на довільність ε і η одержуємо нерівність $\ln \ln \mu(\sigma, F) \le \dfrac{(1 + o(1))\varrho}{|\sigma|}$, $\sigma \uparrow 0$.

Теорему 3 доведено.

Позначимо через $S^*(\Lambda, 0)$ клас формальних рядів Діріхле (1) таких, що $|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \to 0$, $n \to \infty$, для кожного $\sigma < 0$, і будемо говорити, що такий ряд належить до класу $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda, 0)$, якщо $\ln \mu(\sigma, F) \le (\Phi(1 + o(1))\sigma)$, і до класу $S^*_{M,\Phi}(\Lambda, 0)$, якщо $\ln M(\sigma, F) \le \Phi((1 + o(1))\sigma)$ при $\sigma \uparrow 0$. З огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ маємо $S^*_{M,\Phi}(\Lambda, 0) \subset S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda, 0)$. З іншого боку, якщо $\Phi \in \Omega(0)$, $|\sigma|\Phi'(\sigma)\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ і $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow 0$, то за доведеною у [8] теоремою для того, щоб $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda, 0) \subset S^*_{M,\Phi}(\Lambda, 0)$, достатньо, щоб $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$, і необхідно, щоб $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| \ge 1$. Як видно з доведення цієї теореми, за умови $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$ з огляду на нерівність Коші рівносильними є і асимптотичні рівності $\ln \mu(\sigma, F) = \Phi(1+o(1))\sigma)$ і $\ln M(\sigma, F) = \Phi(1 + o(1))\sigma)$ при $\sigma \uparrow 0$. Легко перевірити, що функція

$$\Phi(\sigma) = \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$$

задовольняє умови цього твердження, а умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$ у даному випадку рівносильна умові (2). Тому з теореми 3 випливає наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконується умова* (2). *Для того щоб асимптотична рівність* (25) *була правильною, необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon \in (0, \varrho)$ *виконувались умови* 1 *і* 2 *теореми* 3.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. *Гайсин А. М.* Оценки роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 3. – С. 412 – 424.
3. *Шеремета М. Н., Федыняк С. И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 1. – С. 206 – 223.
4. *Шеремета М. М., Сумик О. М.* Зв’язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 1. – С. 41 – 47.
5. *Заболоцький М. В., Шеремета М. М.* Узагальнення теореми Ліндельофа // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1177 – 1192.
6. *Шеремета М. Н.* О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле // Мат. заметки. – 2003. – **73**, № 3. – С. 437 – 443.
7. *Сумик О. М.* Оцінки максимального члена ряду Діріхле знизу // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. – С. 40 – 43.
8. *Зеліско М. М., Шеремета М. М.* Про асимптотичне поводження логарифмів максимуму модуля і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Там же. – 2006. – Вип. 66. – С. 70 – 74.

Одержано 14.12.10