УДК 517.956

П. Ф. Самусенко (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИРОДЖЕННЯМ

An asymptotic solution of the first boundary-value problem for a linear singularly perturbed system of hyperbolic-type partial differential equations with degeneration is constructed.

Построено асимптотическое решение первой краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с вырождением.

Вступ. Різноманітні аспекти теорії рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами розглядались І. Г. Петровським, Р. Курантом, Л. Гордінгом. Дослідженню властивостей розв'язків крайових задач для гіперболічних рівнянь присвячено праці О. О. Ладиженської, М. І. Вишика, О. А. Олейник, Ю. О. Митропольського, Б. І. Мосеєнкова, Г.П. Хоми, С. Ф. Фещенка, М. А. Сотніченка та ін. Так, О. О. Ладиженська навела достатні умови існування та єдиності як класичного, так і узагальненого розв'язку основних крайових задач у лінійному випадку. При цьому обґрунтовано застосування методу Фур'є до розв'язання крайових задач для систем рівнянь гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами [1, с. 70 – 190]. Ю. О. Митропольський та Г. П. Хома досліджували першу крайову задачу для квазілінійних і нелінійних рівнянь гіперболічного типу [2, с. 137 – 225]. При цьому використовувались два основних методи. Перший ґрунтується на зведенні заданої задачі до зчисленної системи звичайних диференціальних рівнянь і подальшому застосуванні узагальнень теорем М. М. Боголюбова або укороченні одержаної системи, другий — на безпосередній побудові асимптотичних розвинень розв'язків крайових задач з використанням відповідних розв'язків незбурених систем. Зазначимо, що в задачах, які розглядались Ю. О. Митропольським та Г. П. Хомою, малий параметр входить регулярно. Мішану задачу для гіперболічних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами досліджували С. Ф. Фещенко та М. І. Шкіль [3, с. 226 – 245].

У даній роботі розглядається перша крайова задача

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t,\varepsilon)u + f(x,t,\varepsilon), \qquad t\in[0;T], \quad x\in[0;L], \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=\psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon)=u(L,t,\varepsilon)=0, \tag{3}$$

де $u=u(x,t,\varepsilon)$ — шукана тривимірна вектор-функція, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(x,t,\varepsilon)$ — квадратні матриці 3-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — тривимірні вектор-функції з дійсними або комплекснозначними компонентами, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0\ll 1$.

Побудова класичного розв'язку першої крайової задачі. Припускатимемо виконання таких умов:

1) компоненти матриць $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(x,t,\varepsilon)$ та вектор-функції $f(x,t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε, тобто

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{i\geq 0}\varepsilon^i A_i(t),\quad B(t,\varepsilon)=\sum_{i\geq 0}\varepsilon^i B_i(t),\quad t\in[0;T],$$

$$C(x,t,\varepsilon)=\sum_{i\geq 0}\varepsilon^i C_i(x,t),\quad f(x,t,\varepsilon)=\sum_{i\geq 0}\varepsilon^i f_i(x,t),\quad (x,t)\in\overline{D},$$

де $\overline{D}=\{(x,t)\colon 0\leq x\leq L,\ 0\leq t\leq T\}$;

2) $A_i(t)$, $B_i(t)\in C^\infty[0;T]$, $C_i(x,t)$, $f_i(x,t)\in C^\infty(\overline{D})$, $i\geq 0$;

3) $\varphi(x)\in C^6[0;L]$, $\psi(x)\in C^6[0;L]$;

4) $\varphi^{(2k)}(0)=\varphi^{(2k)}(L)=0$, $\psi^{(2k)}(0)=\psi^{(2k)}(L)=0$, $k=\overline{0,2}$;

5) $\dfrac{\partial C(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=\dfrac{\partial C(L,t,\varepsilon)}{\partial x}=0$, $t\in[0;T]$;

6) $\dfrac{\partial^{2k} f(0,t,\varepsilon)}{\partial x^{2k}}=\dfrac{\partial^{2k} f(L,t,\varepsilon)}{\partial x^{2k}}=0$, $t\in[0;T]$, $k=0,1$;

7) $\lambda_0(t)>0$, де $\lambda_0(t)$ — власне значення матриці $A_0(t)$ відносно $B_0(t)$.

Вважатимемо, що в'язка $A_0(t)-\lambda B_0(t)$ регулярна, має один скінченний елементарний дільник кратності 2 і один нескінченний елементарний дільник.

Тоді існуватимуть неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon)\in\overline{K}$,

$$\overline{K}=\{(t,\varepsilon)\colon 0\leq t\leq T,\ 0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1\},\ \varepsilon_1\leq\varepsilon_0,$$

компоненти яких допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε, такі, що

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=H(t,\varepsilon)\equiv\operatorname{diag}\{b(t,\varepsilon),E_2(t,\varepsilon)\},$$

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\Omega(t,\varepsilon)\equiv\operatorname{diag}\{e(t,\varepsilon),W_2(t,\varepsilon)\},$$

де

$$e(t,0)=1,\quad E_2(t,0)=E_2,\quad b(t,0)=0,\quad W_2(t,0)=\lambda_0(t)E_2+J_2,$$

E_2 — одинична матриця другого порядку, J_2 — квадратна матриця другого порядку, компонента верхньої наддіагоналі якої дорівнює 1, а решта її компонент дорівнюють 0 [4]. При цьому $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^\infty[0;T]$.

Розв'язок задачі (1) – (3) шукатимемо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}z_s(t,\varepsilon)v_s(x),\tag{4}$$

де $z_s(t,\varepsilon)$ — шукана тривимірна вектор-функція, а $v_s(x)$ — скалярна функція, що задовольняє рівняння

$$v_s''(x)+\omega_s^2 v_s(x)=0,\quad \omega_s=\frac{s\pi}{L},\tag{5}$$

з крайовими умовами

$$v_s(0)=v_s(L)=0.$$

Тобто

$$v_s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \omega_s x, \quad s \in N.$$

При цьому

$$\int_0^L v_s(x) v_k(x) dx = \delta_{sk},$$

де δ_{sk} — символ Кронекера.

Підставляючи (4) в (1), з урахуванням (5), домножуючи отриману рівність на $v_k(x)$ та інтегруючи її обидві частини за змінною x в межах від 0 до L, отримуємо

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) z_s'' + \omega_s^2 A(t,\varepsilon) z_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_{sk}(t,\varepsilon) z_k + f_s(t,\varepsilon), \quad s \in N, \tag{6}$$

де

$$C_{sk}(t,\varepsilon) = \int_0^L C(x,t,\varepsilon) v_k(x) v_s(x) dx, \quad f_s(t,\varepsilon) = \int_0^L f(x,t,\varepsilon) v_s(x) dx.$$

У системі (6) виконаємо заміну $z_s(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon) r_s(t,\varepsilon)$ і домножимо обидві її частини зліва на $P(t,\varepsilon)$. Матимемо

$$\varepsilon^2 H(t,\varepsilon) r_s'' + \omega_s^2 \Omega(t,\varepsilon) r_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t,\varepsilon) r_k + \varepsilon^2 (D_1(t,\varepsilon) r_s + G(t,\varepsilon) r_s') +$$
$$+ P(t,\varepsilon) f_s(t,\varepsilon), \tag{7}$$

де $D_{0sk}(t,\varepsilon) = P(t,\varepsilon) C_{sk}(t,\varepsilon) Q(t,\varepsilon)$, $s,k \in N$, $D_1(t,\varepsilon) = -P(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) Q''(t,\varepsilon)$, $G(t,\varepsilon) = -2P(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) Q'(t,\varepsilon)$.

Запишемо систему (7) таким чином:

$$\varepsilon^2 \widetilde{H}(t,\varepsilon) r'' + \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) r = \varepsilon (\widetilde{D}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon \widetilde{D}_1(t,\varepsilon)) r + \varepsilon^2 \widetilde{G}(t,\varepsilon) r' + \widetilde{f}(t,\varepsilon), \tag{8}$$

де $r(t,\varepsilon)$ та $\widetilde{f}(t,\varepsilon)$ — нескінченновимірні вектори з компонентами $r_s(t,\varepsilon)$ та $P(t,\varepsilon) f_s(t,\varepsilon)$ відповідно,

$$\widetilde{H}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{H(t,\varepsilon), H(t,\varepsilon), \ldots\}, \quad \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\omega_1^2 \Omega(t,\varepsilon), \omega_2^2 \Omega(t,\varepsilon), \ldots\right\},$$

$\widetilde{D}_0(t,\varepsilon)$ — нескінченна матриця, що складається з блоків $D_{0sk}(t,\varepsilon)$, $k,s \in N$, $\widetilde{D}_1(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{D_1(t,\varepsilon), D_1(t,\varepsilon), \ldots\}$, $\widetilde{G}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{G(t,\varepsilon), G(t,\varepsilon), \ldots\}$.

Нехай

$$\widetilde{H}(t,\varepsilon) = \sum_{i \ge 0} \varepsilon^i \widetilde{H}^{(i)}(t), \quad \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = \sum_{i \ge 0} \varepsilon^i \widetilde{\Omega}^{(i)}(t), \quad \widetilde{D}_0(t,\varepsilon) = \sum_{i \ge 0} \varepsilon^i \widetilde{D}_0^{(i)}(t),$$

$$\widetilde{D}_1(t,\varepsilon) = \sum_{i \ge 0} \varepsilon^i \widetilde{D}_1^{(i)}(t), \quad \widetilde{G}(t,\varepsilon) = \sum_{i \ge 0} \varepsilon^i \widetilde{G}^{(i)}(t), \quad \widetilde{f}(t,\varepsilon) = \sum_{i \ge 0} \varepsilon^i \widetilde{f}^{(i)}(t).$$

При цьому $\widetilde{H}^{(0)}(t) \equiv \widetilde{H}^{(0)} = \text{const}$.

Розв'язок системи (8) шукатимемо у вигляді

$$r(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \tag{9}$$

де $\xi_+(t,\varepsilon)$ — нескінченновимірна вектор-функція, що є розв'язком задачі

$$\varepsilon\frac{d\xi_+}{dt} = \Lambda_+(t,\varepsilon)\xi_+,\ \xi_+(0,\varepsilon) = a, \tag{10}$$

a — нескінченновимірний вектор, всі компоненти якого дорівнюють 1; $\Pi_+(t,\varepsilon)$ — нескінченна матриця, $\Lambda_+(t,\varepsilon)$ — нескінченна діагональна матриця та $g(t,\varepsilon)$ — нескінченновимірна вектор-функція вигляду

$$\begin{gathered}\Pi_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m+2}\mu^i\Pi_+^{(i)}(t), \quad \Lambda_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m+1}\mu^i\Lambda_+^{(i)}(t),\\ g(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{1+\left[\frac{m}{2}\right]}\varepsilon^i g^{(i)}(t), \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}.\end{gathered} \tag{11}$$

Для визначення $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $g^{(i)}(t)$ підставимо (9), врахувавши (10), у систему (8). Тоді, зрівнюючи коефіцієнти при $\xi_+(t,\varepsilon)$ і вільні члени, матимемо

$$\begin{gathered}\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+^2(t,\varepsilon) + \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon) = \mu^2(\widetilde{D}_0(t,\varepsilon) + \mu^2\widetilde{D}_1(t,\varepsilon))\Pi_+(t,\varepsilon)+\\ +\mu^4\widetilde{G}(t,\varepsilon)\Pi_+'(t,\varepsilon) + \mu^2\widetilde{G}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) - \mu^4\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+''(t,\varepsilon)-\\ -2\mu^2\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+'(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) - \mu^2\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+'(t,\varepsilon),\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{\Omega}(t,\varepsilon)g(t,\varepsilon) = \varepsilon(\widetilde{D}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\widetilde{D}_1(t,\varepsilon))g(t,\varepsilon) + \varepsilon^2\widetilde{G}(t,\varepsilon)g'(t,\varepsilon)+\\ +\widetilde{f}(t,\varepsilon) - \varepsilon^2\widetilde{H}(t,\varepsilon)g''(t,\varepsilon).\end{gathered} \tag{13}$$

Розглянемо тотожність (12). Зрівнюючи в ній коефіцієнти при однакових степенях μ^i, $i = \overline{0, m+2}$, отримуємо

$$\widetilde{H}^{(0)}\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \widetilde{\Omega}^{(0)}(t)\Pi_+^{(0)}(t) = 0, \tag{14}$$

$$\widetilde{H}^{(0)}\Pi_+^{(i)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \widetilde{\Omega}^{(0)}(t)\Pi_+^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{i}{4}\right]}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-2(j+1))}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{i}{6}\right]}\big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-2(j+2))}(t)+\widetilde{G}^{(j)}(t)(\Pi_+^{(i-2(j+2))}(t))'-\widetilde{H}^{(j)}(t)(\Pi_+^{(i-2(j+2))}(t))''\big)+$$

$$+\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{\left[\frac{i-j}{2}\right]}\big(\widetilde{G}^{(j)}(t)\Pi_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(i-2(j+1)-k)}(t) - 2\widetilde{H}^{(j)}(t)(\Pi_+^{(k)}(t))'\Lambda_+^{(i-2(j+1)-k)}(t)-$$

$$-\widetilde{H}^{(j)}(t)\Pi_+^{(k)}(t)(\Lambda_+^{(i-2(j+1)-k)}(t))'\big) - \widetilde{H}^{(0)}\Pi_+^{(0)}(t)\Bigg(2\Lambda_+^{(0)}(t)\Lambda_+^{(i)}(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j)}(t)\Bigg) - \widetilde{H}^{(0)}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\Pi_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}\sum_{k=0}^{i-j}\sum_{s=0}^{i-k}\widetilde{H}^{(j)}(t)\Pi_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(s)}(t)\Lambda_+^{(i-k-2j-s)}(t) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-2j)}(t), \qquad (15)$$

$$i=\overline{1,m+2}, \quad \Pi_+^{(k)}(t)\equiv 0, \quad \Lambda_+^{(k)}(t)\equiv 0, \quad t\in[0;T], \quad k<0.$$

Запишемо систему (14) таким чином:

$$(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(0)})p_{l+}^{(0)}(t) = 0, \quad l\in N, \qquad (16)$$

де $p_{l+}^{(0)}(t)$ — стовпці матриці $\Pi_+^{(0)}(t)$, $\Lambda_+^{(0)}(t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_{1+}^{(0)}(t), \lambda_{2+}^{(0)}(t), \ldots\}$.

Нехай $p_{l+}^{(0)}(t) = \mathrm{colon}\,(p_{l1+}^{(0)}(t), p_{l2+}^{(0)}(t), \ldots)$, $p_{ls+}^{(0)}(t)$, $s\in N$, — тривимірна векторфункція. Тоді система (16) набуде вигляду

$$(\omega_s^2\Omega_0(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 H_0)p_{ls+}^{(0)}(t) = 0, \quad l,s\in N,$$

де

$$\Omega(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i\Omega_i(t), \quad H(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i H_i(t),$$

$$\Omega_0(t)\equiv \mathrm{diag}\,\{1, W_2(t)\}, \quad W_2(t) = W_2(t,0), \quad H_0(t)\equiv H_0 = \mathrm{diag}\,\{0, E_2\}.$$

Покладемо $p_{ls+}^{(0)}(t) = \mathrm{colon}\left(p_{ls1+}^{(0)}(t), p_{ls2+}^{(0)}(t)\right)$, $s\in N$, де $p_{ls2+}^{(0)}(t)$ — векторфункція, що містить дві останні компоненти $p_{ls+}^{(0)}(t)$. Тоді, враховуючи структуру матриць $\Omega_0(t)$ та H_0, отримуємо

$$p_{ls1+}^{(0)}(t)\equiv 0, \quad t\in[0;T], \quad l,s\in N,$$

$$\left(\omega_s^2 W_2(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 E_2\right)p_{ls2+}^{(0)}(t) = 0.$$

Нехай

$$\lambda_{l+}^{(0)}(t) = i\omega_l\sqrt{\lambda_0(t)}, \quad l\in N, \quad i^2=-1.$$

Тоді

$$p_{ls2+}^{(0)}(t)\equiv 0, \quad t\in[0;T], \quad l\neq s; \quad l,s\in N,$$

$$\{p_{ll2+}^{(0)}(t)\}_2\equiv 0, \quad t\in[0;T], \quad l\in N,$$

компоненту $\{p_{ll2+}^{(0)}(t)\}_1$ визначимо нижче.

Зрівнюючи коефіцієнти при μ у рівності (15), аналогічно одержуємо

$$\left(\omega_s^2\Omega_0(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 H_0\right)p_{ls+}^{(1)}(t) = b_{ls+}^{(1)}(t),$$

де

$$b_{ls+}^{(1)}(t) = -2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(1)}(t)H_0 p_{ls+}^{(0)}(t),$$

$p_{l+}^{(1)}(t)$, $l \in N$, — стовпці матриці $\Pi_{+}^{(1)}(t)$,

$$p_{l+}^{(1)}(t) = \operatorname{colon}(p_{l1+}^{(1)}(t), p_{l2+}^{(1)}(t), \ldots),$$

$$p_{ls+}^{(1)}(t) = \operatorname{colon}(p_{ls1+}^{(1)}(t), p_{ls2+}^{(1)}(t)), \quad l, s \in N,$$

$$\Lambda_{+}^{(1)}(t) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_{1+}^{(1)}(t), \lambda_{2+}^{(1)}(t), \ldots\right\}.$$

Отже,

$$p_{ls+}^{(1)}(t) \equiv 0, \quad t \in [0;T], \quad l \neq s, \quad l, s \in N,$$

і

$$p_{ll1+}^{(1)}(t) \equiv 0, \quad \{p_{ll2+}^{(1)}(t)\}_1 \equiv 0, \quad t \in [0;T],$$

$$\{p_{ll2+}^{(1)}(t)\}_2 = \{b_{ll2+}^{(1)}(t)\}_1, \quad l \in N.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при μ^2, маємо

$$\left(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \widetilde{H}^{(0)}\right) p_{l+}^{(2)}(t) = b_{l+}^{(2)}(t), \tag{17}$$

де

$$b_{l+}^{(2)}(t) = (\widetilde{D}_0^{(0)}(t) + \lambda_{l+}^{(0)}(t)\widetilde{G}^{(0)}(t) - (\lambda_{l+}^{(0)}(t))'\widetilde{H}^{(0)} - (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(1)}(t) -$$
$$-\widetilde{\Omega}^{(1)}(t))p_{l+}^{(0)}(t) - 2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\widetilde{H}^{(0)}(p_{l+}^{(0)}(t))' -$$
$$-\left(2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(2)}(t) + (\lambda_{l+}^{(1)}(t))^2\right)\widetilde{H}^{(0)}p_{l+}^{(0)}(t) - 2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(1)}(t)\widetilde{H}^{(0)}p_{l+}^{(1)}(t), \quad l \in N.$$

Тоді аналогічно

$$p_{ls+}^{(2)}(t) = \left(\omega_s^2\Omega_0(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 H_0\right)^{-1} b_{ls+}^{(2)}(t), \quad l \neq s; \quad l, s \in N,$$

і

$$p_{ll1+}^{(2)}(t) = \frac{1}{\omega_l^2}\, b_{ll1+}^{(2)}(t),$$

$$\{p_{ll2+}^{(2)}(t)\}_1 \equiv 0, \quad t \in [0;T],$$

$$\{p_{ll2+}^{(2)}(t)\}_2 = \{b_{ll2+}^{(2)}(t)\}_1,$$

$$l \in N.$$

Згідно зі структурою матриць $\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)$ та $\widetilde{H}^{(0)}$, система (17) буде сумісною тоді і тільки тоді, коли

$$\{b_{ll2+}^{(2)}(t)\}_2 \equiv 0, \quad t \in [0;T], \quad l \in N. \tag{18}$$

З умови сумісності (18) визначаємо $\lambda_{l+}^{(1)}(t)$, $l \in N$, а саме [5, c. 82 – 88],

$$\lambda_{l+}^{(1)}(t) = \frac{1}{2\lambda_{l+}^{(0)}(t)}\sqrt{a(t,l)},$$

$$a(t,l) = -\{\widetilde{D}_0^{(0)}(t)\}_{3l,3l-1} - \lambda_{l+}^{(0)}(t)\{\widetilde{G}^{(0)}(t)\}_{3l,3l-1} + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\{\widetilde{H}^{(1)}(t)\}_{3l,3l-1}+$$

$$+\{\widetilde{\Omega}^{(1)}(t)\}_{3l,3l-1}, \quad l \in N.$$

Припустимо, що виконується умова

8) $a(t,l) \neq 0$, $t \in [0;T]$, $l \in N$.

Зрівнюючи коефіцієнти при μ^3, отримуємо

$$(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(0)})p_{l+}^{(3)}(t) = b_{l+}^{(3)}(t), \tag{19}$$

де

$$b_{l+}^{(3)}(t) = (\widetilde{D}_0^{(0)}(t) + \lambda_{l+}^{(0)}(t)\widetilde{G}^{(0)}(t) - (\lambda_{l+}^{(0)}(t))'\widetilde{H}^{(0)} - (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(1)}(t)-$$

$$-\widetilde{\Omega}^{(1)}(t))p_{l+}^{(1)}(t) + (\lambda_{l+}^{(1)}(t)\widetilde{G}^{(0)}(t) - (\lambda_{l+}^{(1)}(t))'\widetilde{H}^{(0)} - 2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(1)}(t)\widetilde{H}^{(1)}(t))p_{l+}^{(0)}(t)-$$

$$-2\lambda_{l+}^{(1)}(t)\widetilde{H}^{(0)}(p_{l+}^{(0)}(t))' - 2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\widetilde{H}^{(0)}(p_{l+}^{(1)}(t))' - \Bigg(2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(3)}(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\lambda_{l+}^{(j)}(t)\lambda_{l+}^{(3-j)}(t)\Bigg)\widetilde{H}^{(0)}p_{l+}^{(0)}(t) - \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{3-j}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(3-k-j)}(t)\widetilde{H}^{(0)}p_{l+}^{(j)}(t), \;\; l \in N.$$

Отже,

$$p_{ls+}^{(3)}(t) = (\omega_s^2\Omega_0(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2H_0)^{-1}b_{ls+}^{(3)}(t), \quad l \neq s; \quad l,s \in N,$$

$$p_{ll1+}^{(3)}(t) = \frac{1}{\omega_l^2}\,b_{ll1+}^{(3)}(t),$$

$$\{p_{ll2+}^{(3)}(t)\}_1 \equiv 0, \quad t \in [0;T],$$

$$\{p_{ll2+}^{(3)}(t)\}_2 = \{b_{ll2+}^{(3)}(t)\}_1, \quad l \in N.$$

Як і раніше, система (19) буде сумісною тоді і тільки тоді, коли

$$\{b_{ll2+}^{(3)}(t)\}_2 \equiv 0, \quad t \in [0;T], \quad l \in N. \tag{20}$$

З умови сумісності (20) знаходимо $\lambda_{l+}^{(2)}(t)$, $l \in N$. А саме,

$$\lambda_{l+}^{(2)}(t) = \frac{1}{8(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\lambda_{l+}^{(1)}(t)}\,c^{(3)}(t,l),$$

де $c^{(3)}(t,l)$ — відома функція, що не залежить від $\lambda_{l+}^{(2)}(t)$.

Припустимо, що таким чином визначено $p_{l+}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, i+1}$, та $\lambda_{l+}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,i}$. Тоді, зрівнюючи коефіцієнти при μ^{i+2}, $i \in N$, отримуємо

$$\left(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(0)}\right)p_{l+}^{(i+2)}(t) = b_{l+}^{(i+2)}(t), \tag{21}$$

де

$$b_{l+}^{(i+2)}(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{i+2}{4}\right]}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)p_{l+}^{(i-2j)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{i+2}{6}\right]}\Big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)p_{l+}^{(i-2(j+1))}(t)+\widetilde{G}^{(j)}(t)(p_{l+}^{(i-2(j+1))}(t))'-\widetilde{H}^{(j)}(t)(p_{l+}^{(i-2(j+1))}(t))''\Big)+$$

$$+\sum_{j=0}^{i+2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{i-j+2}{2}\right]}\Big(\lambda_{l+}^{(i-2j-k)}(t)\widetilde{G}^{(j)}(t)p_{l+}^{(k)}(t)-2\lambda_{l+}^{(i-2j-k)}(t)\widetilde{H}^{(j)}(t)(p_{l+}^{(k)}(t))'-$$

$$-(\lambda_{l+}^{(i-2j-k)}(t))'\widetilde{H}^{(j)}(t)p_{l+}^{(k)}(t)\Big)-\widetilde{H}^{(0)}p_{l+}^{(0)}(t)\Big(2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(i+2)}(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{i+1}\lambda_{l+}^{(j)}(t)\lambda_{l+}^{(i-j+2)}(t)\Big)-\widetilde{H}^{(0)}\sum_{j=1}^{i+1}\sum_{k=0}^{i-j+2}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j+2)}(t)p_{l+}^{(j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{i+2}{2}\right]}\sum_{k=0}^{i-j+2}\sum_{s=0}^{i-k+2}\lambda_{l+}^{(s)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-2(j-1)-s)}(t)\widetilde{H}^{(j)}(t)p_{l+}^{(k)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{i+2}{2}\right]}\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)p_{l+}^{(i-2(j-1))}(t),\quad i=\overline{1,m},\quad l\in N.$$

Отже,

$$p_{ls+}^{(i+2)}(t)=(\omega_s^2\Omega_0(t)+(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2H_0)^{-1}b_{ls+}^{(i+2)}(t),\quad l\neq s;\quad l,s\in N,$$

$$p_{ll1+}^{(i+2)}(t)=\frac{1}{\omega_l^2}\,b_{ll1+}^{(i+2)}(t),$$

$$\{p_{ll2+}^{(i+2)}(t)\}_1\equiv 0,\quad t\in[0;T],$$

$$\{p_{ll2+}^{(i+2)}(t)\}_2=\{b_{ll2+}^{(i+2)}(t)\}_1,$$

$$i=\overline{1,m},\quad l\in N.$$

З умови сумісності

$$\{b_{ll2+}^{(i+2)}(t)\}_2\equiv 0,\quad t\in[0;T],\quad l\in N, \tag{22}$$

системи (21) визначаємо $\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)$, $l\in N$. Справді, лише доданок

$$\sum_{j=1}^{i+1}\sum_{k=0}^{i-j+2}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j+2)}(t)\{p_{ll2+}^{(j)}(t)\}_2$$

з виразу для $\{b_{ll2+}^{(i+2)}(t)\}_2$ містить $\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)$.

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{i+1}\sum_{k=0}^{i-j+2}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j+2)}(t)\{p_{ll2+}^{(j)}(t)\}_2=2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)\{p_{ll2+}^{(1)}(t)\}_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(1-k)}(t)\{p_{ll2+}^{(i+1)}(t)\}_2+d_1^{(i+1)}(t,l)=2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)\{p_{ll2+}^{(1)}(t)\}_2-$$

$$-4(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\lambda_{l+}^{(1)}(t)\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)\{p_{ll2+}^{(0)}(t)\}_1+d_2^{(i+1)}(t,l)=$$
$$=-8(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\lambda_{l+}^{(1)}(t)\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)\{p_{ll2+}^{(0)}(t)\}_1+d_2^{(i+1)}(t,l),$$

де через $d_j^{(i+1)}(t,l)$, $j=\overline{1,2}$, позначено вирази, що не містять $\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)$, то

$$\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)=\frac{1}{8(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\lambda_{l+}^{(1)}(t)}\,c^{(i+1)}(t,l),$$

$c^{(i+1)}(t,l)$ — відома функція, що не залежить від $\lambda_{l+}^{(i+1)}(t)$.

Отже, матриці $\Pi_+^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,m+2}$, та $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,m+1}$, визначено.

Аналогічно з тотожності (13) знаходимо вектор-функцію $g(t,\varepsilon)$:

$$g^{(0)}(t)=(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t))^{-1}\widetilde{f}^{(0)}(t), \tag{23}$$

$$g^{(i)}(t)=(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t))^{-1}\left(\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)g^{(i-j-1)}(t)+\sum_{j=0}^{i-2}\Big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)g^{(i-j-2)}(t)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{G}^{(j)}(t)(g^{(i-j-2)}(t))'-\widetilde{H}^{(j)}(t)(g^{(i-j-2)}(t))''\Big)-\sum_{j=1}^{i}\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)g^{(i-j)}(t)+\widetilde{f}^{(i)}(t)\right), \tag{24}$$

$$i=\overline{1,\left[\frac{m}{2}\right]}.$$

Формули для визначення $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l\in N$, отримано за умови існування відповідних нескінченних матриць у системі (15). Зупинимося на цьому питанні докладніше.

Згідно з умовами 5, 6 матимемо

$$\|D_{0sk}(t,\varepsilon)\|\le\frac{M}{(\omega_k-\omega_s)^4},\quad k\ne s,\quad k,s\in N,$$
$$\|f_s(t,\varepsilon)\|\le\frac{M}{\omega_s^5},\quad s\in N,$$

зі сталою M, що не залежить від k, s.

Далі у випадках, коли важливим є лише факт обмеженості, а не величина відповідної сталої, писатимемо одну й ту ж сталу M.

Нехай $\{p_{ll2+}^{(0)}(t)\}_1\equiv\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1=\mathrm{const}$, $t\in[0;T]$, $l\in N$. Далі припускатимемо виконання таких умов:

9) $m=1$;

10) $\{\widetilde{H}^{(1)}(t)\}_{3l-1,3l-1}\equiv\{\widetilde{H}^{(1)}(t)\}_{3l-1,3l}\equiv\{\widetilde{H}^{(1)}(t)\}_{3l,3l-1}\equiv\{\widetilde{H}^{(1)}(t)\}_{3l,3l}\equiv$ $\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $l\in N$.

Тоді згідно зі структурою матриці $Q(t,\varepsilon)$ матимемо [4]

$$\left|\lambda_{l+}^{(1)}(t)\right|\le\frac{M}{\omega_l},\qquad\left|\lambda_{l+}^{(2)}(t)\right|\le M$$

і

$$\left|p_{ll1+}^{(i)}(t)\right| \leq M\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right|,$$

$$\left|\{p_{ll2+}^{(1)}(t)\}_2\right| \leq M\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right|, \quad \left|\{p_{ll2+}^{(i)}(t)\}_2\right| \leq M\omega_l\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right|, \quad i=2,3, \quad l \in N,$$

$$\left|p_{ls1+}^{(i)}(t)\right| \leq \frac{M\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right.}{\omega_s^2(\omega_s-\omega_l)^4}, \quad \left\|p_{ls2+}^{(i)}(t)\right\| \leq \frac{M\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right.}{(\omega_s-\omega_l)^6}, \;\; i=2,3; \;\; l \neq s; \;\; l,s \in N,$$

стала M не залежить від l, s.

Нехай $w_+(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon)$. Покладаючи

$$\lambda_{l-}^{(0)}(t) = -i\omega_l\sqrt{\lambda_0(t)}, \quad l \in N, \quad i^2=-1,$$

аналогічно визначаємо $\Pi_-(t,\varepsilon)$, $\Lambda_-(t,\varepsilon)$, $\xi_-(t,\varepsilon)$ та $w_-(t,\varepsilon)$.

Побудуємо вектор-функцію

$$u_1(x,t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon))v_s(x), \tag{25}$$

де

$$w_{s+}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix}\{w_+(t,\varepsilon)\}_{3s-2}\\ \{w_+(t,\varepsilon)\}_{3s-1}\\ \{w_+(t,\varepsilon)\}_{3s}\end{pmatrix}, \quad s \in N,$$

$$\{w_+(t,\varepsilon)\}_j = \sum_{l=1}^{\infty}\{\Pi_+(t,\varepsilon)\}_{jl}\{\xi_+(t,\varepsilon)\}_l + \{g(t,\varepsilon)\}_j, \quad j=\overline{3s-2,3s}, \quad s \in N.$$

Аналогічну структуру має $w_{s-}(t,\varepsilon)$.

Для визначення $\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1$ і $\{p_{ll2-}^{(0)}\}_1$, $l \in N$, розглянемо систему

$$\begin{gathered}\{w_+(0,\varepsilon)\}_{3l-1} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{3l-1} = \sum_{j=1}^{3}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)\}_{2j}\{a_l\}_j,\\ (\{w_+(t,\varepsilon)\}_{3l-1} + \{w_-(t,\varepsilon)\}_{3l-1})'_{|t=0} = \sum_{j=1}^{3}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)\}_{2j}\{b_l\}_j -\end{gathered} \tag{26}$$

$$-\sum_{j=1}^{3}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)Q'(0,\varepsilon)\}_{2j}(\{w_+(0,\varepsilon)\}_{3(l-1)+j} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{3(l-1)+j}), \quad l \in N,$$

де $\{a_l\}_j$ і $\{b_l\}_j$ — компоненти векторів $a_l = \int_0^L \varphi(x)v_l(x)dx$ і $b_l = \int_0^L \psi(x)v_l(x)dx$ відповідно, $l \in N$.

Систему (26) запишемо таким чином:

$$\begin{gathered}\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1 = f_1\left(\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1, \{p_{ll2-}^{(0)}\}_1\right),\\ \{p_{ll2-}^{(0)}\}_1 = f_2\left(\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1, \{p_{ll2-}^{(0)}\}_1\right), \quad l \in N.\end{gathered} \tag{27}$$

Враховуючи умови 3, 4, отримуємо

$$\left\| f_i\left(\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1, \{p^{(0)}_{ll2-}\}_1\right)\right\| \le \frac{M_1}{\omega_l^6} + \varepsilon M_2\Bigg(|\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1 + |\{p^{(0)}_{ll2-}\}_1| + \frac{1}{\omega_l^6} +$$

$$+\sum_{\substack{h=1\\ h\neq l}}^{\infty}\left(\frac{|\{p^{(0)}_{hh2+}\}_1| + |\{p^{(0)}_{hh2-}\}_1|}{(\omega_l-\omega_h)^6} + \frac{\omega_h}{\omega_l}\left(\frac{|\{p^{(0)}_{hh2+}\}_1| + |\{p^{(0)}_{hh2-}\}_1|}{\omega_l^2(\omega_l-\omega_h)^4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|\{p^{(0)}_{hh2+}\}_1| + |\{p^{(0)}_{hh2-}\}_1|}{(\omega_l-\omega_h)^6}\right)\right)\Bigg), \quad i = 1, 2,$$

сталі M_1, M_2 не залежать від l.

А тому на множинах

$$S_{l6} = \left\{(\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1, \{p^{(0)}_{ll2-}\}_1) \in R^2 \colon \max\{|\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1|, |\{p^{(0)}_{ll2-}\}_1|\} \le \frac{M_0}{\omega_l^6}\right\},$$

$$M_0 < M_1, \quad l \in N,$$

функції $f_1\left(\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1, \{p^{(0)}_{ll2-}\}_1\right)$ та $f_2\left(\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1, \{p^{(0)}_{ll2-}\}_1\right)$ задовольняють умови теореми про існування та єдиність нерухомої точки [6, с. 609]. Отже, система (27) на множині S_{l6} має єдиний розв'язок. При цьому

$$\|p^{(0)}_{l+}\| \le \frac{M_0}{\omega_l^6}, \qquad \|p^{(0)}_{l-}\| \le \frac{M_0}{\omega_l^6}, \quad l \in N$$

(стала M_0 не залежить від l).

Припускатимемо виконання наступних умов:

11) компоненти $\{p^{(0)}_{ll2+}\}_1$, $\{p^{(0)}_{ll2-}\}_1$, $l \in N$, розв'язку системи (27) відмінні від нуля;

12) $\{w_+(0,\varepsilon)\}_{3l-k} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{3l-k} = \sum\limits_{j=1}^{3}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)\}_{3-k,j}\{a_l\}_j,$

$$(\{w_+(t,\varepsilon)\}_{3l-k} + \{w_-(t,\varepsilon)\}_{3l-k})'_{|t=0} = \sum_{j=1}^{3}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)\}_{3-k,j}\{b_l\}_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{3}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)Q'(0,\varepsilon)\}_{3-k,j}(\{w_+(0,\varepsilon)\}_{3(l-1)+j} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{3(l-1)+j}),$$

$$k = 0, 2, \quad l \in N.$$

Тоді ряд (25) збігається абсолютно і рівномірно у прямокутнику $\overline{D}$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (25) до двох разів включно; отримані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно для всіх $(x,t) \in \overline{D}$.

За побудовою

$$u_1(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1(x,0,\varepsilon)}{\partial t} = \psi(x).$$

Вектор-функція $w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon)$ задовольняє систему (7) з точністю $O\left(\dfrac{\varepsilon^2}{\omega_s^3}\right)$, $s \in N$, тобто $\|c_s(t,\varepsilon)\| \le \dfrac{k_0\varepsilon^2}{\omega_s^3}$, $t \in [0;T]$, де $c_s(t,\varepsilon)$ — відповідний залишок. Стала k_0 не залежить від ε, s.

У системі (7) виконаємо заміну

$$r_s(t,\varepsilon) = w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon) + y_s(t,\varepsilon). \tag{28}$$

Матимемо

$$\varepsilon^2 H(t,\varepsilon) y_s'' + \omega_s^2 \Omega(t,\varepsilon) y_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t,\varepsilon) y_k + \varepsilon^2 (D_1(t,\varepsilon) y_s +$$
$$+ G(t,\varepsilon) y_s') + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_s^3}\right), \quad s \in N. \tag{29}$$

Покладемо

$$y_s(0,\varepsilon) = 0, \quad y_s'(0,\varepsilon) = 0, \quad s \in N. \tag{30}$$

Запишемо систему (29) таким чином:

$$\varepsilon^2 b(t,\varepsilon) y_{s1}'' + \omega_s^2 e(t,\varepsilon) y_{s1} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{0sk}^{(1)}(t,\varepsilon) y_{k1} + D_{0sk}^{(2)}(t,\varepsilon) y_{k2} \right) +$$
$$+ \varepsilon^2 \left(D_1^{(1)}(t,\varepsilon) y_{s1} + D_1^{(2)}(t,\varepsilon) y_{s2} + G^{(1)}(t,\varepsilon) y_{s1}' + G^{(2)}(t,\varepsilon) y_{s2}' \right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_s^3}\right), \tag{31}$$

$$\varepsilon^2 E_2(t,\varepsilon) y_{s2}'' + \omega_s^2 W_2(t,\varepsilon) y_{s2} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{0sk}^{(3)}(t,\varepsilon) y_{k1} + D_{0sk}^{(4)}(t,\varepsilon) y_{k2} \right) +$$
$$+ \varepsilon^2 \left(D_1^{(3)}(t,\varepsilon) y_{s1} + D_1^{(4)}(t,\varepsilon) y_{s2} + G^{(3)}(t,\varepsilon) y_{s1}' + G^{(4)}(t,\varepsilon) y_{s2}' \right) +$$
$$+ O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_s^3}\right), \quad s \in N, \tag{32}$$

де $y_s = \operatorname{colon}(y_{s1}, y_{s2})$, y_{s2} — двовимірна вектор-функція,

$$D_{0sk}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} D_{0sk}^{(1)}(t,\varepsilon & D_{0sk}^{(2)}(t,\varepsilon) \\ D_{0sk}^{(3)}(t,\varepsilon & D_{0sk}^{(4)}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$D_{0sk}^{(4)}(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця 2-го порядку; аналогічну структуру мають матриці $D_1(t,\varepsilon)$ та $G(t,\varepsilon)$.

Припускаючи виконання умов:

13) $E_2^{-1}(t,\varepsilon) W_2(t,\varepsilon)$ — верхня трикутна матриця з однаковими власними значеннями для всіх $(t,\varepsilon) \in \overline{K}$;

14) $b(t,\varepsilon) = \varepsilon b_1(t,\varepsilon)$, $b_1(t,0) > 0$, $t \in [0;T]$,

позначимо через $\eta_1(t,\varepsilon)$ та $\eta_2(t,\varepsilon)$ диференціальні інваріанти рівнянь (31) та (32) відповідно, тобто [7, с. 25]

$$\eta_1(t,\varepsilon) = \frac{\theta_1''(t,\varepsilon)}{4\theta_1(t,\varepsilon)} - \frac{5}{16}\left(\frac{\theta_1'(t,\varepsilon)}{\theta_1(t,\varepsilon)}\right)^2, \quad \theta_1(t,\varepsilon) = \frac{e(t,\varepsilon)}{b_1(t,\varepsilon)},$$
$$\eta_2(t,\varepsilon) = \frac{1}{4}\,\Theta_2^{-1}(t,\varepsilon)\Theta_2''(t,\varepsilon) - \frac{5}{16}\,(\Theta_2^{-1}(t,\varepsilon)\Theta_2'(t,\varepsilon))^2,$$

$$\Theta_2(t,\varepsilon) = E_2^{-1}(t,\varepsilon)W_2(t,\varepsilon).$$

Тоді

$$y_{s1}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\omega_s}\int\limits_0^t \left(Y_{1s}(t,\tau,\varepsilon)\left(\eta_1(\tau,\varepsilon)y_{s1} + \frac{1}{b(\tau,\varepsilon)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(D_{0sk}^{(1)}(\tau,\varepsilon)y_{k1}+\right.\right.\right.$$

$$+D_{0sk}^{(2)}(\tau,\varepsilon)y_{k2}\Big) + D_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)y_{s1} + D_1^{(2)}(\tau,\varepsilon)y_{s2} - (G^{(1)}(\tau,\varepsilon))'y_{s1} -$$

$$\left.\left.-(G^{(2)}(\tau,\varepsilon))'y_{s2} + O\left(\frac{1}{\omega_s^3}\right)\right)\right) -$$

$$\left. - \left(\frac{Y_{1s}(t,\tau,\varepsilon)}{b(\tau,\varepsilon)}\right)'_\tau \Big(G^{(1)}(\tau,\varepsilon)y_{s1} + G^{(2)}(\tau,\varepsilon)y_{s2}\Big)\right)d\tau, \tag{33}$$

$$y_{s2}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s}\int\limits_0^t \left(Y_{2s}(t,\tau,\varepsilon)\left(\eta_2(\tau,\varepsilon)y_{s2} + E_2^{-1}(\tau,\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(D_{0sk}^{(3)}(\tau,\varepsilon)y_{k1}+\right.\right.\right.$$

$$+D_{0sk}^{(4)}(\tau,\varepsilon)y_{k2}\Big) + D_1^{(3)}(\tau,\varepsilon)y_{s1} + D_1^{(4)}(\tau,\varepsilon)y_{s2} - (G^{(3)}(\tau,\varepsilon))'y_{s1} -$$

$$\left.\left.-(G^{(4)}(\tau,\varepsilon))'y_{s2} + O\left(\frac{1}{\omega_s^3}\right)\right)\right) -$$

$$\left. - \big(Y_{2s}(t,\tau,\varepsilon)E_2^{-1}(\tau,\varepsilon)\big)'_\tau \Big(G^{(3)}(\tau,\varepsilon)y_{s1} + G^{(4)}(\tau,\varepsilon)y_{s2}\Big)\right)d\tau, \quad s\in N, \tag{34}$$

де

$$Y_{1s}(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[4]{\theta_1(t,\varepsilon)\theta_1(\tau,\varepsilon)}}\sin\frac{\omega_s\psi_1(t,\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}},\ \psi_1(t,\tau,\varepsilon) = \int\limits_\tau^t\sqrt{\theta_i(\tau,\varepsilon)}d\tau,$$

$$Y_{2s}(t,\tau,\varepsilon) = \Theta_2^{-\frac{1}{4}}(t,\varepsilon)\sin\frac{\omega_s\Psi_2(t,\tau,\varepsilon)}{\varepsilon}\,\Theta_2^{-\frac{1}{4}}(\tau,\varepsilon),\ \Psi_2(t,\tau,\varepsilon) = \int\limits_\tau^t\sqrt{\Theta_2(\tau,\varepsilon)}d\tau.$$

Нехай мають місце такі умови:

15) $\{D_{0sk}(t,0)\}_{1j}\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $j=\overline{1,3}$; $s,k\in N$;

16) $\dfrac{T}{\varepsilon}\sqrt[4]{\dfrac{b_1(t,0)}{b_1^5(\tau,0)}}\,|\{G(\tau,\varepsilon)\}_{1j}|\le\dfrac{d}{3}$, $0\le\tau\le t\le T$, $d<1$, $j=\overline{1,3}$;

17) $\dfrac{Lk_1T\|\Theta_2^{-1/4}(t,0)\|\,\|\Theta_2^{-1/4}(\tau,0)\|}{\pi}\left(1+16\left(\dfrac{L}{\pi}\right)^4\right)<\dfrac{1}{4}$, $0\le\tau\le t\le T$, де

$$\|D_{0ss}(t,\varepsilon)\|\le k_1,\ \|D_{0sk}(t,\varepsilon)\|\le\frac{k_1}{(\omega_s-\omega_k)^4},\quad s\ne k,\quad s,k\in N;$$

18) $T\|\Theta_2^{-1/4}(t,0)\|\,\|\Theta_2^{1/4}(\tau,0)\|\,\|G^{(i)}(\tau,0)\|<\dfrac{1}{4}$, $i=1,2$, $0\le\tau\le t\le T$.

Тоді для достатньо великих k_2

$$k_2 > \frac{k_0 T}{1-d} \max_{0\le\tau\le t\le T} \sqrt[4]{\frac{b_1(t,0)}{b_1^3(\tau,0)}},$$

оператор, визначений за допомогою (33), (34), відображає опуклу замкнену множину $D_{s4}^{(1/2)}$,

$$D_{s4}^{(1/2)} = \left\{ y_s(t,\varepsilon) \in C[0;T] \colon \|y_s(t,\varepsilon)\| \le \frac{k_2\sqrt{\varepsilon}}{\omega_s^4} \right\}, \quad s \in N, \quad \varepsilon \in [0;\varepsilon_1],$$

повного нормованого простору $C[0;T]$ в її компактну підмножину і є неперервним на $D_{s4}^{(1/2)}$. А тому він має нерухомі точки на множині $D_{s4}^{(1/2)}$ [6, с. 620]. Отже, система (33), (34) сумісна. При цьому мають місце рівності (30).

Використовуючи метод доведення від супротивного, показуємо єдиність знайденого розв'язку системи (33), (34) [8, с. 147 – 149].

З наведених оцінок для функцій $y_{si}(t,\varepsilon)$ випливає абсолютна і рівномірна збіжність ряду

$$\sum_{s=1}^{\infty} y_s(t,\varepsilon) v_s(x) \tag{35}$$

у прямокутнику $\overline{D}$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (35) за змінними t та x до двох разів включно; отримані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно в $\overline{D}$.

За побудовою

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} z_k''(t,\varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx + A(t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 z_k(t,\varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx \equiv$$

$$\equiv \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^L C(x,t,\varepsilon) v_k(x) v_s(x) dx \right) z_k(t,\varepsilon) + \int_0^L f(x,t,\varepsilon) v_s(x) dx, \ s \in N,$$

або

$$\int_0^L \Bigg(\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} - A(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t,\varepsilon) u(x,t,\varepsilon) -$$

$$- f(x,t,\varepsilon) \Bigg) v_s(x) dx \equiv 0, \quad s \in N,$$

де вектор-функція $u(x,t,\varepsilon)$ визначена за формулою (4).

Покладемо

$$q(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^2 B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} - A(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t,\varepsilon) u(x,t,\varepsilon) -$$

$$- f(x,t,\varepsilon).$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_s(t,\varepsilon)v_s(x),$$

де

$$q_s(t,\varepsilon) = \int_0^L q(x,t,\varepsilon)v_s(x)dx, \; s \in N.$$

За побудовою $q_s(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s \in N$.

Оскільки вектор-функція $q(x,t,\varepsilon)$ неперервна за змінною x, $x \in [0;L]$ (t, ε вважаємо параметрами) і

$$q(0,t,\varepsilon) = q(L,t,\varepsilon) = 0,$$

то, продовжуючи непарним способом компоненти $q(x,t,\varepsilon)$ на відрізок $[-L;0]$, приходимо до висновку, що $q(x,t,\varepsilon) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{D}$ [9, с. 578].

Таким чином, вектор-функція (4) у прямокутнику $\overline{D}$ є розв'язком задачі (1)–(3), причому

$$\|u(x,t,\varepsilon) - u_1(x,t,\varepsilon)\| = O(\sqrt{\varepsilon}\,). \tag{36}$$

Теорема 1. *Нехай* $A_i(t)$, $B_i(t) \in C^{m+4}[0;T]$, $C_i(x,t)$, $f_i(x,t) \in C^{m+4}(\overline{D})$, $i \geq 0$, *в'язка* $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ *на відрізку* $[0;T]$ *регулярна, має один скінченний елементарний дільник кратності* 2 *та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови* 1, 3–18. *Тоді існує* ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *таке, що задача* (1)–(3) *у прямокутнику* $\overline{D}$ *для всіх* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ *має єдиний розв'язок* (4), *для якого справджується оцінка* (36).

Побудова узагальненого розв'язку першої крайової задачі. Нехай тепер замість умов 3, 4, 6 виконуються такі умови:

19) $\varphi(x) \in C^4[0;L]$, $\psi(x) \in C^4[0;L]$;

20) $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(L) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = \psi^{(2k)}(L) = 0$, $k = 0,1$;

21) $f(0,t,\varepsilon) = f(L,t,\varepsilon) = 0$, $t \in [0;T]$.

Тоді

$$\left|p_{ls1+}^{(i)}(t)\right| \leq \frac{M\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right|}{\omega_s^2(\omega_s - \omega_l)^2},$$

$$\left\|p_{ls2+}^{(i)}(t)\right\| \leq \frac{M\left|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1\right|}{(\omega_s - \omega_l)^4}, \quad i = 2,3; \quad l \neq s; \quad l,s \in N,$$

стала M не залежить від l, s.

Отже, на множинах

$$S_{l4} = \left\{(\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1, \{p_{ll2-}^{(0)}\}_1) \in R^2 \colon \max\{|\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1|, |\{p_{ll2-}^{(0)}\}_1|\} \leq \frac{M_0}{\omega_l^4}\right\}, \quad l \in N,$$

система (27) має єдиний розв'язок $\{p_{ll2+}^{(0)}\}_1$, $\{p_{ll2-}^{(0)}\}_1$. При цьому

$$\|p_{l+}^{(0)}\| \leq \frac{M_0}{\omega_l^4}, \qquad \|p_{l-}^{(0)}\| \leq \frac{M_0}{\omega_l^4}, \quad l \in N$$

(стала M_0 не залежить від l).

У даному випадку вектор-функція $w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon)$ задовольняє систему (7) з точністю $O\left(\dfrac{\varepsilon^2}{\omega_s}\right)$, $s\in N$.

Нехай виконується умова

22) $\dfrac{Lk_1T\|\Theta_2^{-1/4}(t,0)\|\,\|\Theta_2^{-1/4}(\tau,0)\|}{\pi}\left(1+4\left(\dfrac{L}{\pi}\right)^2\right)<\dfrac{1}{4}$, $0\le\tau\le t\le T$.

Тоді для розв'язку $y_s=y_s(t,\varepsilon)$ системи, аналогічної до (33), (34), справджується оцінка $\|y_s(t,\varepsilon)\|=O\left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega_s^2}\right)$, $s\in N$.

За побудовою

$$\varepsilon^2B(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}z_k''(t,\varepsilon)\int\limits_0^L v_k(x)v_s(x)dx+A(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}\omega_k^2z_k(t,\varepsilon)\int\limits_0^L v_k(x)v_s(x)dx\equiv$$

$$\equiv\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^L C(x,t,\varepsilon)v_k(x)v_s(x)dx\right)z_k(t,\varepsilon)+\int\limits_0^L f(x,t,\varepsilon)v_s(x)dx,\quad s=\overline{1,m},$$

тобто

$$\int\limits_0^L\left(\varepsilon^2B(t,\varepsilon)\frac{\partial^2u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2}-A(t,\varepsilon)\frac{\partial^2u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2}-\varepsilon C(x,t,\varepsilon)u(x,t,\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-f(x,t,\varepsilon)\right)v_s(x)dx\equiv0,\quad s=\overline{1,m},$$

де

$$u_m(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}z_k(t,\varepsilon)v_k(x).$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}q_{ms}(t,\varepsilon)v_s(x),\tag{37}$$

де

$$q_{ms}(t,\varepsilon)=\int\limits_0^L q_m(x,t,\varepsilon)v_s(x)dx,\quad s\in N,$$

$$q_m(x,t,\varepsilon)=\varepsilon^2B(t,\varepsilon)\frac{\partial^2u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2}-A(t,\varepsilon)\frac{\partial^2u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2}-$$

$$-\varepsilon C(x,t,\varepsilon)u(x,t,\varepsilon)-f(x,t,\varepsilon).$$

За побудовою $q_{ms}(t,\varepsilon)\equiv0$, $t\in[0;T]$, $s=\overline{1,m}$. Оцінимо решту коефіцієнтів $q_{ms}(t,\varepsilon)$, $s\ge m+1$. Для цього зазначимо, що

$$q_{m+1}(x,t,\varepsilon)=q_m(x,t,\varepsilon)+\varepsilon^2B(t,\varepsilon)z_{m+1}''(t,\varepsilon)v_{m+1}(x)-A(t,\varepsilon)z_{m+1}(t,\varepsilon)v_{m+1}''(x).$$

Оскільки $q_{m+1,s}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $s = \overline{1, m+1}$, то

$$q_{m,m+1}(t,\varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) z''_{m+1}(t,\varepsilon) + \omega^2_{m+1} A(t,\varepsilon) z_{m+1}(t,\varepsilon)),$$

а тому

$$\|q_{m,m+1}(t,\varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega^2_{m+1}}$$

зі сталою M, що не залежить від m. І взагалі, враховуючи, що

$$q_{m+i}(x,t,\varepsilon) = q_m(x,t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{i} (\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) z''_{m+j}(t,\varepsilon) v_{m+j}(x) -$$

$$-A(t,\varepsilon) z_{m+j}(t,\varepsilon) v''_{m+j}(x)),$$

звідки

$$q_{m,m+i}(x,t,\varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) z''_{m+i}(t,\varepsilon) + \omega^2_{m+i} A(t,\varepsilon) z_{m+i}(t,\varepsilon)), \quad i \in N,$$

отримуємо

$$\|q_{ms}(t,\varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega^2_s}, \quad s \geq m+1,$$

стала M не залежить від m, s.

Таким чином, ряд (37) у прямокутнику $\overline{D}$ збігається абсолютно і рівномірно до функції $q_m(x,t,\varepsilon)$ [10, с. 68].

Оскільки $u_m(x,t,\varepsilon)$ є розв'язком задачі

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} = A(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u_m(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t,\varepsilon) u(x,t,\varepsilon) +$$

$$+ f(x,t,\varepsilon) + \sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t,\varepsilon) v_s(x),$$

$$u_m(x,0,\varepsilon) = \varphi_m(x), \qquad \frac{\partial u_m(x,0,\varepsilon)}{\partial t} = \psi_m(x),$$

$$u_m(0,t,\varepsilon) = u_m(L,t,\varepsilon) = 0,$$

де

$$\varphi_m(x) = \sum_{s=1}^{m} a_s v_s(x), \quad \psi_m(x) = \sum_{s=1}^{m} b_s v_s(x),$$

то вектор-функція (4) у прямокутнику $\overline{D}$ є узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) [11, с. 324].

Отже, має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $A_i(t)$, $B_i(t) \in C^{m+2}[0;T]$, $C_i(x,t)$, $f_i(x,t) \in C^{m+2}(\overline{D})$, $i \geq 0$, *в'язка* $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ *на відрізку* $[0;T]$ *регулярна, має один скінченний елементарний дільник кратності* 2 *та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови* 1, 7 – 16, 18 – 22. *Тоді існує* ε_1, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *таке, що задача* (1) – (3) *у прямокутнику* $\overline{D}$ *для всіх* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ *має єдиний узагальнений розв'язок* (4), *для якого справджується оцінка* (36).

1. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 279 с.
2. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследований квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1966. – 249 с.
4. *Sibuya Y.* Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point // Funkc. ekvacioj. – 1962. – № 4. – P. 29 – 56.
5. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Вища шк., 1991. – 207 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
7. *Павлюк І. А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. – 208 с.
8. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
11. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

Одержано 25.10.10