УДК 517.95

Н. М. Гринців (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ СЛАБКОВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

In a domain with free boundary, we consider the inverse problem for the determination of time dependent coefficient of the first derivative of unknown function in a parabolic equation with weak power degeneration. As overdetermination conditions, the Stefan condition and the integral condition are given. Conditions for the existence and uniqueness of the classical solution of considered problem are established.

В области со свободной границей рассматривается обратная задача определения коэффициента при первой производной неизвестной функции в параболическом уравнении со слабым степенным вырождением. В качестве условий переопределения в задаче использованы условие Стефана и интегральное условие. Установлены условия существования и единственности классического решения указанной задачи.

Вступ. У зв'язку з потребами практики в останні десятиліття активно розвивається теорія задач для рівнянь з частинними похідними з виродженням, коефіцієнтних обернених задач та задач з вільними межами. Окремо кожен із цих типів задач досліджувався раніше, проте їх поєднання в одній задачі залишається недостатньо вивченим і відкритим питанням. У даній роботі в області з вільною межею розглядається обернена задача визначення залежного від часу коефіцієнта перед першою похідною в одновимірному параболічному рівнянні з виродженням.

Коефіцієнтні обернені задачі з невідомим залежним від часу коефіцієнтом рівняння досліджено достатньо повно. Однією з перших робіт у цьому напрямку вважається робота B. F. Jones [1], у якій визначено коефіцієнт температуропровідності в напівобмеженому стержні при заданому значенні теплового потоку. Дослідженню обернених задач визначення залежних від часу молодших коефіцієнтів параболічного рівняння присвячено роботи [2 – 5]. Умови коректної розв'язності обернених задач визначення молодших коефіцієнтів рівняння, що залежать від просторової змінної, знайдено в [6], в той час як в [7] вивчено питання розв'язності оберненої задачі для параболічного рівняння, де невідомий молодший коефіцієнт залежить від частини просторових змінних і часу. Всі вказані вище роботи розглядались в областях з фіксованими межами з старшими коефіцієнтами рівняння, що дорівнюють одиниці.

Поєднанню оберненої задачі та задачі з вільною межею присвячено роботу [8], в якій крім функції, що задає невідому частину межі, потрібно визначити залежне від часу ядро інтегро-диференціального рівняння з простору Гельдера. Шляхом зведення задач із вільними межами до коефіцієнтних обернених задач в областях з фіксованими межами в [9, 10] встановлено умови існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач визначення залежних від часу старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності та коефіцієнта перед першою похідною в одновимірному параболічному рівнянні відповідно. Як умови перевизначення у роботах використано інтегральні умови та умову Стефана.

Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням досліджені мало. Достатні умови існування та єдиності розв'язків обернених задач визначення залежного від часу старшого коефіцієнта параболічного рівняння з виродженням в області з фіксованими межами знайдено в [11, 12], а в області з вільними межами

— у [13, 14]. Досліджено випадки слабкого та сильного степеневого виродження. Умови ідентифікації залежного від часу молодшого коефіцієнта параболічного рівняння зі слабким степеневим виродженням в області з фіксованими межами встановлено у [15]. У цій роботі старший коефіцієнт рівняння залежить лише від часу, що дає змогу використати явний вигляд функції Гріна для рівняння теплопровідності при її дослідженні. Обернені задачі визначення коефіцієнта перед першою похідною одновимірного параболічного рівняння без виродження в області з вільною межею вивчено в [16, 17]. На відміну від [10, 15] старший коефіцієнт рівняння, що розглядається в цих роботах, залежить і від просторової змінної, і від часу.

Мета цієї роботи — в області з вільною межею встановити умови однозначного визначення залежного від часу коефіцієнта перед першою похідною одновимірного параболічного рівняння. Відомо, що старший коефіцієнт цього рівняння є добутком степеневої функції і функції, що залежить від часової і просторової змінних. Як умови перевизначення в роботі використовуються інтегральна умова та умова Стефана. Дослідження проведено у випадку слабкого степеневого виродження.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, — невідома функція, розглянемо обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта $b = b(t)$ перед першою похідною у параболічному рівнянні

$$u_t = a(x,t)t^{\beta}u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$0 < \beta < 1$ — задане число.

Означення 1. *Під розв'язком задачі* (1)–(5) *розуміємо трійку функцій* (b,h,u), $h(t) > 0, t \in [0,T]$, *з класу* $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, *що задовольняє умови* (1)–(5).

Заміною змінних

$$y = \frac{x}{h(t)}, \quad t = t$$

задачу (1)–(5) зведемо до коефіцієнтної оберненої задачі відносно невідомих (b,h,v), $v(y,t) \equiv u(xh(t),t)$ в області з фіксованими межами $Q_T = \{(y,t)\colon 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)t^\beta}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0,1], \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h(t) \int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h'(t) = -\frac{v_y(1,t)}{h(t)} + \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Припустимо, що виконуються умови:

($\mathbf{A_1}$) $a, c, f \in C([0,\infty) \times [0,T])$, $\varphi \in C[0,\infty)$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i \in \{1,2,3\}$;

($\mathbf{A_2}$) $a(x,t) > 0$, $f(x,t) \geq 0$, $c(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > > 0, x \in [0,\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i \in \{1,2,3\}$.

Тоді, згідно з умовою (4), існує єдине значення $h_0 \equiv h(0)$, що є розв'язком рівняння

$$\int\limits_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

Застосовуючи принцип максимуму до задачі (6) – (8) та враховуючи умови ($\mathbf{A_1}$), ($\mathbf{A_2}$), приходимо до оцінки

$$v(y,t) \geq C_1 \min\left\{ \min_{y\in[0,1]} \varphi(yh_0), \min_{t\in[0,T]} \mu_1(t), \min_{t\in[0,T]} \mu_2(t) \right\} \equiv M_0 > 0, \ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{11}$$

Виходячи з рівняння (9), знаходимо оцінку функції $h = h(t)$ зверху:

$$h(t) \leq \frac{\max\limits_{t\in[0,T]} \mu_3(t)}{M_0} \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Отримана оцінка функції $h = h(t)$ дозволяє знову застосувати принцип максимуму до задачі (6) – (8) та одержати оцінку функції $v = v(y,t)$ зверху

$$v(y,t) \leq C_2 \max\left\{ \max_{y\in[0,1]} \varphi(yh_0), \max_{t\in[0,T]} \mu_1(t), \max_{t\in[0,T]} \mu_2(t), \right.$$
$$\left. \max_{(y,\,t)\in[0,1]\times[0,T]} f(yh(t),t) \right\} \equiv M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T \tag{13}$$

і, згідно з (9), оцінку $h = h(t)$ знизу

$$h(t) \geq \frac{\min\limits_{t\in[0,T]} \mu_3(t)}{M_1} \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

Умови існування та єдиності розв'язку задачі (1) – (5) містяться в такій теоремі.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_2})$ *та умови*:

1) $a \in C^{2,0}([0, H_1] \times [0, T])$, $c, f \in C^{1,0}([0, H_1] \times [0, T])$, $\mu_4 \in C[0, T]$, $\varphi \in \in C^2[0, h_0]$;

2) $\mu_2(t) - \mu_1(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

Тоді єдиний розв'язок задачі (1) – (5) *існує при* $x \in [0, h(T_0)]$, $t \in [0, T_0]$, *де число* T_0, $0 < T_0 \leq T$, *визначається вихідними даними цієї задачі.*

Доведення теореми проведемо в декілька етапів. Спочатку задачу (6) – (10) зведемо до еквівалентної системи рівнянь, далі за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора доведемо існування розв'язку цієї системи та на основі властивостей розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду покажемо єдиність розв'язку.

2. Зведення задачі (6) – (10) до системи рівнянь. Припустивши тимчасово, що функції $b = b(t)$, $h = h(t)$ відомі, розглянемо пряму задачу (6) – (8). Заміною змінних

$$v(y, t) = \widetilde{v}(y, t) + \varphi(yh_0) - \varphi(0) + \mu_1(t) + y(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) \quad (15)$$

зведемо її до задачі відносно функції $\widetilde{v} = \widetilde{v}(y, t)$ з однорідними початковою та крайовими умовами:

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(yh(t), t)t^\beta}{h^2(t)} \widetilde{v}_{yy} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)} \widetilde{v}_y + c(yh(t), t)\widetilde{v} + f(yh(t), t) -$$

$$-\mu_1'(t) - y(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) + \frac{h_0^2 a(yh(t), t)t^\beta}{h^2(t)} \varphi''(yh_0) +$$

$$+\frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)} \Big(h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0) \Big) + c(yh(t), t) \times$$

$$\times \left(\varphi(yh_0) - \varphi(0) + \mu_1(t) + y(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\right), \quad (y, t) \in Q_T, \quad (16)$$

$$\widetilde{v}(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (17)$$

$$\widetilde{v}(0, t) = 0, \quad \widetilde{v}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

За допомогою функції Гріна $G(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(yh(t), t)t^\beta}{h^2(t)} \widetilde{v}_{yy} + c(yh(t), t)\widetilde{v} \quad (19)$$

задача (16) – (18) зводиться до інтегро-диференціального рівняння

$$\widetilde{v}(y, t) = \int_0^t \int_0^1 G(y, t, \eta, \tau) \left(\frac{b(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} \widetilde{v}_\eta + f(\eta h(\tau), \tau) - \mu_1'(\tau) - \right.$$

$$-\eta\big(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)\big) + \frac{h_0^2 a(\eta h(\tau), \tau)\tau^\beta}{h^2(\tau)} \varphi''(\eta h_0) +$$

$$+\frac{b(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} \big(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\big) +$$

$$+\, c(\eta h(\tau),\tau)\big(\varphi(\eta h_0)-\varphi(0)+\mu_1(\tau)+\eta(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\big)\Big)\, d\eta d\tau. \tag{20}$$

Позначимо $w(y,t)\equiv v_y(y,t)$. З умови (10) отримуємо

$$h'(t)=-\frac{w(1,t)}{h(t)}+\mu_4(t), \quad t\in[0,T]. \tag{21}$$

Взявши до уваги (15), (20), (21), пряму задачу (6) – (8) замінимо системою інтегральних рівнянь

$$v(y,t)=\varphi(yh_0)-\varphi(0)+\mu_1(t)+y(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0))+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(y,t,\eta,\tau)\left(\left(b(\tau)+\eta\left(\mu_4(\tau)-\frac{w(1,\tau)}{h(\tau)}\right)\right)\frac{w(\eta,\tau)}{h(\tau)}+f(\eta h(\tau),\tau)-\right.$$
$$-\mu_1'(\tau)-\eta(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+\frac{h_0^2a(\eta h(\tau),\tau)\tau^\beta}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)+$$
$$\left.+c(\eta h(\tau),\tau)\big(\varphi(\eta h_0)-\varphi(0)+\mu_1(\tau)+\eta(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\big)\right)d\eta d\tau, \tag{22}$$

$$w(y,t)=h_0\varphi'(yh_0)+\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_y(y,t,\eta,\tau)\left(\left(b(\tau)+\eta\left(\mu_4(\tau)-\frac{w(1,\tau)}{h(\tau)}\right)\right)\frac{w(\eta,\tau)}{h(\tau)}+f(\eta h(\tau),\tau)-\right.$$
$$-\mu_1'(\tau)-\eta(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+\frac{h_0^2a(\eta h(\tau),\tau)\tau^\beta}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)+$$
$$+c(\eta h(\tau),\tau)\big(\varphi(\eta h_0)-\varphi(0)+\mu_1(\tau)+\eta(\mu_2(\tau)-$$
$$\left.-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\big)\right)d\eta d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{23}$$

Зауважимо, що рівняння (23) отримано з рівняння (22) шляхом диференціювання за просторовою змінною.

Враховуючи (11), з рівності (9) знаходимо

$$h(t)=\frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,T]. \tag{24}$$

Для того щоб одержати рівняння відносно $b=b(t)$, здиференціюємо (9) за часом. Беручи до уваги (6) – (9), (21), приходимо до рівняння

$$b(t)=\left(\mu_3'(t)-\frac{t^\beta}{h(t)}(a(h(t),t)w(1,t)-a(0,t)w(0,t))+\right.$$

$$+\int_0^1 t^\beta a_x(yh(t),t)w(y,t)dy-\mu_2(t)\left(\mu_4(t)-\frac{w(1,t)}{h(t)}\right)-$$

$$\left.-h(t)\int_0^1(c(yh(t),t)v(y,t)+f(yh(t),t))dy\right)\big(\mu_2(t)-\mu_1(t)\big)^{-1},\quad t\in[0,T]. \quad (25)$$

Таким чином, задачу (6) – (10) зведено до системи рівнянь (22) – (25) з невідомими $v=v(y,t)$, $w=w(y,t)$, $h=h(t)$, $b=b(t)$.

Задача (6) – (10) та система рівнянь (22) – (25) еквівалентні. Зі способу отримання системи рівнянь (22) – (25) випливає, що якщо (b,h,v) є класичним розв'язком задачі (6) – (10), то $(v,w,h,b)\in(C(\overline{Q}_T))^2\times(C[0,T])^2$ є розв'язком системи рівнянь (22) – (25). Покажемо, що правильним є і зворотне твердження: якщо (v,w,h,b) — неперервний розв'язок системи рівнянь (22) – (25), то (b,h,v) належать класу $C[0,T]\times C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ та задовольняють (6) – (10).

Отже, нехай (v,w,b,h) є неперервним розв'язком системи рівнянь (22) – (25). Припущення теореми дозволяють здиференціювати рівняння (22) по y. Праві частини отриманої рівності та рівності (23) збігаються. Як наслідок, отримуємо

$$w(y,t)\equiv v_y(y,t).$$

Враховуючи цей факт в (22) та беручи до уваги (15), робимо висновок, що функція $v=v(y,t)$ має потрібну гладкість, задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{a(yh(t),t)t^\beta}{h^2(t)}v_{yy}+\left(b(t)+\left(\mu_4(t)-\frac{v_y(1,t)}{h(t)}\right)\right)h^{-1}(t)v_y+$$
$$+c(yh(t),t)v+f(yh(t),t) \quad (26)$$

та умови (7), (8).

Здиференціюємо рівність (24) по t. Використовуючи рівняння (26) та умови (8), приходимо до рівності

$$b(t)=\left(\mu_3'(t)-\frac{t^\beta}{h(t)}(a(h(t),t)v_y(1,t)-a(0,t)v_y(0,t))+\right.$$

$$+\int_0^1 t^\beta a_x(yh(t),t)v_y(y,t)dy-\mu_2(t)\left(\mu_4(t)-\frac{v_y(1,t)}{h(t)}\right)-$$

$$-\frac{\mu_3(t)}{h(t)}\left(h'(t)-\mu_4(t)+\frac{v_y(1,t)}{h(t)}\right)-h(t)\int_0^1(c(yh(t),t)v(y,t)+$$

$$\left.+f(yh(t),t))dy\right)\big(\mu_2(t)-\mu_1(t)\big)^{-1},\quad t\in[0,T]. \quad (27)$$

Віднімемо рівності (25), (27). Враховуючи умови теореми та той факт, що $w(y,t)\equiv$ $\equiv v_y(y,t)$, знаходимо

$$h'(t) - \mu_4(t) + \frac{v_y(1,t)}{h(t)} = 0, \quad t \in [0,T].$$

З отриманої рівності випливає, що $h \in C^1[0,T]$ і виконується умова (10). Використовуючи це в рівнянні (26), приходимо до рівняння (6), що й завершує доведення еквівалентності задачі (6) – (10) та системи рівнянь (22) – (25).

3. Доведення існування розв'язку задачі (6) – (10). Для того щоб довести існування розв'язку задачі (6) – (10), доведемо, що існує неперервний розв'язок системи рівнянь (22) – (25). Для цього використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Встановимо спочатку апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (22) – (25).

Для функцій $h = h(t)$, $v = v(y,t)$ мають місце оцінки (11) – (14), тому залишилось оцінити функції $b = b(t)$ та $w = w(y,t)$. Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. З рівності (25) знаходимо

$$|b(t)| \leq C_3 + C_4 W(t), \quad t \in [0,T]. \tag{28}$$

Виходячи з рівняння (23), оцінимо $W = W(t)$. Використовуючи (12), (14), (28) та відомі оцінки функцій Гріна [18, с. 469]

$$|D_t^r D_y^s G(y,t,\eta,\tau)| \leq$$

$$\leq C_5(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})^{-\frac{1+2r+s}{2}} \exp\left(-C_6 \frac{(y-\eta)^2}{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}\right), \quad r \in \{0,1\}, \quad s \in \{0,1,2\}, \tag{29}$$

приходимо до нерівності

$$W(t) \leq C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau,$$

або, позначаючи $W_1(t) \equiv W(t) + \dfrac{1}{2}$,

$$W_1(t) \leq C_9 + C_8 \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Останню нерівність запишемо у вигляді

$$W_1(t) \leq C_9 + \frac{C_8}{t^{\beta/2}} \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t - \tau\left(\dfrac{\tau}{t}\right)^\beta}} d\tau \leq C_9 + \frac{C_8}{t^{\beta/2}} \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{30}$$

Обидві частини (30) піднесемо до квадрату, використавши при цьому нерівності Коші та Коші – Буняковського. В результаті отримаємо

$$W_1^2(t) \leq C_{10} + \frac{C_{11}}{t^{\beta - 1/2}} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

В одержаній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, зінтегруємо її по σ від 0 до t. Беручи до уваги рівність

$$\int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}} = \pi,$$

знаходимо

$$\int\limits_{0}^{t} \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leq C_{10} t^{1/2} + C_{11} t^{1/2} \int\limits_{0}^{t} \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta} d\tau.$$

Отриману нерівність використаємо в (30). Враховуючи той факт, що досліджується випадок слабкого степеневого виродження, одержуємо

$$W_1(t) \leq C_{12} + C_{13} \int\limits_{0}^{t} \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta} d\tau, \quad t \in [0, T]. \tag{31}$$

Розв'язуючи (31), як у [15], знаходимо

$$W_1(t) \leq M_2, \quad t \in [0, T_0],$$

де число T_0, $0 < T_0 \leq T$ визначається з нерівності

$$1 - \beta - 3C_{12}^3 C_{13} T_0^{1-\beta} > 0.$$

Як наслідок, маємо

$$|w(y,t)| \leq M_2, \quad y \in [0,1], \quad t \in [0, T_0], \tag{32}$$

$$|b(t)| \leq M_3, \quad t \in [0, T_0]. \tag{33}$$

Таким чином, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (22) – (25) встановлено.

Запишемо систему рівнянь (22) – (25) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v, w, h, b)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (22) – (25). У банаховому просторі $\mathbf{B} = (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2$ визначимо множину $N = \{(v, w, h, b) \in \mathbf{B} \colon M_0 \leq v(y,t) \leq M_1,\ |w(y,t)| \leq M_2,\ H_0 \leq h(t) \leq H_1,\ |b(t)| \leq M_3\}$. Зрозуміло, що множина N замкнена і опукла, а оператор P переводить її в себе. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на N. Виходячи з (22) – (25), для цього достатньо довести компактність інтегральних операторів

$$P_1 \colon \omega(y,t) \to \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{0}^{1} G(y,t,\eta,\tau) \omega(\eta,\tau) d\eta d\tau,$$

$$P_2 \colon \omega(y,t) \to \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{0}^{1} G_y(y,t,\eta,\tau) \omega(\eta,\tau) d\eta d\tau.$$

Оскільки неперервність операторів P_1, P_2 очевидна, покажемо, що множини P_1N, P_2N компактні на N, або, згідно з теоремою Арцела – Асколі, рівномірно обмежені та одностайно неперервні.

Розглянемо

$$(P_1\omega)(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G(y,t,\eta,\tau)\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau.$$

З оцінки $|P_1\omega(x,t)| \leq T \max_N |\omega(\eta,\tau)|$ випливає, що множина P_1N рівномірно обмежена.

Встановимо одностайну неперервність множини P_1N. Для цього задамо довільне $\epsilon > 0$ і розглянемо різницю

$$\Delta = |(P_1\omega)(y_2,t_2) - (P_1\omega)(y_1,t_1)|$$

з довільними точками $(y_i,t_i) \in \overline{Q}_T$, $i = 1, 2$, $(y_1,t_1) \neq (y_2,t_2)$. Очевидно, що

$$\Delta \leq |(P_1\omega)(y_2,t_2) - (P_1\omega)(y_2,t_1)| + |(P_1\omega)(y_2,t_1) - (P_1\omega)(y_1,t_1)| \equiv \Delta_1 + \Delta_2.$$

Оскільки

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t \int_0^1 G(y,t,\eta,\tau)\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau = 0,$$

то для вказаного ϵ існує таке $\widetilde{t}_1$, $0 < \widetilde{t}_1 \leq T$, що для будь-якого $\omega \in N$

$$\left| \int_0^t \int_0^1 G(y,t,\eta,\tau)\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau \right| < \frac{\epsilon}{8}, \quad 0 \leq t \leq \widetilde{t}_1, \quad y \in [0,1]. \tag{34}$$

Якщо t_1, $t_2 < \widetilde{t}_1$, то, враховуючи (34), маємо

$$\Delta_1 \leq \left| \int_0^{t_2} \int_0^1 G(y_2,t_2,\eta,\tau)\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau \right| + \left| \int_0^{t_1} \int_0^1 G(y_2,t_1,\eta,\tau)\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Припустимо для визначеності, що $t_2 > t_1$, $t_1, t_2 > \widetilde{t}_1$. Тоді для Δ_1 справджується оцінка

$$\Delta_1 \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 G(y_2,t_1,\eta,\tau)\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{t_2} \int_0^1 (G(y_2,t_2,\eta,\tau) - G(y_2,t_1,\eta,\tau))\omega(\eta,\tau)d\eta d\tau \right| \equiv \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

Для оцінки $\Delta_{1,1}$ використаємо (29). Отримаємо

$$\Delta_{1,1} \leq C_{14} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 (t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})^{-1/2} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2-\eta)^2}{t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}} \right) d\eta d\tau \leq$$

$$\le C_{15}|t_2 - t_1| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{при} \quad |t_2 - t_1| < \frac{\epsilon}{4C_{15}}.$$

Використавши оцінки функції Гріна, доданок $\Delta_{1,2}$ записуємо у вигляді

$$\Delta_{1,2} \le C_{16} \left| \int\limits_0^{t_2} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t_2^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{t_2^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\sqrt{t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}} \right) \right) d\eta d\tau \right|.$$

Після заміни змінних $t_2^{\beta+1} - \tau^{\beta+1} = z$ одержимо нерівність

$$\Delta_{1,2} \le C_{17} \int\limits_0^{t_2^{\beta+1}} \int\limits_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{z} \right) - \frac{1}{\sqrt{t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1} + z}} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1} + z} \right) \right| \frac{1}{(t_2^{\beta+1} - z)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} d\eta dz.$$

Беручи до уваги рівність

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_0^{t^{\beta+1}} \frac{1}{(t^{\beta+1} - z)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} dz = 0,$$

робимо висновок, що для вказаного ϵ можна вказати таке число $\widetilde{t}_2$, $0 \le \widetilde{t}_2 \le T$, що

$$\left| \int\limits_0^{t^{\beta+1}} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{z} \right) \frac{1}{(t^{\beta+1} - z)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} d\eta dz \right| < \frac{\epsilon}{12C_{17}} \tag{35}$$

для $0 \le t \le \widetilde{t}_2$, $y_2 \in [0, 1]$. Враховуючи (35), для $\Delta_{1,2}$ знаходимо

$$\Delta_{1,2} \le C_{17} \int\limits_0^{\widetilde{t}_2^{\beta+1}} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{z} \right) \frac{1}{(\widetilde{t}_2^{\beta+1} - z)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} d\eta dz +$$

$$+ C_{17} \int\limits_0^{\widetilde{t}_2^{\beta+1}} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{\widetilde{t}_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1} + z}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{\widetilde{t}_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1} + z} \right) \frac{1}{(\widetilde{t}_2^{\beta+1} - z)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} d\eta dz +$$

$$+ C_{17} \int\limits_{\widetilde{t}_2^{\beta+1}}^{t_2^{\beta+1}} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_z^{t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1} + z} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-C_6 \frac{(y_2 - \eta)^2}{s} \right) \right) ds \right) d\eta dz \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{6} + C_{18} |t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1}| < \frac{\epsilon}{4},$$

якщо $|t_2 - t_1| < \dfrac{\epsilon}{12C_{18}}$.

Підсумовуючи отримані оцінки, одержуємо

$$\Delta_1 < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{якщо} \quad |t_2 - t_1| < \min\left\{\frac{\epsilon}{4C_{15}}, \frac{\epsilon}{12C_{18}}\right\}.$$

У випадку $t_2 > \widetilde{t}_1$, $t_1 < \widetilde{t}_1$ вираз Δ_1 записуємо у вигляді

$$\Delta_1 \le \left| \int_0^{t_2} \int_0^1 G(y_2, t_2, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau - \int_0^{\widetilde{t}_1} \int_0^1 G(y_2, \widetilde{t}_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{\widetilde{t}_1} \int_0^1 G(y_2, \widetilde{t}_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau - \int_0^{t_1} \int_0^1 G(y_2, t_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau \right|,$$

звідки, об'єднуючи наведені вище міркування, отримуємо

$$\Delta_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

При оцінюванні Δ_2 знову виділимо випадок малого часу. Якщо $t_1 < \widetilde{t}_1$, то

$$\Delta_2 \le \left| \int_0^{t_1} \int_0^1 G(y_2, t_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau \right| + \left| \int_0^{t_1} \int_0^1 G(y_1, t_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

У випадку $t_1 > \widetilde{t}_1$, знаходимо

$$\Delta_2 \le \left| \int_0^{\widetilde{t}_1} \int_0^1 G(y_2, t_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau \right| + \left| \int_0^{\widetilde{t}_1} \int_0^1 G(y_1, t_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) d\eta d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_{\widetilde{t}_1}^{t_1} \int_0^1 \int_{y_1}^{y_2} G_y(y, t_1, \eta, \tau)\omega(\eta, \tau) dy d\eta d\tau \right| < \frac{\epsilon}{4} + \Delta_{2,1}.$$

Беручи до уваги (29), оцінюємо $\Delta_{2,1}$:

$$\Delta_{2,1} \le C_{19} \int_{\widetilde{t}_1}^{t_1} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^1 (t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})^{-1} \exp\left(-C_6 \frac{(y-\eta)^2}{t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}\right) d\eta dy d\tau \le$$

$$\le C_{20}|y_2 - y_1| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{якщо} \quad |y_2 - y_1| < \frac{\epsilon}{4C_{20}}.$$

Таким чином,

$$\Delta_2 < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{при} \quad |y_2 - y_1| < \frac{\epsilon}{4C_{20}}$$

і, як наслідок,

$$\Delta < \epsilon, \quad \text{якщо} \quad |t_2 - t_1| < \min\left\{\frac{\epsilon}{4C_{15}}, \frac{\epsilon}{12C_{18}}\right\}, \quad |y_2 - y_1| < \frac{\epsilon}{4C_{20}}.$$

Одностайну неперервність множини P_1N встановлено.

Проведені міркування повністю переносяться на оператор P_2. Це означає, що оператор P цілком неперервний на N. Далі застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. В результаті отримаємо існування розв'язку системи рівнянь (22) – (25) при $y \in [0,1]$, $t \in [0,T_0]$. Виходячи з еквівалентності системи рівнянь (22) – (25) та задачі (6) – (10), робимо висновок, що існує розв'язок задачі (6) – (10), а отже, і розв'язок задачі (1) – (5), якщо $x \in [0,h(T_0)]$, $t \in [0,T_0]$, де число T_0, $0 < T_0 \leq T$ визначається вихідними даними цієї задачі.

4. Доведення єдиності розв'язку задачі (6) – (10). Врахувавши еквівалентність задачі (6) – (10) та системи рівнянь (22) – (25), доведемо, що розв'язок системи єдиний. Для цього припустимо, що згадана система має два розв'язки (v_i, w_i, h_i, b_i), $i \in \{1,2\}$, і покажемо, що вони збігаються. Позначимо різниці цих розв'язків $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$, $w(y,t) = w_1(y,t) - w_2(y,t)$, $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$, $b(t) = b_1(t) - b_2(t)$. Виходячи з рівнянь (22) – (25), бачимо, що зазначені різниці задовольняють систему

$$
\begin{gathered}
v(y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G(y,t,\eta,\tau)\Bigg(f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau) + (c(\eta h_1(\tau),\tau) - \\
- c(\eta h_2(\tau),\tau))\big(\varphi(\eta h_0) + \mu_1(\tau) - \mu_1(0) + \eta(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\big) + \\
+ \tau^\beta h_0^2 \varphi''(\eta h_0)\left(a(\eta h_2(\tau),\tau)\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)}\right) + \frac{a(\eta h_1(\tau),\tau) - a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}\right) + \\
+ \left(b_1(\tau) + \eta\left(\mu_4(\tau) - \frac{w_1(\eta,\tau)}{h_1(\tau)}\right)\right)\frac{w(\eta,\tau)}{h_1(\tau)} + \\
+ w_2(\eta,\tau)\left(\left(b_1(\tau) + \eta\left(\mu_4(\tau) - \frac{w_1(\eta,\tau)}{h_1(\tau)}\right)\right)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \right. \\
\left. + \left(b(\tau) - \eta\left(\frac{w(\eta,\tau)}{h_1(\tau)} + w_2(\eta,\tau)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right)\right)\right)h_2^{-1}(\tau)\right)\Bigg) d\eta d\tau, \ (y,t) \in \overline{Q}_T,
\end{gathered} \tag{36}
$$

$$
\begin{gathered}
w(y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_y(y,t,\eta,\tau)\Bigg(f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau) + (c(\eta h_1(\tau),\tau) - \\
- c(\eta h_2(\tau),\tau))\big(\varphi(\eta h_0) + \mu_1(\tau) - \mu_1(0) + \eta(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\big) + \\
+ \tau^\beta h_0^2 \varphi''(\eta h_0)\left(a(\eta h_2(\tau),\tau)\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)}\right) + \frac{a(\eta h_1(\tau),\tau) - a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}\right) + \\
+ \left(b_1(\tau) + \eta\left(\mu_4(\tau) - \frac{w_1(\eta,\tau)}{h_1(\tau)}\right)\right)\frac{w(\eta,\tau)}{h_1(\tau)} + \\
+ w_2(\eta,\tau)\left(\left(b_1(\tau) + \eta\left(\mu_4(\tau) - \frac{w_1(\eta,\tau)}{h_1(\tau)}\right)\right)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \right. \\
\left. + \left(b(\tau) - \eta\left(\frac{w(\eta,\tau)}{h_1(\tau)} + w_2(\eta,\tau)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right)\right)\right)h_2^{-1}(\tau)\right)\Bigg) d\eta d\tau, \ (y,t) \in \overline{Q}_T,
\end{gathered} \tag{37}
$$

$$h(t) = -\frac{h_1(t)h_2(t)}{\mu_3(t)} \int_0^1 v(y,t)dy, \quad t \in [0,T], \tag{38}$$

$$b(t) = \Bigg(t^\beta (a(h_1(t),t)w_1(1,t) - a(0,t)w_1(0,t)) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) +$$

$$+ \frac{t^\beta}{h_2(t)} \Big(a(h_1(t),t)w(1,t) + (a(h_1(t),t) - a(h_2(t),t))w_2(y,t) - a(0,t)w(0,t) \Big) +$$

$$+ \int_0^1 t^\beta \big(a_y(yh_1(t),t)w(y,t) + (a_y(yh_1(t),t) - a_y(yh_2(t),t))w_2(y,t) \big) dy +$$

$$+\mu_2(t) \left(\frac{w(1,t)}{h_1(t)} + w_2(y,t) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \right) -$$

$$-h(t) \int_0^1 (c(yh_1(t),t)v_1(y,t) + f(yh_1(t),t))dy -$$

$$-h_2(t) \int_0^1 \big(c(yh_2(t),t)v(y,t) + (c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t))v_1(y,t) +$$

$$+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) \big) dy \Bigg) \big(\mu_2(t) - \mu_1(t) \big)^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{39}$$

Беручи до уваги теорему Лагранжа про середнє та припущення теореми, маємо

$$f(yh_1(y),t) - f(yh_2(t),t) = yh(t) \int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))),t)d\sigma. \tag{40}$$

Аналогічні рівності виконуються також для функцій $a(yh(t),t)$, $a_y(yh(t),t)$, $c(yh(t),t)$. Крім того, справедливими є формули

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_1(t)h_2(t)}\, h(t), \tag{41}$$

$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{h_1(t)+h_2(t)}{h_1^2(t)h_2^2(t)}\, h(t). \tag{42}$$

Підставляючи (38) – (42) в (36), (37), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно функцій $v = v(y,t)$, $w = w(y,t)$. Згідно з оцінками (29), ядра цієї системи мають інтегровні особливості. Це означає, що система рівнянь (36), (37) має лише тривіальний розв'язок

$$v(y,t) \equiv 0, \quad w(y,t) \equiv 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{43}$$

Використовуючи це в (38), (39), знаходимо

$$h(t) \equiv 0, \quad b(t) \equiv 0, \quad t \in [0,T], \tag{44}$$

що й завершує доведення єдиності розв'язку системи рівнянь (22) – (25) і відповідно задачі (1) – (5).

Зауважимо, що для доведення існування розв'язку задачі (1) – (5) достатньо вимагати, щоб коефіцієнти рівняння належали класу $a, c, f \in C([0,\infty) \times [0,T])$, $a \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T])$. Умови на гладкість функцій a, c, f, що наведені в умовах теореми, використовуються при доведенні єдиності розв'язку. Крім того, припущення на вихідні дані насправді забезпечують належність функції $u = u(x,t)$ класу $C^1([0,h(T_0)]\times[0,T_0])\cap C^{2,0}([0,h(T_0)]\times(0,T_0])$. Використовуючи властивості функції Гріна [19, с. 55], можна показати, що друга похідна за просторовою змінною функції $u = u(x,t)$ поводить себе як $t^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$, при $t \to +0$.

1. *Jones B. F.* The determination of a coefficient in a parabolic equation. Part I. Existence and uniqueness // J. Math. and Mech. – 1962. – **11**, № 6. – P. 907 – 918.
2. *Cannon J. R., Lin Y.* An inverse problem of finding a paramiter in a semilinear heat equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **145**. – P. 470 – 484.
3. *Пабирівська Н., Вареник О.* Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 181 – 189.
4. *Cannon J. R., Peres-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1993. – **10**, № 3. – P. 521 – 531.
5. *Trong D. D., Ang D. D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – **10**, № 3. – P. 733 – 752.
6. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 147 – 162.
7. *Безнощенко Н. Я.* Некоторые задачи определения коэффициентов при младших членах параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 6. – С. 1135 – 1147.
8. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – **9**, № 6. – P. 1 – 27.
9. *Баранська І., Іванчов М.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457 – 484.
10. *Гринців Н. М., Снітко Г. А.* Обернені задачі визначення коефіцієнта при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 77 – 88.
11. *Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 7 – 17.
12. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1487 – 1500.
13. *Гринців Н. М.* Розв'язність оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння в області з вільною межею // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика – 2006. – Вип. 314 – 315. – С. 40 – 49.
14. *Гринців Н. М., Іванчов М. І.* Обернена задача для сильновиродженого рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 28 – 43.
15. *Гринців Н.* Визначення коефіцієнта перед першою похідною у параболічному рівнянні з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 78 – 87.
16. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 7 – 18.
17. *Снітко Г. А.* Визначення невідомого множника в коефіцієнті при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 233 – 247.
18. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
19. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.

Одержано 24.01.11